V.A. Kudriávtsev
B.P. Demidóvich

Breve Curso de *Matemáticas* Superiores

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

Editorial Mir Moscú

BREVE CURSO DE MATEMÁTICAS SUPERIORES

В. А. Кудрявцев
Б. П. Демидович

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Москва «Наука»

V. A. Kudriávtsev
B. P. Demidóvich

Breve Curso de Matemáticas Superiores

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por
S. A. Bulánov

Impreso en la URSS

На испанском языке

УДК 51=60

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

ISBN 5-03-000654-0

Indice

Introducción

En los últimos años, en la enseñanza de las matemáticas en las facultades especializadas, se nota una serie de nuevas tendencias. Cabe apuntar las principales.

a) Debido al desarrollo de la computación ha crecido sensibles mente el interés por los métodos numéricos de resolución de lo- problemas.

b) Se ha elevado la importancia del álgebra lineal. En muchos casos la geometría analítica se considera como una ilustración geométrica de los objetos geométricos correspondientes.

c) Para las aplicaciones, se siente la necesidad del álgebra vectorial.

d) No se discute el hecho de que el especialista en ciencias naturales debe tener conocimientos del análisis armónico.

e) Es necesario enseñar a los estudiantes los conceptos sobre los métodos numéricos (cuantitativos) de resolución de las ecuaciones diferenciales. Además, se deben impartir conocimientos sobre las ecuaciones de la física matemática.

f) Para algunas especialidades se requiere un conocimiento básico de los elementos de la teoría de las probabilidades.

Este libro toma en consideración estos hechos, modernizando el curso de matemáticas superiores.

La finalidad principal de la obra es la de servir como texto de estudio de matemáticas superiores para los estudiantes de las facultades de ciencias naturales (en especial de las facultades de geología, geografía, biología y agronomía).

Además de la exposición de los conceptos más importantes, en el libro se brindan aplicaciones en diversos campos. Actualmente las matemáticas superiores sirven de fundamento teórico de la mayoría de las disciplinas científico-naturales y técnicas. El dominio de los métodos matemáticos y la capacidad de utilizarlos en la práctica, son elementos imprescindibles para el buen desempeño de todo especialista en ciencias naturales.

Los autores

Capítulo I

Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano y su aplicación a problemas simples

§ 1. Coordenadas cartesianas rectangulares de un punto sobre el plano

Llámanse *coordenadas de un punto* sobre el plano a los números que determinan la posición del primero en el segundo.

Las coordenadas cartesianas rectangulares sobre el plano se introducen del modo siguiente: se elige en dicho plano un punto O (*origen de las coordenadas*) y dos rectas orientadas, perpendiculares entre sí, Ox y Oy (*ejes de las coordenadas*) que pasan por dicho punto (fig. 1). Para mayor comodidad del examen suponemos que el eje Ox (*eje de las abscisas*) es horizontal y está dirigido de izquierda a derecha, a que el eje Oy (*eje de las ordenadas*) es vertical y está dirigido de abajo hacia arriba; de este modo el eje Oy está girado con respecto al eje Ox en un ángulo de 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj[1]). Además se elige una escala para medir las distancias.

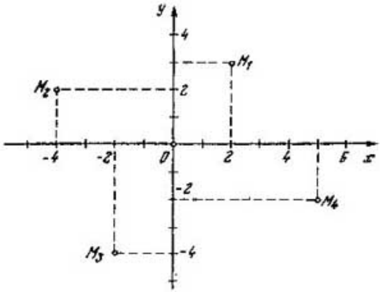

Fig. 1

Consideramos para un punto M dado, dos números: *la abscisa x y la ordenada y.*

Llámase *abscisa x* al número que expresa, en cierta escala, la distancia entre el punto y el eje de las ordenadas tomado con el signo «+», si el punto está situado a la derecha del eje de las ordenadas, y con el signo «—», si el punto se encuentra a la izquierda del eje de las ordenadas.

Llámase *ordenada y* al número que expresa, en cierta escala (generalmente la misma que para la abscisa) la distancia entre el punto y el eje de las abscisas tomado con el signo «+», si el punto está encima del eje de abscisas, y con el signo «—», si el punto se sitúa por debajo del eje de las abscisas.

---

[1]) La disposición de los ejes y la elección de sus sentidos positivo y negativo son, en general, arbitrarias.

Estos dos números x e y se toman como las **coordenadas** del punto M, pues determinan totalmente la posición del punto sobre el plano, es decir: *a cada par de números x e y le corresponde un solo punto cuyas coordenadas son estos mismos números; y recíprocamente, cada punto del plano posee determinadas coordenadas x e y*. Si un punto M tiene las coordenadas x e y, esto se escribirá así: $M\ (x,\ y)$ (primero se escribe la abscisa x y después la ordenada y). Como siempre el signo «+» puede ser omitido en la notación de las coordenadas.

	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

Fig. 2

Los ejes Ox y Oy dividen el plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes*. Efectuando la numeración de estos cuadrantes (I, II, III y IV) en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y partiendo del cuadrante en el que las dos coordenadas son positivas, se obtiene la tabla siguiente y la figura 2 para los signos de las coordenadas:

	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

El segmento OM que une el origen de las coordenadas O con el punto M (fig. 6) se llama *radio vector* de este punto. Designando con φ el ángulo formado por el segmento OM y el sentido positivo del eje Ox, y con r su longitud, se deduce recurriendo al triángulo OMM' para el punto M situado en el primer cuadrante:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = r\,\mathrm{sen}\,\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

No es difícil convencerse de que las fórmulas (1) serán justas para todas las coordenadas de los puntos situados en todos los cuadrantes. De este modo el signo de la abscisa x del punto M coincide con el del coseno y el signo de su ordenada y coincide con el signo del seno en el cuadrante correspondiente.

Es fácil ver que si un punto pertenece al eje de las abscisas, su ordenada y es igual a cero; si este punto pertenece al eje de las ordenadas, su abscisa x es nula y viceversa. Por consiguiente, si un punto coincide con el origen de las coordenadas, sus coordenadas serán iguales a cero.

EJEMPLO. Los puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ y $M_4(x_4, y_4)$ de la fig. 1 tienen las coordenadas: $x_1 = +2$, $y_1 = +3$; $x_2 = -4$, $y_2 = +2$; $x_3 = -2$, $y_3 = -4$; $x_4 = +5$, $y_4 = -2$.

Para abreviar, en adelante las coordenadas cartesianas rectangulares serán solamente llamadas **coordenadas rectangulares**.

En los párrafos siguientes examinaremos la aplicación de las coordenadas rectangulares en el plano en la resolución de problemas sencillos.

§ 2. Transformación del sistema de las coordenadas rectangulares

Para resolver algunos problemas, a veces es útil elegir en reemplazo del sistema de coordenadas dado Oxy otro sistema de coordenadas rectangulares $O'x'y'$ orientado de un modo determinado respecto al primero. Por ejemplo, para el caso de los vuelos interplanetarios, se puede utilizar un sistema de coordenadas, cuyo origen se encuentra en el centro de la Tierra (sistema **geocéntrico** de coordenadas); pero es más cómodo utilizar un sistema de coordenadas con origen en el centro del Sol (sistema **heliocéntrico** de coordenadas).

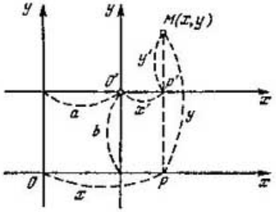

Fig. 3

Surge el problema de cómo transformar un sistema de coordenadas en otro.

Primeramente examinemos un caso muy simple (fig. 3) cuando los ejes del «nuevo sistema de coordenadas» $O'x'y'$ son paralelos a los del «viejo sistema de coordenadas» Oxy y tienen las mismas direcciones que las de este segundo sistema (*traslación paralela del sistema de coordenadas*).

Supongamos que el origen del nuevo sistema de coordenadas es el punto O' cuyas coordenadas son (a, b) en el viejo sistema de coordenadas. Entonces el punto M del plano, cuyas «viejas coordenadas» son (x, y), tendrá las «nuevas coordenadas» $[x', y']$ (para que resulte más claro las escribimos entre corchetes). De la fig. 3 obtenemos inmediatamente

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \tag{1}$$

es decir, *las nuevas coordenadas del punto son iguales a las viejas menos las viejas del nuevo origen.*

Recíprocamente, de las (1) hallamos

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \tag{2}$$

Supongamos ahora que el «nuevo sistema» de coordenadas $Ox'y'$ con el mismo origen O se hace girar en un ángulo α respecto al «viejo sistema» (fig. 4), es decir, $\angle x'Ox = \alpha$; el ángulo α se considera positivo, si el giro se produce en sentido contrario al de las agujas del reloj, y negativo, si el giro se realiza en el sentido opuesto (*rotación del sistema de coordenadas*).

Designemos por β el ángulo formado por el radio vector $r = OM$ del punto M y el eje Ox'; en este caso el segmento OM teniendo en cuenta el signo del ángulo β[1]), formará con el eje Ox un ángulo $\alpha + \beta$. Ahora mediante las fórmulas (1) del § 1 para cualquier posición del punto M, tendremos

$$x = r\cos(\alpha+\beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, \tag{3}$$

e

$$y = r\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta. \tag{4}$$

Como las nuevas coordenadas del punto M son, evidentemente,

$$x' = r\cos\beta, \quad y' = r\,\mathrm{sen}\,\beta, \tag{5}$$

a partir de las fórmulas (3) y (4) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\,\mathrm{sen}\,\alpha,\\ y &= x'\,\mathrm{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Para memorizar mejor las fórmulas del sistema (6), se utiliza el método mnemotécnico siguiente: se dice que la primera fórmula de (6) contiene un **desorden total** y que la segunda contiene un **orden total.** Efectivamente, en el segundo miembro de la primera fórmula, se tiene primero el coseno y luego el seno; además está presente el signo «—». La segunda fórmula del sistema (6) no posee, en este sentido, irregularidades.

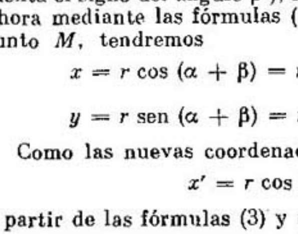

Fig. 4

Las fórmulas (6) expresan las viejas coordenadas x e y del punto M por medio de sus nuevas coordenadas x' e y'. Para poder expresar las nuevas coordenadas x' e y' mediante las viejas x e y, es suficiente resolver el sistema (6) respecto a x' e y'. Sin embargo se puede proceder de un modo más simple: a saber, tomamos el sistema $Ox'y'$ por el «viejo» y el sistema Oxy, por el «nuevo». Si en este caso se tiene en cuenta que el segundo sistema está girado a un ángulo $-\alpha$ respecto

[1]) Aquí el ángulo β se considera positivo, si el radio vector OM está girado respecto al eje Ox' en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y negativo, si está girado en el sentido de las agujas del reloj.

al primero y sistituimos en las fórmulas (6) x' e y' respectivamente por x e y y viceversa, además considerando que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ tendremos

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha, \\ y' &= -x\operatorname{sen} + y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Por fin, en el caso general cuando el nuevo origen de las coordenadas es el punto O' (a, b) y el eje $O'x'$ forma con el eje Ox un ángulo α compatibilizando las fórmulas (2) y (6) hallamos

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha, \\ y &= b + x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

De modo análogo, de las fórmulas (1) y (7) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha, \\ y' &= -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Las relaciones (8) y (9) muestran que las fórmulas de transformación de las coordenadas rectangulares (de traslación y de rotación de ejes) son **funciones lineales** tanto de las coordenadas nuevas como de las viejas, es decir, en esas relaciones estas coordenadas son de primer grado.

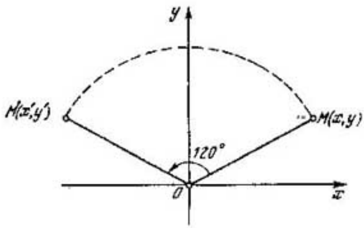

Fig. 5

EJEMPLO. Al segmento OM, cuyo punto M tiene las coordenadas (x, y) se ha girado en un ángulo $\alpha = 120°$ en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 5). ¿Cuáles serán las coordenadas x' e y' de la nueva posición M' del punto M?

Suponiendo que el punto M está ligado con el sistema móvil de coordenadas $Ox'y'$ mediante las fórmulas (6), hallamos

$$x' = x\cos 120° - y\operatorname{sen} 120° = -(x + y\sqrt{3})/2,$$
$$y' = x\operatorname{sen} 120° + y\cos 120° = (x\sqrt{3} - y)/2.$$

§ 3. Distancia entre dos puntos en el plano

1) Hallamos primeramente la distancia r desde un punto M (x, y) hasta el origen de las coordenadas O $(0, 0)$ (fig. 6).

La distancia $r = OM$ es evidentemente la hipotenusa del triángulo rectángulo $\Delta OMM'$ cuyos catetos son $OM' = |x|$ y $M'M = |y|$.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras obtenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De este modo, *la distancia desde un punto al origen de las coordenadas es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas de este punto.*

2) En el caso general, supongamos que debemos hallar la distancia $d = AB$ entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ (fig. 7).

Fig. 6

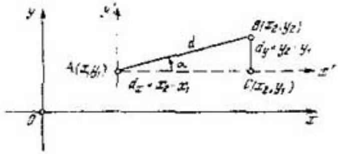

Fig. 7

Elegimos un nuevo sistema de coordenadas $Ax'y'$, cuyo origen coincide con el punto A y sus ejes son paralelos a los anteriores y tienen respectivamente las mismas direcciones. En este caso, en el nuevo sistema, las coordenadas de los puntos A y B serán (§ 2) $A\,[0, 0]$ y $B\,[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$, de donde, basándonos en la fórmula (1) obtenemos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{2}$$

es decir, *la distancia entre dos puntos en el plano (cualquiera que sea la disposición de los mismos) es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas respectivas de estos puntos.*

NOTA. La fórmula (2) da también la longitud del segmento AB.
Es fácil determinar la dirección de este segmento. A partir del triángulo rectangular ΔABC tenemos

$$d_x = d \cos \alpha = x_2 - x_1, \quad d_y = d \operatorname{sen} \alpha = y_2 - y_1 \tag{3}$$

(d_x y d_y son las proyecciones del segmento AB sobre los ejes de las coordenadas Oxy), de donde obtenemos

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{d}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

donde d se define por la fórmula (2).

EJEMPLO. Un vehículo se desplaza por el terreno desde el punto A $(-30, 80)$ hasta el punto B $(50, 20)$ (respecto a un cierto sistema de coordenadas Oxy). Las coordenadas de los puntos están dadas en kilómetros. Hallar el tramo d recorrido por el vehículo, si éste se desplaza en línea recta.

Utilizando la fórmula (2) tenemos

$$d = \sqrt{(50 + 30)^2 + (20 - 80)^2} = \sqrt{6400 + 3600} = 100 \text{ (km)}.$$

§ 4. División del segmento en una relación dada

Supongamos que el segmento AB (fig. 8) que une los puntos $A\ (x_1,\ y_1)$ y $B\ (x_2,\ y_2)$ está dividido por el punto C en dos segmentos AC y CB. La relación entre los segmentos AC y CB es igual a l ($l \geqslant 0$):

$$\frac{AC}{CB} = l. \tag{1}$$

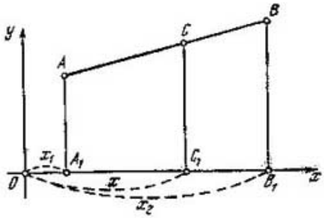

Fig. 8

Se requiere expresar las coordenadas x e y del punto $C\ (x,\ y)$ por medio de las coordenadas de los extremos del segmento AB.

Bajemos respectivamente las perpendiculares AA_1, BB_1 y CC_1 desde los puntos A, B y C al eje Ox. En este caso obtendremos que tres rectas paralelas A_1A, C_1C, B_1B intersecan los lados del ángulo (no representado en la figura) formado por las rectas AB y Ox. Como se sabe de la geometría elemental un haz de rectas paralelas divide los lados de un ángulo en partes proporcionales; por eso

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB},$$

de donde basándose en la igualdad (1) tendremos

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = l. \tag{2}$$

En la fig. 8 se ve que $A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1$, $C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x$. Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (2) obtendremos

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = l. \tag{3}$$

Resolviendo la ecuación (3) respecto a la abscisa incógnita x tendremos

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l};$$

de modo análogo

$$y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}.$$

Así, pues, las coordenadas del punto $C\ (x,\ y)$ que dividen el segmento AB según la relación dada (desde A hacia B) se determinan por las fórmulas

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}. \tag{4}$$

Si el punto C divide el segmento AB en dos partes iguales, $AC = CB$ y, por consiguiente, $l = AC/CB = 1$. Designando las coordenadas del punto medio del segmento AB por $\bar{x}$, $\bar{y}$ de la fórmula (4) obtendremos

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{5}$$

es decir, ***las coordenadas del punto medio** de un segmento son iguales a las semisumas de las coordenadas correspondientes de sus extremos.*

NOTA. Para deducir las fórmulas (4) y (5) hemos supuesto que los extremos A y B del segmento AB están situados en el primer cuadrante y que, por consiguiente, las coordenadas de los puntos A y B son positivas. Se puede fácilmente demostrar que las fórmulas (4) y (5) serán también válidas en el caso cuando uno o los dos extremos del segmento AB están situados en otros cuadrantes y, por consiguiente, una o varias coordenadas de los puntos A y B son negativas.

EJEMPLO. Calcular las coordenadas del punto $C(x, y)$ que divide el segmento AB entre los puntos $A(-5, -3)$ y $B(4, -6)$ en la relación $AC/CB = 3/2$.

En este caso $l = 3/2$ y, por consiguiente,

$$x=\frac{-5+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}}=\frac{2}{5}, \qquad y=\frac{-3+\frac{3}{2}\cdot(-6)}{1+\frac{3}{2}}=-4\frac{4}{5}.$$

§ 5. Area de un triángulo

Supongamos que es necesario hallar el área S del triángulo ABC (fig. 9) cuyos vértices son $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

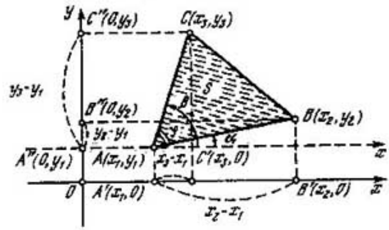

Fig. 9

Supongamos que $AB = c$, $AC = b$ y que los ángulos formados por estos lados y el eje Ox son respectivamente iguales a α y β.

Según el § 3 (véase la nota) tenemos (fig. 9)

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= c_x = c\cos\alpha = x_2 - x_1, \\ A''B'' &= c_y = c\,\text{sen}\,\alpha = y_2 - y_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

y

$$\left.\begin{aligned} A'C' &= b_x = b\cos\beta = x_3 - x_1, \\ A''C'' &= b_y = b\,\mathrm{sen}\,\beta = y_3 - y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Sea $\varphi = \angle CAB$; es evidente (fig. 9) que $\varphi = \beta - \alpha$. Según la conocida fórmula trigonométrica obtenemos

$$S = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,(\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}bc\,(\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha - \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha) = \frac{1}{2}(b_y c_x - b_x c_y), \qquad (3)$$

de donde, en virtud de los sistemas (1) y (2) tenemos

$$S = \frac{1}{2}[(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \qquad (4)$$

Es necesario remarcar que para otra disposición de los vértices la fórmula (4) puede dar un área negativa S del triángulo. Por eso la fórmula que determina el área del triángulo se escribe generalmente en forma siguiente

$$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)], \qquad (4')$$

donde el signo se elige de manera que dicha área sea positiva.

Utilizando la noción de *determinante de segundo orden*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

se puede escribir la fórmula (4′) en una forma más fácil para memorizar

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

La fórmula (4′) se simplifica si el punto $A(x_1, y_1)$ se encuentra en el origen de las coordenadas. Es decir, suponiendo que $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ obtenemos

$$S = \pm\frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2).$$

Si los puntos A, B, C pertenecen a una recta, el área $S = 0$; y a la inversa, si $S = 0$, los vértices A, B y C pertenecen a una recta.

EJEMPLO. Un solar tiene forma de triángulo cuyos vértices son $A(-2, -1)$, $B(3, 5)$ y $C(-1, 4)$ (las dimensiones están indicadas en kilómetros). Calcular el área S de este solar.

Según la fórmula (5) tenemos

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3+2 & -1+2 \\ 5+1 & 4+1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(25 - 6) = 9{,}5 \ (\mathrm{km}^2),$$

o sea $S = 950$ ha.

OBSERVACIÓN. El cálculo de un polígono se reduce a la determinación de áreas triangulares. Para eso es suficiente dividir el polígono en triángulos cuyas áreas se calculan por la fórmula (4).

EJERCICIOS

1. Marcar los puntos: A (2, 3), B (—4, 1), C (2, —3), D (—2, —2), E (—5, 0).

2. Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo equilátero situado en el primer cuadrante, de lado igual a 10, si uno de sus vértices coincide con el origen de las coordenadas O y la base del triángulo está situada en el eje Ox.

3. Determinar las coordenadas del punto M (x, y) simétrico al punto A (1, 2) respecto: a) al eje Ox; b) al eje Oy; c) a las bisectrices de los cuadrantes I y III; a las bisectrices de los cuadrantes II y IV.

4. La recta MN es paralela al eje de las ordenadas y se encuentra a la derecha de éste a una distancia de 5 unidades. Hallar las coordenadas del punto A_1 simétrico al punto A (2, 4) respecto a la recta MN, así como las coordenadas del punto B_1 simétrico al punto B (—1, 3) respecto a la recta MN.

5. Hallar sobre el eje Ox un punto situado a una distancia de 5 unidades del punto A (3, 4).

6. El segmento AB, donde A (2, 5) y B (4, 8) está dividido por el punto C según la relación de 2 : 3. Hallar las coordenadas del punto C.

7. El punto C (2, 3) divide el segmento AB en una relación de 1 : 2. Hallar las coordenadas del punto B, si se sabe que las del punto A son $x = 1$ e $y = 2$.

8. Los vértices de un triángulo son A (—2, 0), B (6, 6) y C (1, —4). Hallar la longitud de la bisectriz trazada a partir del vértice A.

9. En los puntos A (—2, 1) y B (7, 4) están respectivamente situadas las masas $m_1 = 10$ g y $m_2 = 20$ g. Hallar las coordenadas del centro de masas de este sistema.

10. Hallar las coordenadas del centro de masas N de un triángulo ABC con vértices A (—2, 1), B (2, —1), C (4, 3). (El centro de masas del triángulo coincide con el punto de intersección de sus medianas. Como se sabe, este punto divide cada una de las medianas según la relación de 2 : 1 contando a partir del vértice.)

11. El segmento situado entre los puntos A (x_0, y_0) y B (x, y) está dividido en n partes iguales. Determinar las coordenadas x_i e y_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ de los puntos de división.

12. Calcular el área de un triángulo de vértices A (—2, —2), B (—1, 3) y C (3, —1).

13. Demostrar que los puntos A (—7, —3), B (—1, 1) y C (2, 3) pertenecen a una misma recta.

14. El área del triángulo ABC cuyos vértices son A (—2, 1), B (2, 2) y C $(4, y)$ es igual a 15. Determinar la ordenada del vértice C.

15. Un bosque tiene forma de cuadrilátero con vértices A (0 m, 200 m), B (200 m, 100 m), C (500 m, 300 m) y D (100 m, 700 m).
Hallar el área del bosque.

Capítulo II

Ecuación de la línea

§ 1. Conjuntos

Se entiende por *conjunto* $X = \{x, x', x'', \ldots\}$ una colección de algunos *elementos* $x, x', x'', \ldots$. Si x es un elemento del conjunto X, se escribe $x \in X$ (se lee: x pertenece al conjunto X); si y no es un elemento de un conjunto X, se escribe $y \notin X$ (se lee: y no pertenece al conjunto X).

EJEMPLO 1. X es el conjunto de todos los estudiantes en el aula dada.

EJEMPLO 2. $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de números naturales.

Es útil introducir la noción de conjunto vacío $\varnothing$, es decir, de un conjunto que no contiene elementos. Esto nos dispensa en particular de la necesidad de demostrar cada vez la existencia de un solo elemento del conjunto dado.

EJEMPLO 3. El conjunto de hombres con tres cabezas es vacío.

Los conjuntos X y X' se consideran *iguales*: $X = X'$, si están compuestos por los mismos elementos.

DEFINICIÓN 1. *El conjunto Y, compuesto por una parte de elementos del conjunto X o que coincide con éste, se llama* ***subconjunto*** *del conjunto X; en este caso se escribe*

$$Y \subset X. \tag{1}$$

Convenimos en considerar que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Si los conjuntos se representan por medio de «figuras lógicas», a la relación (1) le corresponde la fig. 10.

Utilizando el símbolo $\forall$ que se lee «para todo», se puede mostrar la relación (1) bajo la forma equivalente siguiente:

$$\forall y \in Y \Rightarrow y \in X, \tag{1'}$$

donde la flecha $\Rightarrow$ reemplaza la palabra «implica».

EJEMPLO 4. Sea X el conjunto de todos los estudiantes (varones y mujeres) de primer año y sea Y el conjunto de todas las estudiantes de primer año. Es evidente que $Y \subset X$.

Si $Y \subset X$ y $X \subset Y$, entonces, es evidente que $X = Y$.

DEFINICIÓN 2. *Se llama* ***unión (suma)*** *de dos conjuntos X e Y al conjunto $X \cup Y$ (el signo $\cup$ es el símbolo de unión) compuesto de todos* *los elementos pertenecientes al menos a uno de los conjuntos dados, es decir, pertenecientes a X, a Y, o bien a X e Y simultáneamente* (fig. 11).

Análogamente se determina la *unión* de un número mayor de conjuntos. Por ejemplo, por unión $X \cup Y \cup Z$ de tres conjuntos se

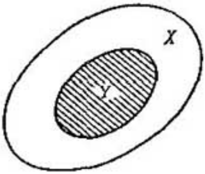

Fig. 10

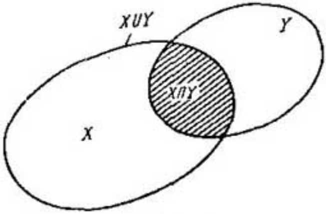

Fig. 11

entiende el conjunto de todos los elementos pertenecientes al menos a uno de tres conjuntos X, Y, Z. Lógicamente, el símbolo de unión de conjuntos corresponde a la conjunción disyuntiva «o».

EJEMPLO 5. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

DEFINICIÓN 3. *Se llama* ***intersección (producto)*** *de dos conjuntos X e Y al conjunto $X \cap Y$ ($\cap$ es el signo de intersección), compuesto de todos los elementos pertenecientes al mismo tiempo a X y a Y (parte común de dos conjuntos)* (fig. 11).

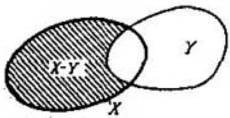

Fig. 12

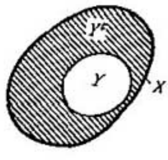

Fig. 13

De este modo, el signo de intersección de conjuntos corresponde lógicamente a la conjunción **copulativa** «y». Si los conjuntos X e Y no poseen elementos comunes, la intersección de ellos es vacía:

$$X \cap Y = \varnothing.$$

Del mismo modo se define la *intersección* de un número mayor de conjuntos. Por ejemplo, por intersección $X \cap Y \cap Z$ de tres conjuntos se entiende el conjunto de todos los elementos pertenecientes al mismo tiempo a los conjuntos X, Y y Z.

EJEMPLO 6. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

DEFINICIÓN 4. *Se llama **diferencia** de conjuntos X e Y (se escribe $X \setminus Y$) al conjunto de los elementos de X que no pertenecen al conjunto Y* (fig. 12).

Si $Y \subset X$, el conjunto $Y^C = X \setminus Y$ se llama *complemento* del conjunto Y hasta el conjunto X (fig. 13).

Es evidente que $Y \cup Y^C = X$, $Y \cap Y^C = \varnothing$.

EJEMPLO 7. $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$.

§ 2. El método de coordenadas en el plano

En el capítulo I hemos visto cómo, utilizando las coordenadas rectangulares, los problemas geométricos se pueden resolver de modo puramente algebraico.

La parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras geométricas con ayuda del álgebra se llama *geometría analítica* y la aplicación, para estos fines de las coordenadas, se llama *método de coordenadas.*

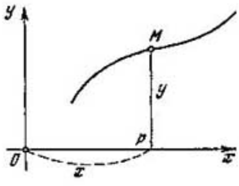

Fig. 14

Antes hemos utilizado el método de coordenadas para resolver una serie de problemas importantes, pero particulares. Pasamos ahora a la exposición sistemática del método utilizado en la geometría analítica para resolver el **problema general** que consiste en estudiar, por medio del análisis matemático, la forma, disposición y las propiedades de una línea dada.

Supongamos que tenemos una línea en el plano (fig. 14). Las coordenadas x e y de un punto perteneciente a esta línea no pueden ser arbitrarias; éstas deben ser sometidas a ciertas limitaciones condicionadas por las propiedades geométricas de la línea dada. La circunstancia de que los números x e y representan las coordenadas de un punto perteneciente a dicha línea se escribe analíticamente en forma de una ecuación, denominada *ecuación de la línea en el plano.*

La esencia del método de coordenadas consiste en que a cada línea le corresponde su ecuación[1]) y luego las propiedades de esta línea se estudian por medio de un análisis teórico de la ecuación correspondiente.

§ 3. La línea considerada como un conjunto de puntos

Una línea en el plano se define generalmente como *un conjunto de puntos* que poseen ciertas propiedades geométricas propias solamente a ellos.

[1]) Más exactamente, una clase de ecuaciones equivalentes.

EJEMPLO 1. La circunferencia de radio R (fig. 15) es el conjunto de todos los puntos del plano situados a la distancia R del punto O **(centro de la circunferencia).**

En otras palabras, sólo pertenecen a la circunferencia los puntos, cuya distancia hasta el centro de la circunferencia es igual a su radio.

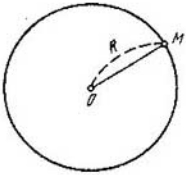

Fig. 15

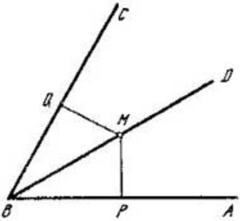

Fig. 16

EJEMPLO 2. La bisectriz del ángulo ABC (fig. 16) es el conjunto de todos los puntos situados dentro del ángulo y equidistantes de sus lados.

Esto confirma que: 1) para cada punto M de la bisectriz BD las longitudes de las perpendiculares MP y MQ bajadas respectivamente sobre los lados BA y BC del ángulo son iguales: $MP = MQ$; 2) cada punto interior del ángulo ABC, que no pertenece a su bisectriz, se encuentra más cerca de uno de los lados del ángulo que del otro.

§ 4. Ecuaciones de la línea en el plano

Formulemos ahora una definición más precisa de la ecuación de una línea en el plano[1]).

DEFINICIÓN. *Llámase* ***ecuación de una línea (ecuación de una curva)*** *perteneciente al plano Oxy a aquella a la cual satisfacen las coordenadas x e y de cada punto de la línea dada y no es satisfecha por las coordenadas de cualquier punto no situado sobre esta línea.*

De este modo para constatar que una ecuación dada es la ecuación de una cierta línea K, es necesario y suficiente: 1) demostrar que las coordenadas de cualquier punto perteneciente a la línea K satisfacen esta ecuación; 2) demostrar, recíprocamente, que si las coordenadas de cierto punto satisfacen esta ecuación, el punto obligatoriamente pertenece a la línea K.

---

[1]) En este libro por *curva* se entiende toda linea, independientemente de que sea recta o no.

De aquí automáticamente se deduce que: 1') si las coordenadas de cualquier punto no satisfacen la ecuación dada, el punto no pertenece a la línea K; 2') si el punto no pertenece a la línea K, sus coordenadas x e y no satisfacen la ecuación dada.

Si un punto $M(x, y)$ se desplaza por la línea K, sus coordenadas x e y, variando, satisfacen en todo momento la ecuación de esta curva. Por eso las coordenadas del punto $M(x, y)$ se llaman *coordenadas corrientes* del punto M de la línea K.

Las coordenadas corrientes del punto M de la curva dada K sobre el plano Oxy se designan generalmente con x e y, la primera de ellas es la abscisa del punto M y la segunda, su ordenada. Sin embargo, si resultase conveniente, las coordenadas corrientes del punto M pueden ser designadas con cualesquiera letras, por ejemplo, $M(X, Y)$ o $M(\xi, \eta)$, etc. Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$y = 2x \quad \text{e} \quad Y = 2X,$$

donde los puntos $N(x, y)$ y $N(X, Y)$ pertenecen al plano Oxy y son las ecuaciones de una misma recta de este plano.

La ecuación de la línea, noción fundamental de la geometría analítica, se explica mediante una serie de ejemplos.

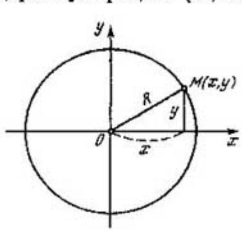

Fig. 17

EJEMPLO 1. Escribir la ecuación de una circunferencia, cuyo radio es igual a R, con centro en el origen de las coordenadas.

Sobre la circunferencia (fig. 17) tomamos un punto arbitrario $M(x, y)$ y lo unimos con el centro O. Según la definición de circunferencia, tenemos $OM = R$, es decir, $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, de donde

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{1}$$

La ecuación (1) vincula entre sí las coordenadas x e y de cada punto de la circunferencia dada. Y a la inversa, si las coordenadas del punto $M(x, y)$ satisfacen la ecuación (1) es evidente que $OM = R$ y, por consiguiente, el punto pertenece a nuestra circunferencia. De este modo, la ecuación (1) es una circunferencia de radio R con centro en el origen de las coordenadas.

EJEMPLO 2. Escribir las ecuaciones de bisectrices de ángulos de los cuadrantes de las coordenadas.

Examinemos primero la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III del sistema de coordenadas (fig. 18, *a*). Tomamos sobre esta bisectriz un punto arbitrario $M(x, y)$. Si el punto M está situado en el primer cuadrante, su abscisa y su ordenada serán positivas e iguales entre sí (de acuerdo con la propiedad de bisectriz). Si el punto $M(x, y)$ se halla en el III cuadrante, su abscisa y su ordenada serán negativas e iguales en valor absoluto; por eso las coordenadas x e y de este punto serán también iguales. Por consiguiente, en ambos casos tenemos

$$x = y. \tag{2}$$

Recíprocamente, si las coordenadas x e y de un punto cualquiera $M(x, y)$ satisfacen la ecuación (2), este punto evidentemente pertenece a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III. Por eso la ecuación (2) corresponde a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III.

Examinemos ahora la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes II y IV (fig. 18, *b*). Tomemos sobre ésta un punto cualquiera N (x, y). Este punto puede estar situado en el II o en el IV cuadrante, pero sus coordenadas x e y son iguales en valor absoluto y de signos contrarios. Por consiguiente, en ambos casos tenemos

$$y = -x. \tag{3}$$

Y a la inversa, si un punto cualquiera N (x, y) satisface la ecuación (3), este punto evidentemente pertenece a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes II y IV. De este modo, la ecuación (3) es la ecuación de la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes II y IV.

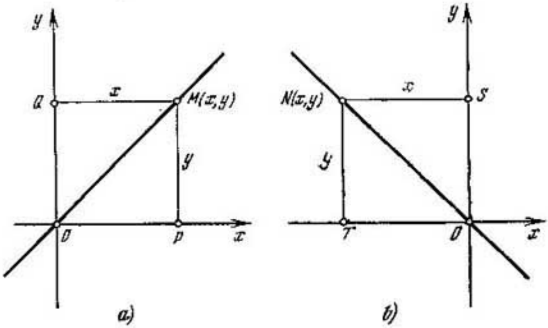

Fig. 18

EJEMPLO 3. Escribir la ecuación de una recta paralela al eje de ordenadas.

Sean la recta $AB \parallel Oy$ y el segmento $OA = a$ (fig. 19, *a*). En este caso, para todo punto M (x, y) de la recta AB la abscisa es

$$x = a. \tag{4}$$

Recíprocamente, si la abscisa de un punto M (x, y) es igual a a, este punto pertenece a la recta AB.

De este modo, la ecuación (4) es la ecuación de una recta paralela al eje Oy y que se encuentra de éste a una distancia igual al valor numérico de a; este valor es positivo, si la recta está situada a la derecha del eje Oy, y negativo si la recta se dispone a la izquierda del eje Oy.

En particular, cuando $a = 0$ obtenemos la ecuación del eje de las ordenadas: $x = 0$.

EJEMPLO 4. Formular la ecuación de la recta paralela al eje de las abscisas.

De modo totalmente análogo, si la recta $CD \parallel Ox$ y $OC = b$ (fig. 19, *b*), su ecuación será

$$y = b;$$

además, si la recta CD está encima del eje Ox, entonces b es positiva; si la recta CD se encuentra debajo del eje Ox, entonces b es negativa.

En particular, cuando $b = 0$, obtenemos la ecuación del eje de las abscisas: $y = 0$.

EJEMPLO 5. Hallar la línea cuya distancia al punto B (12, 16) es dos veces mayor que la distancia al punto A (3, 4).

Si M (x, y) es un punto arbitrario de la línea incógnita, entonces según los datos del problema, tenemos

$$2\,AM = BM. \tag{5}$$

Para formular la ecuación de esta línea se deben expresar AM y BM por medio de las coordenadas x e y del punto M. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos (§ 3 del cap. I) tenemos

$$AM = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}, \quad BM = \sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2}$$

de donde según la ecuación (5)

$$2\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2}.$$

Esta es la ecuación de la línea incógnita.

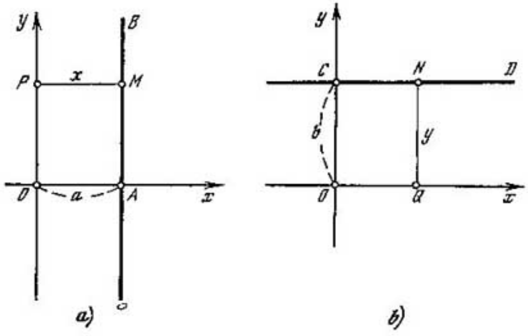

Fig. 19

Pero una ecuación así no permite juzgar fácilmente acerca de la naturaleza de la línea, por eso es necesario simplificarla. Después de elevar al cuadrado los dos miembros y eliminar los paréntesis obtenemos

$$4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 - 32y + 64 = x^2 - 24x + 144 + y^2 - 32y + 256.$$

Después de algunas transformaciones sencillas obtenemos la ecuación equivalente

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Comparando la ecuación obtenida con la (1) vemos que la línea incógnita es una circunferencia de radio 10, con centro en el origen de las coordenadas.

§ 5. Trazado de una línea a partir de su ecuación

Si las variables x e y están unidas por una ecuación, el conjunto de puntos M (x, y), cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación, representa, en general, una línea en el plano (*«imagen geométrica de la ecuación»*).

En casos particulares esta línea puede degenerar en uno o en varios puntos. También son posibles casos cuando a la ecuación no le corresponde un conjunto de puntos cualesquiera.

Por ejemplo, a la ecuación

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

le corresponde un solo punto (1, 2), porque a esta ecuación satisface un solo par de valores: $x=1$ e $y=2$.

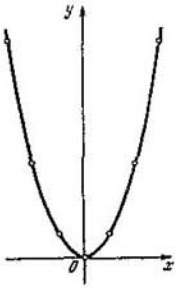

Fig. 20

A la ecuación

$$x^2+y^2=-1$$

no le corresponde ningún conjunto de puntos porque a esta ecuación no puede satisfacer ningún valor real de x e y.

Conociendo la ecuación de la línea ésta se puede construir punto por punto.

EJEMPLO. Trazar la línea expresada por la ecuación

$$y=x^2 \qquad (1)$$

(generalmente se dice más brevemente: trazar la línea $y=x^2$).

Dando en la ecuación (1) valores numéricos a la abscisa x y calculando los valores numéricos correspondientes de la ordenada y se obtiene la tabla siguiente:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Después de marcar en el plano los puntos correspondientes, se ve que ellos determinan el trazado de cierta línea; el contorno de esta línea se aprecia con mayor claridad, si el número de puntos crece. Uniendo estos puntos con una línea, cuyo carácter tiene en cuenta la posición de los puntos intermedios[1]), obtendremos la línea determinada por la ecuación (1) (fig. 20). Esta línea se llama *parábola*.

§ 6. Algunos problemas elementales

El conocimiento de la ecuación de una línea permite resolver fácilmente problemas sencillos relacionados con la posición de esta línea en el plano.

---

[1]) Para poder juzgar sobre la posición de los puntos intermedios de la línea tenemos que estudiar previamente las propiedades generales de la ecuación de la misma (véase el cap. XI más detalladamente).

PROBLEMA 1. Sean dadas la ecuación de una línea K y las coordenadas de un punto M (a, b). Determinar, si el punto M pertenece a la línea K.

En otras palabras, es preciso determinar si pasa o no la línea K por el punto M.

Partiendo de la noción de ecuación de la línea obtenemos la siguiente **regla**: *para determinar, si el punto M pertenece a la línea K es necesario reemplazar con las coordenadas del punto las variables de esta ecuación. Si en este caso se cumple la ecuación* (es decir, como resultado del reemplazo se obtiene una igualdad), *el punto pertenece a la línea; en caso contrario, si las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación de la línea, este punto no pertenece a ella.*

En un caso particular, la línea pasa por el origen de las coordenadas si, y solo si, la ecuación de la línea se cumple para $x = 0$ e $y = 0$.

EJEMPLO 1. Sea dada la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25. \tag{1}$$

Determinar, si los puntos M $(-3, 4)$ y N $(4, -2)$ pertenecen a esta circunferencia.

Introduciendo las coordenadas del punto M en la ecuación (1) obtenemos la identidad

$$(-3)^2 + 4^2 = 25.$$

Por consiguiente, el punto M pertenece a esta circunferencia.

De modo análogo, reemplazando las coordenadas del punto N en la ecuación (1), tendremos

$$4^2 + (-2)^2 \neq 25.$$

De este modo, el punto N no pertenece a esta circunferencia.

PROBLEMA 2. Hallar el punto de intersección de dos líneas dadas por sus ecuaciones.

El punto de intersección pertenece al mismo tiempo a ambas líneas. Por consiguiente, las coordenadas de este punto satisfacen las ecuaciones de ambas líneas. De aquí obtenemos la siguiente **regla**: *para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos líneas es suficiente resolver el sistema formado por sus ecuaciones.* Si este sistema no tiene soluciones reales, las líneas no se intersecan.

EJEMPLO 2. Hallar los puntos de intersección de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 4$.

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2, \\ y &= 4, \end{aligned}\right\}$$

obtenemos dos puntos de intersección A $(-2, 4)$ y B $(2, 4)$.

PROBLEMA 3. Hallar los puntos de intersección de una línea dada con los ejes de coordenadas.

Este problema es un caso particular del problema 2.

Teniendo en cuenta que la ecuación del eje Ox es $y = 0$ obtenemos la **regla**: *para hallar las abscisas de los puntos de intersección de la línea dada con el eje Ox es necesario tomar $y = 0$ en la ecuación de esta línea y resolver la ecuación obtenida respecto a x.*

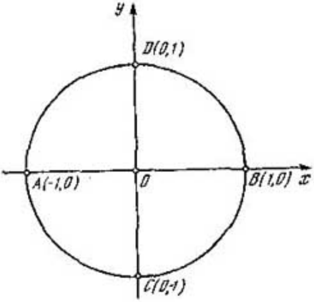

Fig. 21

Del mismo modo, la ecuación del eje Oy es $x = 0$, de donde obtenemos la **regla**: *para hallar las ordenadas de los puntos de intersección de la línea dada con el eje Oy se debe tomar $x = 0$ en la ecuación de esta línea y resolver la ecuación obtenida respecto a y.*

EJEMPLO 3. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (2)$$

con los ejes de las coordenadas.

Considerando que en la ecuación (2) $y = 0$, obtenemos $x^2 = 1$, se decir $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. De aquí hallamos los dos puntos de intersección de esta circunferencia con el eje Ox (fig. 21): A $(-1, 0)$ y B $(1, 0)$.

Del mismo modo, considerando que en la ecuación (2) $x = 0$ obtenemos $y^2 = 1$, es decir, $y_1 = -1$ e $y_2 = 1$. Por consiguiente, hay dos puntos de intersección de esta circunferencia con el eje Oy (fig. 21): C $(0, -1)$ y D $(0, 1)$.

§ 7. Dos problemas fundamentales de la geometría analítica en el plano

Resumiendo el contenido de este capítulo, se puede decir que a cada línea en el plano le corresponde cierta ecuación entre las coordenadas corrientes (x, y) de un punto de esta línea. Y viceversa, a cada ecuación con x e y, donde x e y son las coordenadas de un punto en el plano, le corresponde en general cierta línea cuyas propiedades son enteramente determinadas por esta ecuación.

Como resultado surgen, naturalmente, dos problemas fundamentales de la geometría analítica en el plano.

1) *Dada una línea, considerada como un conjunto de puntos, escribir la ecuación de esta línea.*

2) *Sea dada la ecuación de una línea. Con ayuda de esta ecuación estudiar las propiedades geométricas (la forma y disposición) de esta línea.*

§ 8. Líneas algebraicas

DEFINICIÓN. *Llámase* **línea (o curva) de grado n** ($n = 1, 2, \ldots$) *a la determinada por una ecuación de grado n respecto a las coordenadas rectangulares corrientes.*

Tales líneas se llaman algebraicas. Por ejemplo, las líneas

$$x + y - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

son respectivamente curvas de primero, segundo y tercer grado.

La forma general de una curva de primer grado es

$$Ax + By + C = 0,$$

donde los coeficientes A y B no son simultáneamente iguales a cero, es decir, $A^2 + B^2 \neq 0$. Como se demostrará más adelante (véase el cap. III) todas las curvas de primer grado son líneas rectas.

La forma general de una curva de segundo grado es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde los coeficientes A, B y C no son simultáneamente iguales a cero, es decir, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Observemos que no a toda ecuación de segundo orden le corresponde una curva real en el plano. Por ejemplo, a la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$ no le corresponde ninguna curva sobre el plano Oxy, porque es evidente que no existen números reales x e y que satisfagan esta ecuación.

En los capítulos siguientes estudiaremos detalladamente la curva de primer grado (línea recta) y examinaremos las principales curvas de segundo grado (circunferencia, elipse, hipérbola, parábola).

La ecuación de una curva de grado n puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\sum_{\substack{p,\, q=0 \\ p+q\leqslant n}}^{n} a_{pq} x^p y^q = 0, \tag{1}$$

donde por lo menos uno de los coeficientes dominantes a_{pq}, es decir, tales que $p + q = n$, se diferencia de cero ($\sum$ es el signo de la suma).

Señalemos una propiedad importante: **el grado de la curva (1) no depende de la elección del sistema de coordenadas rectangulares.**

Efectivamente, eligiendo otro sistema de coordenadas rectangulares $O'x'y'$ a partir de las fórmulas de transformación (§ 2) tenemos

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1, \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$) son coeficientes constantes.

De aquí resulta que la ecuación de la curva (1) en las nuevas coordenadas $O'x'y'$ tiene la forma

$$\sum_{\substack{p',\, q'=0 \\ p'+q'\leqslant n'}}^{n'} a'_{p'q'} x'_{p'} y'_{q'} = 0, \tag{3}$$

donde n' es el grado de la curva transformada. Es evidente que $n' \leqslant n$.

De modo análogo, partiendo de la ecuación (3) y efectuando el paso inverso de las coordenadas x', y' a las coordenadas x, y, obtendremos la ecuación (1) en la cual $n \leqslant n'$. Por consiguiente, $n' = n$.

EJERCICIOS

1. Escribir la ecuación de la línea, con la distancia de sus puntos hasta el eje Ox dos veces mayor que hasta el eje Oy.

2. Escribir la ecuación de la línea, cuyos puntos son equidistantes de los puntos dados: $A\ (2, 1)$ y $B\ (-3, 0)$.

3. ¿Cuál es la curva que describe el centro de gravedad del triángulo ABC cuyos vértices $A\ (6, 0)$ y $B\ (-6, 0)$ son fijos, si el tercer $C\ (x_3, y_3)$ describe la circunferencia $x_3^2 + y_3^2 = 36$?

4. ¿Qué imágenes geométricas corresponden a las ecuaciones: a) $xy = 0$; b) $x^2 + y^2 = 0$; c) $x^2 - 1 = 0$; d) $y^2 - 3y + 2 = 0$; e) $x^2 - xy = 0$?

5. Construir por sus puntos las curvas dadas por las ecuaciones: a) $y = 2 - x$; b) $y = 2x - x^2$; c) $y = \pm \sqrt{100 - x^2}$; d) $y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{100 - x^2}$.

6. Indicar cuáles puntos de $A\ (0, 0)$, $B\ (1, 1)$, $C\ (1, -1)$, $D\ (-1, -1)$, $E\ (1, 2)$ pertenecen a la curva $y = x^2$ y cuáles no.

7. Hallar los puntos de intersección de la curva $y = 2 + x - x^2$ con los ejes de las coordenadas.

8. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ con la recta $x - y = 0$.

Capítulo III

La línea recta

§ 1. Ecuación de la recta

Sea PQ cierta recta perteneciente al plano Oxy (fig. 22). Tracemos por un punto arbitrario M_0 (x_0, y_0) de esta recta (llamado condicionalmente «punto de partida») una línea recta M_0x' paralela al eje Ox y orientada en el mismo sentido que este eje. En este caso el ángulo menor no negativo $\varphi = \angle QM_0x'$ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, formado

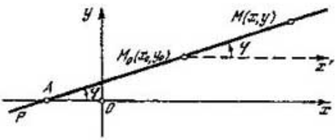

Fig. 22

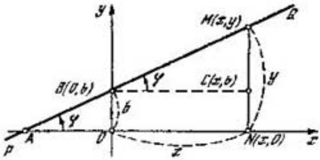

Fig. 23

por la semirrecta M_0Q situada encima del eje M_0x' o en este eje, y el eje M_0x', se llama *ángulo* entre la recta dada y el eje Ox. Es evidente que este ángulo no depende de la selección del punto M_0. Si la recta PQ corta el eje Ox en cierto punto A $(a, 0)$, φ es el ángulo ordinario entre las dos rectas orientadas. Si $PQ \parallel Ox$, es evidente que $\varphi = 0$. El punto de partida M_0 de la recta y el ángulo φ («dirección de la recta») determinan simplemente la posición de esta recta sobre el plano.

1) Sea primeramente $0 \leqslant \varphi < \pi/2$. En este caso la recta PQ corta el eje Oy en un punto B $(0, b)$, que puede ser considerado como el punto de partida.

Sea $y = NM$ la ordenada del punto corriente M (x, y) de la recta (fig. 23) que se compone de dos partes:

$$y = NC + CM, \tag{1}$$

la primera de las cuales es constante y la segunda, variable. Al introducir el coeficiente angular $\operatorname{tg} \varphi = k$, de la fig. 23 se tiene, para $x \geqslant 0$,

$$NC = b \quad \text{y} \quad CM = BC \operatorname{tg} \varphi = kx. \tag{2}$$

De este modo, para $x \geqslant 0$,

$$y = b + kx. \tag{3}$$

No es difícil de demostrar que la fórmula (3) es también válida para $x < 0$.

Acabamos de demostrar que las coordenadas de cualquier punto $M(x, y)$ de la recta PQ satisfacen la ecuación (3). Es fácil convencernos de lo opuesto: si las coordenadas de un punto cualquiera $M_1(x_1, y_1)$ satisfacen la ecuación (3), el punto M_1 pertenece **necesariamente** a la recta PQ. Por consiguiente, la ecuación (3) es la de la recta PQ (llamada *ecuación de la recta con coeficiente angular*). Las magnitudes constantes b y k (*parámetros*) tienen las significaciones siguientes: $b = OB$ es el *segmento inicial* (más exactamente, la *ordenada al origen*) y $k = \operatorname{tg} \varphi$ es el *coeficiente angular*. Remarquemos que si el punto B está situado encima del eje Ox, $b > 0$ y si B se encuentra debajo del eje Ox, $b < 0$. Cuando $b = 0$, la recta pasa por el origen de las coordenadas y su ecuación es

$$y = kx. \tag{4}$$

Cuando $k = 0$ obtenemos la ecuación de una recta paralela al eje Ox:

$$y = b.$$

2) Si $\pi/2 < \varphi < \pi$, mediante razonamientos análogos llegamos también a la ecuación (3).

3) Si $\varphi = \pi/2$, es decir, la recta AB es perpendicular al eje Ox, su ecuación es (véase el cap. II)

$$x = a, \tag{5}$$

donde a es la abscisa **de la traza** de esta recta sobre el eje Ox (es decir, la abscisa del punto donde ella corta el eje Ox).

OBSERVACIÓN. Como casos particulares obtenemos las ecuaciones de los ejes de las coordenadas:

$$y = 0 \text{ (eje } Ox) \quad \text{y} \quad x = 0 \text{ (eje } Oy). \tag{6}$$

Es fácil construir una recta según su ecuación.

EJEMPLO. Construir la recta dada por la ecuación

$$y = \frac{3}{2}x - 4.$$

Se sabe que dos puntos determinan por completo la posición de una recta: por eso es suficiente con hallar dos puntos por los cuales pasa la recta. En esta ecuación $b = -4$. Por consiguiente, la recta pasa por el punto $B(0, -4)$. Por otro lado, las coordenadas x e y de cualquier punto perteneciente a nuestra recta están relacionadas con la ecuación dada. Por eso, al conocer la abscisa de un punto de la recta, por medio de la ecuación de ésta hallaremos la ordenada de este punto. Supongamos, por ejemplo, que $x = 2$; mediante la ecuación de la recta obtenemos $y = -1$. De este modo, nuestra recta pasa por los puntos A (2, —1) y B (0, —4). Al construir estos puntos por sus coordenadas y trazar por ellos una recta (fig. 24) obtendremos la recta buscada.

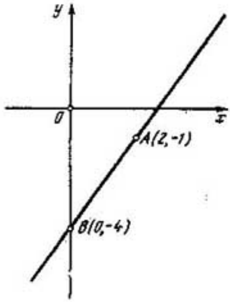

Fig. 24

De lo explicado se deduce que para una recta arbitraria en el plano se puede componer su ecuación; a la inversa, conociendo la ecuación de una recta, se puede construirla. De este modo, la ecuación de una recta caracteriza completamente su posición sobre el plano.

De las fórmulas (3) y (5) se deduce que la ecuación de una recta es de **primer grado** respecto a las coordenadas corrientes x e y. Es también justa la afirmación recíproca.

TEOREMA. *Toda ecuación no degenerada de primer grado*

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \tag{7}$$

es la ecuación de una línea recta perteneciente al plano Oxy (ecuación general de la recta).

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea primeramente $B \neq 0$. En este caso la ecuación (7) puede ser escrita así:

$$y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B}. \tag{8}$$

Comparándola con la (3) obtenemos que ésta es la ecuación de la recta con coeficiente angular $k = -A/B$ y la ordenada al origen $b = -C/B$.

2) Sea ahora $B = 0$; en este caso $A \neq 0$. Tenemos, $Ax + C = 0$ y

$$x = -C/A. \tag{9}$$

La ecuación (9) es la de una recta paralela al eje Oy que corta un segmento $a = -C/A$ en el eje Ox.

Todos los casos posibles están agotados, el teorema queda demostrado.

§ 2. Ángulo entre dos rectas

Examinemos dos rectas (no paralelas al eje Oy) representadas por sus ecuaciones con coeficientes angulares (fig. 25):

$$y = kx + b, \quad \text{donde } k = \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

e

$$y = k'x + b', \quad \text{donde } k' = \operatorname{tg}\varphi' \tag{2}$$

Se requiere determinar el ángulo θ entre ellas. Más exactamente entendremos por θ el ángulo más pequeño obtenido como resultado de una rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj de la segunda recta, respecto a la primera ($0 \leqslant \theta < \pi$). Este ángulo θ (fig. 25) es igual al ángulo ACB del triángulo ABC. Como se sabe de la geometría elemental, el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes. Por eso

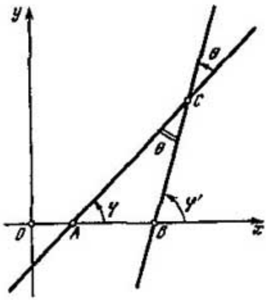

Fig. 25

$$\varphi' = \varphi + \theta \quad \text{o} \quad \theta = \varphi' - \varphi;$$

de aquí, aplicando una conocida fórmula trigonométrica, obtenemos

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi'}.$$

Sustituyendo $\operatorname{tg} \varphi$ y $\operatorname{tg} \varphi'$ respectivamente por k y k' tendremos definitivamente

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k' - k}{1 + kk'}. \tag{3}$$

La fórmula (3) da la expresión de la tangente del ángulo entre dos rectas por los coeficientes angulares de estas rectas.

Ahora deduzcamos las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas.

Si las rectas (1) y (2) son paralelas, entonces $\varphi' = \varphi$ y, por consiguiente,

$$k' = k. \tag{4}$$

Recíprocamente, si se cumple la condición (4), teniendo en cuenta que φ' y φ se encuentran dentro de los límites de 0 a π tenemos

$$\varphi' = \varphi, \tag{5}$$

y, por consiguiente, las rectas examinadas son paralelas o se juntan (paralelismo en sentido amplio).

REGLA 1. *Las rectas sobre el plano son paralelas (en sentido amplio), si, y sólo si, sus coeficientes angulares son iguales entre sí.*

Si dos rectas son perpendiculares, $\theta = \pi/2$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1 + kk'}{k' - k} = 0;$$

de aquí $1 + kk' = 0$ y

$$k' = -1/k. \tag{6}$$

Es también justa la afirmación recíproca.

REGLA 2. *Dos rectas en el plano son perpendiculares si, y sólo si, sus coeficientes angulares son inversos y de signos contrarios*[1]).

Sean dadas ahora las ecuaciones de las rectas en forma general:

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

y

$$A'x + B'y + C' = 0. \tag{8}$$

Suponiendo que $B \neq 0$ y $B' \neq 0$ obtenemos

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{7'}$$

e

$$y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}. \tag{8'}$$

Por consiguiente, los coeficientes angulares de estas rectas son:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad k' = -\frac{A'}{B'}. \tag{9}$$

Con ayuda de la fórmula (3) realizando cálculos sencillos, hallamos la tangente del ángulo formado por estas rectas:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'}. \tag{10}$$

De aquí obtenemos: 1) la **condición de paralelismo** de dos rectas ($\theta = 0$)

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \tag{11}$$

y 2) la **condición de perpendicularidad** de dos rectas ($\theta = \pi/2$)

$$AA' + BB' = 0. \tag{12}$$

Destaquemos, en particular, que las rectas

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad Bx - Ay + C_1 = 0$$

son mutuamente perpendiculares.

EJEMPLO. Determinar el ángulo formado por las rectas $y = x$ e $y = 1{,}001\,x + 10$.

Aquí los coeficientes angulares de las rectas son: $k = 1$ y $k' = 1{,}001$. Mediante la fórmula (3) obtenemos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1{,}001 - 1}{1 + 1\cdot 1{,}001} = \frac{0{,}001}{2{,}001} \approx 0{,}0005 = \frac{1}{2000}.$$

---

[1]) Para las rectas paralelas a los ejes Ox y Oy se supone que $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$.

Puesto que para los ángulos θ pequeños es válida la igualdad aproximada $\theta \approx \operatorname{tg} \theta$, entonces

$$\theta \approx \frac{1}{2000} \text{ rad} \approx \frac{1}{2000} \cdot 57°18' = \frac{3438'}{2000} \approx 1{,}7'.$$

§ 3. Ecuación de la recta que pasa por un punto conocido en una dirección dada

Sea que la recta PM forma un ángulo φ con la dirección positiva del eje Ox (fig. 26) y pasa por el punto dado $P(x_1, y_1)$. Deduzcamos la ecuación de esta recta, suponiendo primero que no es paralela al eje Oy.

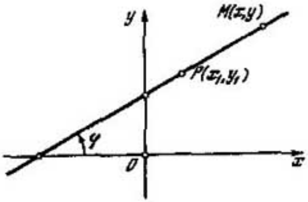

Fig. 26

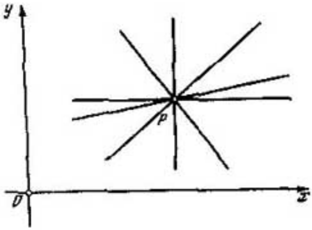

Fig. 27

En este caso, como sabemos, la ecuación de la recta se escribe así:

$$y = kx + b, \tag{1}$$

donde: $k = \operatorname{tg} \varphi$ es el coeficiente angular de la recta; b, la longitud del segmento cortado por nuestra recta sobre el eje Oy. Como el punto $P(x_1, y_1)$ pertenece a la recta PM, sus coordenadas x_1 e y_1 satisfacen la ecuación (1), es decir,

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{2}$$

Sustrayendo la igualdad (2) de la (1), obtendremos

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3}$$

Ésta es precisamente la ecuación de la recta incógnita.

Si la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ es paralela al eje Oy, su ecuación será, evidentemente

$$x = x_1. \tag{4}$$

Si k es un número dado, la ecuación (3) representa una recta bien determinada. Si k es un parámetro variable, esta ecuación determina un *haz de rectas* que pasan por el punto $P(x_1, y_1)$ (fig. 27). En este caso k se llama *parámetro del haz*.

EJEMPLO 1. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3, 2) y es paralela a la recta:

$$y=\frac{4}{3}x-7.$$

Puesto que la recta incógnita es paralela a la recta dada, su coeficiente angular $k = 4/3$. Por consiguiente, según la fórmula (3) la ecuación de está recta se escribe así

$$y-2=\frac{4}{3}(x-3)$$

o

$$y=\frac{4}{3}x-2.$$

EJEMPLO 2. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto P (4, 5) y es perpendicular a la recta:

$$y=-\frac{2}{3}x+7.$$

Puesto que la recta incógnita es perpendicular a la recta con coeficiente angular $k = -2/3$, entonces su coeficiente angular es $k' = -1/k = 3/2$. Por consiguiente, según la fórmula (3), la ecuación de esta recta es:

$$y-5=\frac{3}{2}(x-4)$$

o, en definitiva,

$$y=\frac{3}{2}x-1.$$

§ 4. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados

Sa sabe que por dos puntos que no coinciden se puede trazar solamente una recta. Determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2).

Supongamos primero que $x_1 \neq x_2$, es decir, la recta PQ no es paralela al eje Oy. Puesto que la recta PQ pasa por el punto P (x_1, y_1), su ecuación tiene la forma (véase el § 3)

$$y - y_1 = k\,(x - x_1), \tag{1}$$

donde k es el coeficiente angular desconocido de esta recta. Sin embargo, se sabe que nuestra recta pasa también por el punto Q (x_2, y_2), por eso las coordenadas x_2 e y_2 de este punto deben satisfacer la ecuación (1). De aquí,

$$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$$

y, por consiguiente, para $x_2 \neq x_1$ tenemos

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2}$$

Sustituyendo la expresión (2) del coeficiente angular k en la ecuación (1) obtenemos la ecuación de la recta PQ:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{3}$$

Esta ecuación para $y_1 \neq y_2$ puede ser también escrita en forma de proporción

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{3'}$$

Si $x_1=x_2$, es decir, la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es paralela al eje Oy, la ecuación de esta recta será evidentemente

$$x=x_1.$$

EJEMPLO. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(4, -2)$ y $Q(3, -1)$.

Según la ecuación (3) tenemos

$$\frac{x-4}{3-4}=\frac{y+2}{-1+2}, \quad \text{o bien} \quad y=-x+2.$$

§ 5. Ecuación de la recta en «segmentos»

Deduzcamos la ecuación de la recta cuya posición en el plano está definida por los segmentos no nulos que ella corta al intersecar los ejes de las coordenadas. Supongamos, por ejemplo, que la recta AB corta sobre el eje Ox el segmento $OA=a$ y sobre el eje Oy, el segmento $OB=b$ (fig. 28). Con todo eso está claro que la posición de la recta está enteramente determinada.

Para deducir la ecuación de la recta AB notemos que ella pasa por los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$; por eso su ecuación se deduce fácilmente de la ecuación (3′) (véase el § 4), si consideramos que $x_1=a$, $y_1=0$ y $x_2=0$, $y_2=b$. Tenemos

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

de donde

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1,$$

y, finalmente,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1}$$

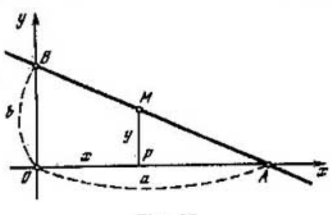

Fig. 28

La ecuación obtenida es precisamente la *ecuación de la recta en «segmentos»*. Aquí x e y son habitualmente las coordenadas de un punto arbitrario $M(x, y)$ situado sobre la recta AB (fig. 28).

EJEMPLO. Escribir las ecuaciones de la recta AB que corta el segmento $OA = 5$ sobre el eje Ox y el segmento $OB = -4$ sobre el eje Oy.

Suponiendo que en la ecuación (1) $a = 5$ y $b = -4$ obtendremos

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}=1, \quad \text{o bien} \quad \frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1.$$

OBSERVACIÓN. La ecuación de una recta que pasa por el origen de las coordenadas o que es paralela a uno de los ejes, no puede ser escrita como la ecuación de una recta en «segmentos».

§ 6. Punto de intersección de dos rectas

Sean dadas dos rectas

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

y

$$A'x + B'y + C' = 0. \tag{2}$$

El punto de intersección de estas rectas pertenece tanto a la primera como a la segunda. Por eso las coordenadas del punto de intersección deben satisfacer tanto la ecuación de la primera recta como la de la segunda. Por consiguiente, *para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas es suficiente resolver el sistema formado por las ecuaciones de estas rectas.*

Eliminando sucesivamente las incógnitas x e y de las ecuaciones (1) y (2) tendremos

$$(AB' - A'B)\,x + (CB' - C'B) = 0 \tag{3}$$

y

$$(AB' - A'B)\,y + (AC' - A'C) = 0. \tag{4}$$

De aquí, si $AB' - A'B \neq 0$, obtenemos para las coordenadas del punto de intersección de las rectas, las expresiones siguientes:

$$x = -\frac{CB' - C'B}{AB' - A'B}, \quad y = -\frac{AC' - A'C}{AB' - A'B}, \tag{5}$$

o, introduciendo los determinantes de segundo orden (véase el § 5 del cap. I), tenemos

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Para las rectas (1) y (2) son posibles los tres casos siguientes.

1) $AB' - A'B \neq 0$, es decir,

$$\frac{A'}{A} \neq \frac{B'}{B}.$$

Según el § 2 las rectas no son paralelas. Las coordenadas de su único punto de intersección se determinan mediante las fórmulas (6).

2) $AB' - A'B = 0$, $CB' - C'B \neq 0$ o $AC' - A'C \neq 0$, es decir,

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \neq \frac{C'}{C}.$$

Las rectas son paralelas (véase el § 2) y no hay punto de intersección. Analíticamente se ve que por lo menos una de las ecuaciones (3) ó (4) contradice las condiciones iniciales y esto significa que el sistema (1) y (2) es incompatible.

3) $AB' - A'B = 0$, $CB' - C'B = 0$, $AC' - A'C = 0$, es decir,

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}.$$

Las rectas (1) y (2) se juntan y de este modo existe un sinnúmero de puntos de intersección. En este caso los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (2) difieren solamente por un factor constante y, por consiguiente, el sistema de estas ecuaciones admite un sinnúmero de soluciones.

EJEMPLO. Resolviendo el sistema de ecuaciones de las rectas

$$3x + 4y - 10 = 0,$$
$$2x + 5y - 9 = 0$$

obtenemos $x = 2$, $y = 1$. Por consiguiente, estas rectas se intersecan en el punto $N(2, 1)$.

§ 7. Distancia de un punto a una recta

Examinemos la recta KL representada por la ecuación general

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

y el punto $M(x_1, y_1)$. Como **distancia** entre el punto M y la recta KL (o entre la recta KL y el punto M) se entiende la longitud de la per-

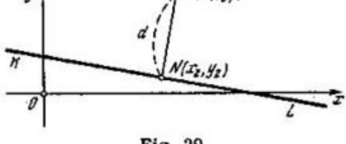

Fig. 29

pendicular $d = MN$ ($MN \perp KL$) bajada desde el punto M hasta la recta KL (fig. 29).

La ecuación de la perpendicular MN puede ser escrita en la forma (véase el § 2)

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0, \tag{2}$$

de donde, para el pie de la perpendicular $N(x_2, y_2)$ tendremos

$$B(x_2 - x_1) - A(y_2 - y_1) = 0 \tag{3}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B} = t, \tag{4}$$

donde t es el factor de proporcionalidad. Por eso

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\,|t|. \tag{5}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que el punto $N(x_2, y_2)$ se encuentra en la recta KL y que mediante la (4) tenemos $x_2 = x_1 + At$, $y_2 = y_1 + Bt$, obtenemos

$$Ax_2 + By_2 + C = A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C = \\ = (Ax_1 + By_1 + C) + t(A^2 + B^2) = 0.$$

Por consiguiente,

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}. \tag{6}$$

De este modo en virtud de la fórmula (5) tenemos

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7}$$

En particular, suponiendo que $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, obtenemos la distancia de la recta hasta el origen de las coordenadas

$$d_0 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8}$$

OBSERVACIÓN. Al dividir los dos miembros de la ecuación de la recta (1) por $\sqrt{A^2 + B^2}$ obtendremos la ecuación

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \tag{9}$$

cuyo miembro indepenendiente $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ es numéricamente igual a la distancia entre la recta y el origen de las coordenadas. Esta ecuación de la recta se denomina *normada*.

De la fórmula (7) obtenemos la **regla**: *para determinar la distancia de un punto a una recta, es necesario introducir en el primer miembro de la ecuación normada de esta recta las coordenadas del punto dado y calcular el valor absoluto del resultado obtenido.*

EJEMPLO. Determinar la distancia entre el punto $M(-2, 7)$ y la recta $24x + 7y - 2 = 0$.

Normando la ecuación de esta recta tendremos

$$\frac{24 + 7y - 2}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{24x + 7y - 2}{25} = 0,$$

de donde la distancia buscada es

$$d = \frac{|24 \cdot (-2) + 7 \cdot 7 - 2|}{25} = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

EJERCICIOS

1. Trazar las rectas dadas por las ecuaciones:
a) $y = 2x - 1$; b) $2x - 3y - 6 = 0$.

2. Las bases de un trapecio isósceles son iguales a 10 y 6, el ángulo a la base es de 60°. Escribir las ecuaciones de los lados de este trapecio tomando como ejes de coordenadas la base mayor y el eje de simetría del trapecio.

3. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto M (3, 4) y forma un ángulo de 45° con la recta $y = 2x + 1$.

4. Escribir la ecuación de la recta paralela a las rectas $3x + 2y - 6 = 0$, $6x + 4y - 3 = 0$ y equidistante de ellas.

5. Sea dado el segmento AB cuyos extremos son A (—3, 2) y B (1, —1). Escribir la ecuación de la recta que une el punto medio del segmento con el origen de las coordenadas.

6. Sea dado el triángulo ABC, cuyos vértices son A (4, 2), B (—2, 4) y C (—1, —4). Escribir la ecuación de la mediana que pasa por el vértice C y hallar su longitud.

7. Sea dado el triángulo ABC cuyos vértices son A (5, 3), B (—3, 4) y C (—2, —5). Escribir la ecuación de la altura que pasa por el vértice B y hallar su longitud.

8. Sea dado el triángulo ABC cuyos vértices son A (6, 4), B (—3, 5) y C (—2, —6). Escribir la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela a la mediana que pasa por el vértice B.

9. Trazar la recta que pasa por el punto (5, 2) y corta segmentos iguales sobre los ejes de las coordenadas.

10. El espesor de una capa carbonífera es $y_1 = 5$ m cuando $x_1 = 100$ m e $y_2 = 15$ m cuando $x_2 = 200$ m. Suponiendo que la capa tiene forma de cuña, hallar la ley de variación de su espesor y en función de la distancia x. ¿Cuál será el espesor cuando $x = 300$ m? ¿En qué punto del corte el espesor de la capa $y = 10$ m?

11. Hallar el punto de intersección de las rectas:
a) $5x - 7y - 20 = 0$ y $7x - 10y + 15 = 0$;
b) $2x + 3y - 7 = 0$ y $4x + 6y + 11 = 0$;
c) $2x - y = 0$ y $x - 0{,}5y = 0$.

12. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x + 4y - 7 = 0$, $5x + 3y - 8 = 0$ y el origen de las coordenadas.

13. Hallar la proyección del punto M (1, 2) sobre la recta $5x + 2y + 20 = 0$.

14. Una recta pasa por el origen de las coordenadas y forma con el eje Ox un ángulo α; otra recta pasa por el punto A $(a, 0)$ y forma con el eje Ox un ángulo β $(\alpha \neq \beta)$. Hallar el punto de intersección de estas rectas.

15. Sea dado un triángulo cuyos vértices son A (—2, 1), B (2, —1), C (4, 3). Determinar las coordenadas del punto de intersección de las medianas de este triángulo.

16. Las ecuaciones de los lados del triángulo ABC son: $x + 7y - 11 = 0$ (AB); $2x + y + 4 = 0$ (BC); $3x - 5y - 7 = 0$ (CA). Calcular el área del triángulo ABC.

17. Hallar las distancias entre los puntos O (0, 0), A (1, 2), B (—2, 1) y la recta $3x - 4y + 10 = 0$.

18. Sea dado un triángulo cuyos vértices son A (1, 1), B (—2, 5) y C (—4, —3). Hallar la altura del triángulo trazada a partir del vértice C sobre el lado AB.

19. Hallar la longitud del segmento perpendicular a las rectas $3x + 4y - 10 = 0$ y $3x + 4y - 45 = 0$ y que se encuentra entre ellas.

20. Escribir las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $8x - 6y + 5 = 0$ y que se encuentran de ella a una distancia igual a 2.

21. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen de las coordenadas y que se encuentran a una distancia igual a 2/5 del punto A (2, 1).

Capítulo IV

Líneas de segundo grado (cónicas)

§ 1. Circunferencia

Deduzcamos la ecuación de la circunferencia (fig. 30) con centro en $C(x_0, y_0)$ y de radio R. Un punto arbitrario $M(x, y)$ de la circunferencia, cumplirá la igualdad

$$MC = R. \tag{1}$$

Recordando la fórmula de la distancia entre dos puntos (§ 3 del cap. I) tenemos

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R. \tag{2}$$

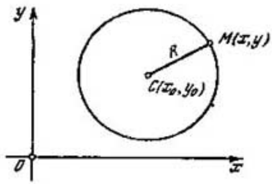

Fig. 30

Puesto que los dos miembros de la igualdad (2) son positivos, elevándolos al cuadrado, obtenemos la ecuación equivalente

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2. \tag{3}$$

Entonces, las coordenadas de cualquier punto $M(x, y)$ de la circunferencia dada satisfacen la ecuación (3). Es también justa la afirmación recíproca.

De este modo la (3) es la ecuación de la circunferencia de radio R con centro en el punto $C(x_0, y_0)$. Ella se llama *ecuación normal de la circunferencia.*

En particular, suponiendo que $x_0 = 0$, e $y_0 = 0$, obtendremos la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de las coordenadas

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{4}$$

La ecuación de la circunferencia (3), después de algunas transformaciones sencillas, puede llevarse a la forma

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{5}$$

donde $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$, $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

De este modo, la circunferencia es una **curva de segundo grado** (véase el § 8 del cap. II).

Comparando la ecuación (5) con la ecuación general de la curva de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{6}$$

vemos que en la (5) $B = 0$ y, además, $A = 1$, $C = 1$, es decir, $A = C$.

Y a la inversa, si consideramos que en la (6) $B = 0$ y $A = C \neq \neq 0$:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{7}$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (7) por $A \neq 0$ y suponiendo que

$$D/A = \alpha, \quad E/A = \beta, \quad E/A = \gamma \tag{8}$$

obtenemos una ecuación del tipo (5).

La (7) se llama *ecuación general de la circunferencia*.

Sin embargo, cabe destacar que no toda ecuación (7) es ecuación de una circunferencia real. Es fácil mostrar que la expresión (7) determina una curva real (circunferencia) solamente cuando $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma \geqslant 0$, donde α, β, γ están dadas por las igualdades (8).

De este modo, *una curva real de segundo grado es una circunferencia si, y sólo si,* 1) *los coeficientes de los cuadrados de las coordenadas corrientes son iguales, y* 2) *está ausente el término que contiene el producto de coordenadas corrientes.*

§ 2. Curvas centrales de segundo grado

Examinemos la ecuación de la curva de segundo grado

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

$(A \neq 0, C \neq 0)$ sin el término del producto de las coordenadas x e y $(B = 0)$[1]. Completando los términos en x y en y respectivamente hasta obtener cuadrados perfectos, tendremos

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F. \tag{2}$$

De aquí, tomando

$$x_0=-\frac{D}{2A}, \quad y_0=-\frac{E}{2C} \tag{3}$$

y

$$\Delta=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F \tag{4}$$

obtenemos

$$A\,(x-x_0)^2 + C\,(y-y_0)^2 = \Delta. \tag{5}$$

El punto $O'\,(x_0, y_0)$ es el **centro de simetría de la curva** (5) (*centro de la curva*). Efectivamente, si el punto $M_1\,(x_1, y_1)$ pertenece a la

---

[1]) En nuestro curso breve, al examinar las ecuaciones generales de curvas de segundo grado, nos limitamos solamente a este caso.

curva (5), el punto M_2 (x_2, y_2), donde $x_2 = 2x_0 - x_1$, $y_2 = 2y_0 - y_1$, simétrico a M_1 respecto a O', evidentemente también pertenece a la curva (5) (fig. 31).

Las rectas $y = y_0$ y $x = x_0$ paralelas a los ejes de coordenadas Ox y Oy son los **ejes de simetría de la curva** (5) (*ejes de la curva*). Efectivamente, si un punto M $(x_0, y_0 - h)$ pertenece a la curva (5), el punto M' $(x_0, y_0 + h)$, simétrico a M con respecto a la recta $y = y_0$ pertenecerá también a esta curva. La recta $x = x_0$ posee la misma propiedad.

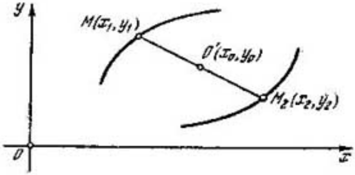

Fig. 31

Más abajo para simplificar el examen supondremos que el centro de la curva se encuentra en el origen de las coordenadas, es decir, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. En este caso la ecuación de la curva tendrá la forma

$$Ax^2 + Cy^2 = \Delta. \qquad (6)$$

DEFINICIÓN 1. *La curva de segundo grado* (6) *se llama* ***elipse*** (*más exactamente, pertenece al* ***tipo elíptico***), *si los coeficientes A y C poseen signos iguales, es decir,*

$$AC > 0. \qquad (7)$$

Supondremos, para fijar la idea, que $A > 0$ y $C > 0$ (ya que en caso contrario, los signos de los miembros de la ecuación (6) pueden ser sustituidos por los inversos).

Son posibles tres casos: 1) $\Delta > 0$; 2) $\Delta = 0$; 3) $\Delta < 0$.

En el primer caso, $\Delta > 0$, tenemos la *elipse real*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (8)$$

donde los números

$$a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{\Delta}{C}} \qquad (9)$$

se llaman *semiejes de la elipse*. Se considera generalmente que $0 < b \leqslant a$ (esto puede ser siempre logrado mediante una elección conveniente de los ejes Ox y Oy). La igualdad (8) se llama *ecuación canónica de la elipse* con semiejes a y b (fig. 32). Los puntos A $(a, 0)$, B $(0, b)$, A' $(-a, 0)$, B' $(0, -b)$ se llaman *vértices de la elipse* y los segmentos $A'A = 2a$ y $B'B = 2b$, *ejes de la elipse*. Observemos que de la ecuación (8) tenemos $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$.

Notemos que cuando $a = b$ obtenemos la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

En el segundo caso cuando $\Delta = 0$, la curva (6) se concentra en el punto O $(0, 0)$ (*elipse degenerada*).

Por fin, en el tercer caso cuando $\Delta < 0$, la curva (6) no posee puntos reales; la llaman convencionalmente *elipse imaginaria.*

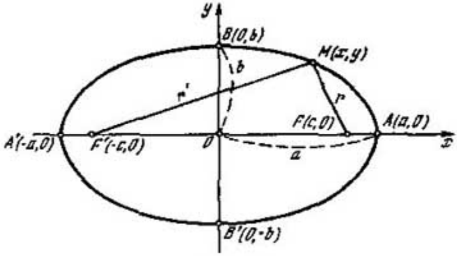

Fig. 32

DEFINICIÓN 2. *La curva de segundo grado* (6) *se llama hipérbola (más exactamente, curva* ***de tipo hiperbólico****), si los coeficientes A y C son de signos contrarios, es decir,*

$$AC < 0. \tag{10}$$

Para fijar la idea, supongamos que $A > 0$, entonces $C < 0$. Son posibles tres casos: 1) $\Delta > 0$, 2) $\Delta = 0$, 3) $\Delta < 0$.

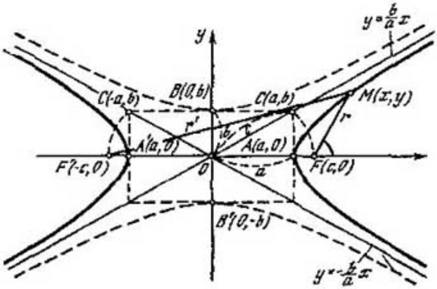

Fig. 33

En el primer caso cuando $\Delta > 0$ tenemos una *hipérbola con ecuación canónica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11}$$

donde $a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}$ *(semieje real)* y $b = \sqrt{\frac{\Delta}{-C}}$ *(semieje imaginario)* (fig. 33). Los puntos A $(a, 0)$ y A' $(-a, 0)$ se llaman *vértices de la hipérbola*. Notemos que $|x| \geqslant a$.

En el segundo caso cuando $\Delta = 0$ obtenemos un par de rectas que se intersecan (*hipérbola degenerada*)

$$(\sqrt{A}x - \sqrt{-C}y)(\sqrt{A}x + \sqrt{-C}y) = 0.$$

Por fin, en el tercer caso cuando $\Delta < 0$ obtenemos la hipérbola

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = -1 \qquad (12)$$

con semiejes $a' = \sqrt{\frac{-\Delta}{A}}$ y $b' = \sqrt{\frac{\Delta}{C}}$. Si $a' = a$ y $b' = b$, la igualdad (12) se llama hipérbola *conjugada* de la hipérbola (11); sus vértices son: B (0, b) y B' (0, $-b$) (fig. 33).

El segmento $A'A = 2a$ se denomina *eje real*, el segmento $B'B = 2b$, *eje imaginario* de la hipérbola (11).

EJEMPLO. Determinar la naturaleza y la posición de la curva

$$x^2 + 2y^2 - 2x + 3y = 0.$$

Completando los términos que contienen x e y respectivamente, hasta obtener cuadrados perfectos, tendremos

$$(x-1)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{8},$$

de donde

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{17}{8}} + \frac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\frac{17}{16}} = 1.$$

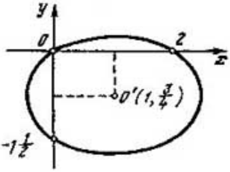

Fig. 34

Por consiguiente, la curva (13) es una elipse cuyos semiejes son $a = \sqrt{\frac{17}{8}} \approx 1{,}46$ y $b = \sqrt{\frac{17}{4}} \approx 1{,}03$, con centro en el punto $O'\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ (fig. 34).

§ 3. Propiedades focales de las curvas centrales de segundo orden

Los puntos F (c, 0) y F' ($-c$, 0), donde

$$c = \sqrt{a^2 \mp b^2} \qquad (1)$$

se llaman, respectivamente, *focos* de la elipse representada por la ecuación canónica (8), fig. 32 (el signo $-$) y de la hipérbola representada por la ecuación canónica (11), fig. 33 (el signo $+$).

La relación

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (2)$$

se llama *excentricidad* de la curva central de segundo grado.

De la fórmula (1) tenemos: para la elipse $0 \leqslant \varepsilon < 1$, y para la hipérbola $1 < \varepsilon < +\infty$. Notemos que para la circunferencia $\varepsilon = 0$.

Sean $r = MF$ y $r' = MF'$ las distancias del punto M de la curva central de segundo grado a sus focos (llamados *radios focales del punto* M). Tenemos

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{3}$$

y

$$r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{4}$$

Puesto que

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde el signo «+» corresponde a una elipse, el signo «—», a una hipérbola, entonces

$$y^2 = \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

y, por consiguiente, teniendo en cuenta la (1) obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 \pm b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + (c^2 \pm b^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \left|\frac{c}{a}x - a\right| = |\varepsilon x - a| \end{aligned} \tag{5}$$

y de un modo análogo

$$r' = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 \pm b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = |\,\varepsilon x + a\,|. \tag{6}$$

Si la curva es elipse, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, $|\,x\,| \leqslant a$ y por eso

$$r = a - \varepsilon x, \quad r' = a + \varepsilon x,$$

de donde,

$$r + r' = 2a; \tag{7}$$

además, para cualquier r y r' que satisfacen la igualdad (7) existe un punto de la elipse dada.

De este modo, *para todo punto de la elipse la suma de sus radios focales es una magnitud constante*. Esta propiedad se toma por la definición de la elipse **(propiedad característica de la elipse)**.

Para la hipérbola tenemos: $\varepsilon > 1$, $|\,x\,| \geqslant a$. Por eso

$$r = \pm(\varepsilon x - a), \quad r' = \pm(\varepsilon x + a),$$

donde el signo «+» corresponde a la rama derecha de la hipérbola ($x > 0$) y el signo «—» corresponde a su rama izquierda ($x < 0$), de donde

$$r' - r = \pm 2a. \tag{8}$$

Así, *para cualquier punto de la hipérbola el valor absoluto de la diferencia de sus radios focales es una magnitud constante* **(propiedad característica de la hipérbola).**

§ 4. La elipse como deformación uniforme de la circunferencia

Examinemos una circunferencia de radio a. Elijamos el sistema de coordenadas rectangulares Oxy y para simplificar, hacemos coincidir su origen con el centro de la circunferencia O (0, 0). Para mayor comodidad designamos con X e Y las coordenadas corrientes de un punto M de la circunferencia. En este caso, la ecuación de la circunferencia se escribirá así (véase el § 1)

$$X^2 + Y^2 = a^2. \tag{1}$$

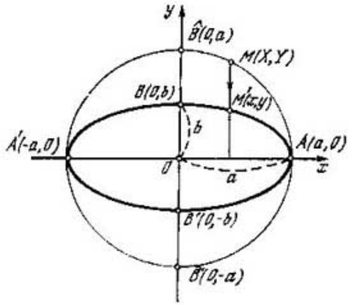

Fig. 35

Sometamos la circunferencia (1) a una deformación uniforme en dirección de uno de sus diámetros que sin alterar la generalidad de los razonamientos puede considerarse vertical, es decir, dirigida según el eje Oy. Sea k el coeficiente de deformación de la circunferencia en la dirección elegida, es decir, k es la relación entre la longitud del segmento vertical transformado y su longitud inicial. Notemos que cuando $0 \leqslant k < 1$ tenemos una compresión uniforme y para $k > 1$, una extensión uniforme de la circunferencia.

Supongamos que como resultado de esta deformación, el punto de la circunferencia M (X, Y) pasa al punto M' (x, y) de la curva transformada (fig. 35). Puesto que los puntos M y M' pertenecen a una misma vertical, tenemos

$$x = X, \quad y = kY, \tag{2}$$

de donde, para $k \neq 0$ [1]) obtendremos

$$X = x, \quad Y = \frac{y}{k}. \tag{3}$$

[1]) En el caso cuando $k = 0$, de la deformación de la circunferencia obtenemos un segmento $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$ que puede ser considerado como una elipse degenerada.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) hallamos

$x^2+\frac{y^2}{k^2}=a^2$, o bien

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4}$$

donde $b=ka$, es decir, el punto transformado $M'(x, y)$ pertenece a la elipse de semiejes a y b.

Y a la inversa, si el punto $M'(x, y)$ pertenece a la elipse (4), el punto $M(X, Y)$ que le corresponde, es de la circunferencia (1).

De este modo, *el resultado de la deformación uniforme de una circunferencia en la dirección de uno de sus diámetros, es una elipse.*

§ 5. Asíntotas a la hipérbola

Examinemos la hipérbola (fig. 33)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Resolviendo la ecuación (1) respecto a y, obtenemos

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \tag{2}$$

o bien

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}. \tag{3}$$

Si $|x|$ crece ilimitadamente, $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\approx 1$, y, por consiguiente, tenemos en cierto sentido la igualdad aproximada

$$y\approx\pm\frac{b}{a}x.$$

Mostremos que las ramas de la hipérbola (1) se aproximan tanto como se quiera, a las rectas (fig. 33)

$$y=\pm\frac{b}{a}x, \tag{4}$$

llamadas *asíntotas a la hipérbola*. En efecto, para $x>0$, tomemos, por ejemplo, el signo «+» en las fórmulas (2) y (4). Examinemos, respectivamente, los puntos $M(x, y)$ de la hipérbola (2) y $N(x, Y)$ de la recta (4), que tienen una abscisa común x. En este caso

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\to 0$$

cuando $x\to+\infty$.

Análogamente, se examinan otros tres casos: con el signo «—» en las fórmulas (2) y (4), cuando $x \to +\infty$; con el signo «+» en la fórmula (2) y «—» en la (4), cuando $x \to -\infty$ y, por fin, con el signo «—» en la (2) y «+» en la (4), cuando $x \to -\infty$.

Notemos que la hipérbola conjugada

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{5}$$

posee (como es fácil verificar) las mismas asíntotas que la hipérbola (1).

La hipérbola equilátera ($a = b$)

$$x^2 - y^2 = a^2$$

posee las asíntotas $y = \pm x$ mutuamente perpendiculares.

§ 6. Gráfica de la proporcionalidad inversa

Examinemos la curva

$$xy = a^2 \quad (a > 0) \tag{1}$$

(fig. 36).

Eligiendo como nuevos ejes de coordenadas Ox' y Oy' las bisectrices de los ángulos de los cuadrantes de las coordenadas y teniendo en cuenta que el ángulo de giro es $\alpha = \frac{\pi}{4}$, tendremos (véase el § 2 del cap. I)

$$x = x' \cos\frac{\pi}{4} - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

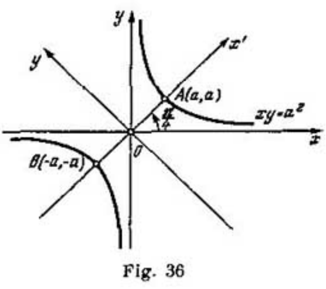

Fig. 36

de donde, en virtud de la fórmula (1), obtenemos

$$\frac{x'^2-y'^2}{2} = a^2,$$

es decir,

$$x'^2 - y'^2 = 2a^2. \tag{2}$$

De este modo *la gráfica de la proporcionalidad inversa de la fórmula* (1), *es una hipérbola equilátera.*

§ 7. Curvas no centrales de segundo grado

Una curva de segundo grado se llama *no central*, si no tiene centro de simetría o posee un conjunto infinito de centros de simetría (es decir, no tiene un centro de simetría único).

Examinemos la curva de segundo grado

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

donde $AC = 0$ y $A^2 + C^2 \neq 0$. Consideremos para mayor claridad, que

$$A = 0, \quad C \neq 0. \tag{2}$$

Además, supongamos que $D \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos un par de rectas paralelas.

Completando en la ecuación (1) los miembros con y hasta un cuadrado perfecto, tendremos

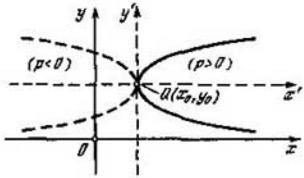

Fig. 37

$$C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C},$$

o, suponiendo que

$$x_0 = -\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4DC}, \quad y_0 = -\frac{E}{2C},$$

$$2p = -\frac{D}{C}, \tag{3}$$

obtendremos

$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0). \tag{4}$$

La curva (4) se denomina *parábola* (fig. 37); el punto O' (x_0, y_0), *vértice de la parábola*, y el número p, *parámetro de la parábola*. Es

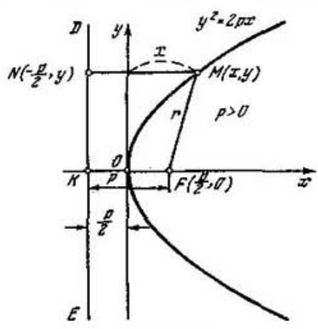

Fig. 38

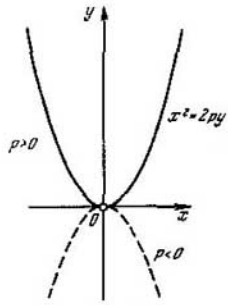

Fig. 38a

fácil convencerse de que la recta $y = y_0$ es el **eje de simetría de la parábola** (*eje de la parábola*); la parábola (4) no tiene centro de simetría.

Si el vértice de la parábola se encuentra en el origen de las coordenadas y Ox es el eje de ella, obtendremos la *ecuación canónica de* *la parábola*

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

donde el parámetro p generalmente se considera positivo (esto puede lograrse eligiendo la dirección conveniente del eje Ox; fig. 38).

Destaquemos que si se cambian los papeles de los ejes Ox y Oy, la ecuación canónica de la parábola adopta la forma

$$x^2 = 2py. \tag{6}$$

Ésta es la ecuación de una parábola **con eje vertical** (fig. 38a).

§ 8. Propiedades focales de la parábola

Examinemos la parábola (fig. 38)

$$y^2 = 2px \quad (p > 0). \tag{1}$$

El punto $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ se llama *foco* y la recta $x = -\frac{p}{2}$ *directriz* de la parábola.

Para un punto $M(x, y)$ su *radio focal* $r = MF$ es igual a

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$
$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2}. \tag{2}$$

La distancia entre este punto y la directriz es igual a

$$MN = x + \frac{p}{2} = r.$$

De este modo, *la parábola es un conjunto de puntos del plano equidistantes de un punto dado (foco) y de una recta dada (directriz)*. Esta es la **propiedad característica de la parábola**.

EJEMPLO. Determinar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola $y = x^2$.

Comparando esta ecuación con la (6), obtendremos $2p = 1$, de donde $p = 1/2$. Por consiguiente, el foco de la parábola tiene las coordenadas $(0, 1/4)$ y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{1}{4}$.

§ 9. Gráfica de un trinomio cuadrado

Examinemos el trinomio cuadrado

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (A \neq 0). \tag{1}$$

De aquí,

$$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right). \tag{2}$$

Si completamos la expresión entre paréntesis hasta un cuadrado perfecto obtendremos

$$y=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right)\right],$$

o bien

$$y-\frac{4AC-B^2}{4A}=A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2. \quad (3)$$

Si hacemos

$$x_0=-\frac{B}{2A}, \quad y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}, \quad (4)$$

mediante la fórmula (3), obtendremos

$$y-y_0=A(x-x_0)^2. \quad (5)$$

Efectuando una traslación paralela del sistema de coordenadas

$$x'=x-x_0, \quad y'=y-y_0$$

tendremos definitivamente

$$y'=Ax'^2. \quad (6)$$

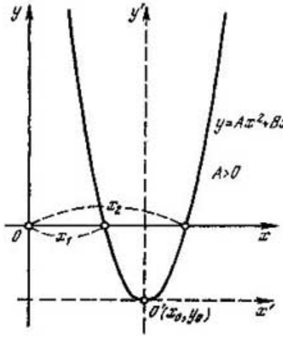

Fig. 39

La ecuación (6) (véase la fórmula (6) del § 7) es la ecuación canónica de una parábola con el eje vertical, cuyo vértice se encuentra en el punto $O'(x_0, y_0)$ y parámetro $p=\frac{1}{2A}$. De este modo, *la gráfica del trinomio cuadrado es una parábola cuyo vértice se encuentra en el punto $O'(x_0, y_0)$ y cuyo eje es paralelo a Oy* **(parábola con eje vertical desplazado, fig. 39).**

Notemos que las abscisas x_1 y x_2 de los puntos de intersección de la parábola (1) con el eje Ox son las raíces de la ecuación cuadrática

$$Ax^2+Bx+C=0. \quad (7)$$

Esta propiedad sirve de base para el método gráfico de resolución de la ecuación cuadrática (7).

EJEMPLO. Reducir la ecuación $y=x^2-4x+3$ a su forma canónica y construir la parábola correspondiente.

Al pasar el término independiente al primer miembro de la ecuación y completar el segundo miembro hasta un cuadrado perfecto tendremos

$$y-3+4=x^2-4x+4,$$

o sea,

$$y + 1 = (x - 2)^2.$$

Tomando que $x - 2 = x'$, $y + 1 = y'$, obtendremos

$$y' = x'^2.$$

De este modo, la ecuación dada es la de una parábola cuyo vértice se encuentra en el punto O' (2, —1) y el eje de simetría $O'y'$ es paralelo a Oy (fig. 40).

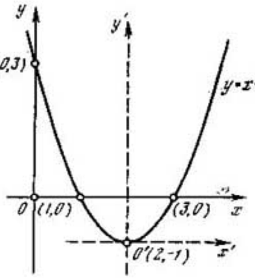

Fig. 40

EJERCICIOS

1. a) Hallar las coordenadas del centro C y del radio R de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0.$$

b) Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de las coordenadas y cuyo centro se encuentra en el punto C (1, 0).

c) Escribir la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes de las coordenadas, si su centro se encuentra en el punto C (1/2, 1/2).

d) Escribir la ecuación de la circunferencia, de diámetro de la cual sirve un segmento con extremos A (—1, 2) y B (5, 6).

2. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los centros de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + x - 3y - 1 = 0.$$

Determinar la distancia entre los centros de estas circunferencias.

3. Hallar la ecuación de la cuerda común a las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0.$$

4. Hallar los semiejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse

$$x^2 + 2y^2 = 8.$$

Construir esta elipse.

5. a) Escribir la ecuación canónica de la elipse, con longitud del semieje menor igual a 6, y distancia focal igual a 8.

b) Escribir la ecuación canónica de la elipse, si se sabe que la distancia entre los extremos de los ejes mayor y menor es igual a 5, y la suma de las longitudes de los semiejes, igual a 7.

c) Escribir la ecuación canónica de la elipse, si las distancias entre su foco y los extremos del eje mayor son iguales a 2 y 18.

6. Hallar la longitud del diámetro [1]) de la elipse $5x^2 + 7y^2 = 24$, que divide el ángulo formado por los ejes de las coordenadas en dos partes iguales.

7. a) Hallar los semiejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la hipérbola

$$9x^2 - 16y^2 = 36.$$

[1] Es decir, de la cuerda que pasa por el centro de la elipse.

b) Escribir la ecuación canónica de la hipérbola, si la longitud de su eje real es igual a 8 y la distancia entre sus focos es igual a 10.
Construir estas hipérbolas.

8. Hallar la longitud del diámetro de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ perpendicular a la asíntota a la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ que pasa por los cuadrantes I y III.

9. Hallar la excentricidad de la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ y de su conjugada.

10. Hallar la distancia entre el foco F_1 de la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ y el foco F_2 de la hipérbola conjugada.

11. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ y los focos de la hipérbola conjugada.

12. Las asíntotas de una hipérbola tienen las ecuaciones $y=\frac{4}{3}x$ e $y=-\frac{4}{3}x$. Hallar la excentricidad de la hipérbola, si su eje real coincide con el eje Ox.

13. Escribir la ecuación canónica de la parábola, si la distancia entre el foco y la directriz es igual a 10.

14. Determinar las coordenadas del foco y escribir la ecuación de la directriz de la parábola $y = 0{,}25\, x^2$.

15. El corte transversal de la pantalla de cristal de un proyector tiene forma de parábola. Determinar la posición del foco, si el diámetro de la pantalla es igual a 60 cm y la profundidad, igual a 30 cm.

16. Sea dada la parábola $y^2 = 12\,x$. Hallar la longitud de su cuerda que pasa por el punto M (8, 0) y forma con el eje de la parábola un ángulo de 60°.

17. Escribir la ecuación de la línea, cuyos puntos son equidistantes del punto A (0, 2) y del eje Ox.

18. Reducir la ecuación de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 5$ a la forma canónica y determinar las coordenadas de su vértice.

19. Reducir la ecuación de la parábola $y = -3 + 4x - x^2$ a la forma canónica, y determinar las coordenadas de su vértice.

20. Reducir la ecuación de la parábola $x = y^2 - y + 2$ a la forma canónica y determinar las coordenadas de su vértice.

21. El arco de un puente ferroviario, cuya luz es $l = 60$ m, y la altura $h = 12$ m, tiene forma parabólica. Determinar la altura h_1 de soportes laterales del arco que se encuentran a 15 m de distancia de los extremos del puente.

Capítulo V

Coordenadas polares. Ecuaciones paramétricas de la línea

§ 1. Coordenadas polares

La idea principal del método de coordenadas consiste en que la posición de un punto sobre el plano se determina unívocamente por medio de dos números. La interpretación geométrica concreta de estos números, la brinda uno u otro sistema de coordenadas. Además del sistema de coordenadas rectangulares que hemos utilizado exclusivamente hasta ahora, el más importante es el *sistema de coordenadas polares* que pasamos a estudiar.

Tomamos en el plano un punto O que llamaremos *polo*. A partir del polo O trazamos una semirrecta orientada Ox llamada *eje polar* (fig. 41).

Fig. 41

Sea M un punto arbitrario del plano. Unimos el punto M con el polo mediante el segmento OM. La longitud del segmento $OM = \rho$, es decir, la distancia entre el punto M y el polo se llama *radio polar* del punto M, y el ángulo $\varphi = \angle xOM$ en el sentido sinistrorso, se denomina *ángulo polar*. El radio polar ρ y el ángulo polar φ son las *coordenadas polares* del punto M.

El punto M con coordenadas polares ρ y φ se escribe del modo siguiente: $M(\rho, \varphi)$, el radio polar ρ se pone en primer lugar, y el ángulo polar φ, en segundo.

En lo que se refiere a los valores tomados por las coordenadas polares, es evidentemente suficiente considerar los valores de ρ desde 0 hasta $+\infty$ $(0 \leqslant \rho < +\infty)$ y los valores de φ desde 0 hasta 2π $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$; en este caso, como hemos convenido, el ángulo φ se toma a partir del eje polar de derecha a izquierda. Sin embargo, en algunos casos es necesario examinar ángulos superiores a 2π, como también ángulos negativos, es decir, ángulos contados a partir del eje polar en el sentido dextrorso.

§ 2. Relaciones entre las coordenadas rectangulares y las polares

Examinemos la transformación de las coordenadas polares en coordenadas rectangulares y viceversa.

Supongamos que el polo del sistema de coordenadas polares coincide con el origen del sistema de coordenadas rectangulares Oxy, y el eje polar es el semieje positivo Ox (fig. 42). En este caso para un punto arbitrario M tenemos

$$OA = x, \quad AM = y, \quad OM = \rho, \quad \angle xOM = \varphi.$$

Considerando que el ángulo φ es agudo, mediante el triángulo AOM hallamos

$$OA = OM \cos\varphi, \quad AM = OM \operatorname{sen}\varphi,$$

o bien

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\varphi.$$

Las fórmulas obtenidas son válidas para cualquier ángulo φ. Así se expresan las coordenadas rectangulares del punto M en función de sus coordenadas polares. Luego, por medio del mismo triángulo rectangular AOM obtenemos

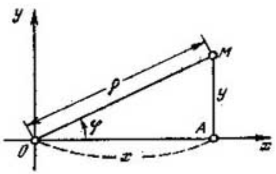

Fig. 42

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2}, \quad t\varphi = \frac{AM}{OA},$$

o sea

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

De este modo se expresan las coordenadas polares del punto por sus coordenadas rectangulares.

Notemos que durante la determinación del ángulo polar φ según $\operatorname{tg}\varphi$ es necesario tener en cuenta los signos de las coordenadas x e y.

Como hemos visto, las líneas pueden ser dadas por medio de ecuaciones que ligan sus coordenadas rectangulares corrientes. Mostremos ahora en un ejemplo sencillo, que las líneas pueden ser también definidas por ecuaciones en coordenadas polares.

EJEMPLO. Examinemos una curva

$$\rho = a\varphi,$$

donde a es un número positivo. Esta curva se llama *espiral de Arquímedes*. Para trazar esta curva componemos la tabla de valores correspondientes de φ y ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	...
ρ	0	$\frac{\pi}{4}a$	$\frac{\pi}{2}a$	πa	$\frac{3}{2}\pi a$	$2\pi a$	$\frac{5}{2}\pi a$	...

Con ayuda de esta tabla podemos marcar los puntos y unirlos por una línea, precisando, si hace falta, la posición de los puntos intermediarios (fig. 43).

§ 3. Ecuaciones paramétricas de la línea

A veces, en lugar de la ecuación de la línea que liga las coordenadas rectangulares x e y es más comodo considerar las llamadas *ecuaciones paramétricas de la línea* que expresan las coordenadas corrientes x e y en función de una cierta variable (*parámetro*) t. Las ecuaciones paramétricas desempeñan un papel importante, por ejemplo,

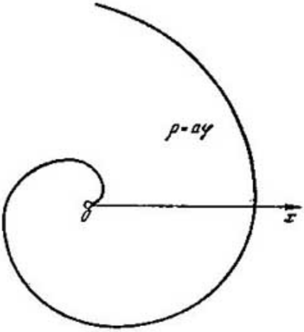

Fig. 43

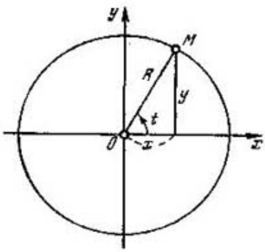

Fig. 44

en la mecánica donde las coordenadas x e y de un punto en movimiento M (x, y) se examinan en función del tiempo (*ecuación del movimiento*).

EJEMPLO 1. Deduzcamos las ecuaciones paramétricas de una circunferencia.

Sea M (x, y) un punto cualquiera de la circunferencia de radio R, cuyo centro se encuentra en el origen de las coordenadas (fig. 44). Designemos por t el ángulo xOM en el triángulo rectangular AOM que determina este punto. En este caso, tendremos evidentemente las igualdades

$$OA = OM \cos t, \quad AM = OM \operatorname{sen} t,$$

o sea,

$$x = R \cos t, \quad y = R \operatorname{sen} t. \tag{1}$$

Ésta es la *ecuación paramétrica de la circunferencia*.

Para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia es necesario excluir el parámetro t. Para eso elevamos las ecuaciones (1) al cuadrado y las sumamos:

$$x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = R^2.$$

EJEMPLO 2. Ecuaciones paramétricas de la elipse.

Una elipse de semiejes a y b puede ser considerada como una circunferencia de radio a comprimida uniformemente en dirección del diámetro vertical, donde el coeficiente de compresión es $k = b/a$

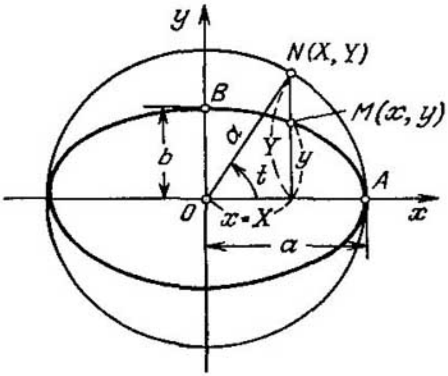

Fig. 45

(véase el § 4 del cap. IV). Sea $M(x, y)$ un punto de la elipse y $N(X,Y)$ un punto de la circunferencia que le corresponde (fig. 45), donde

$$x = X, \quad y = \frac{b}{a}Y. \tag{2}$$

Sea t el ángulo formado por el radio ON de la circunferencia y la dirección positiva del eje Ox: $t = \angle NOx$. De las fórmulas (2) tenemos

$$x = X = a \cos t,$$

$$y = \frac{b}{a}Y = \frac{b}{a} \cdot a \operatorname{sen} t = b \operatorname{sen} t.$$

De este modo, *las ecuaciones paramétricas de la elipse* con semiejes a y b son

$$x = a \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t. \tag{3}$$

Eliminando el parámetro t de las ecuaciones (3), obtenemos la ecuación canónica de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Con las ecuaciones paramétricas de la línea, ésta se puede construir punto por punto.

EJEMPLO 3. Construir la curva

$$x = t^2, \quad y = 2t. \tag{4}$$

Componiendo la tabla de valores, tendremos

t	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	4	1	0	1	4	...
y	...	-4	-2	0	2	4	...

Introduciendo los puntos de coordenadas (x, y) en el plano Oxy y uniéndolos, obtendremos la curva buscada (fig. 46).

Esta curva es una parábola. Efectivamente, si eliminamos el parámetro t de la ecuación (4), obtendremos

$$y^2 = 4x,$$

es decir, la ecuación canónica de la parábola.

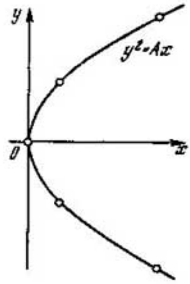

Fig. 46

§ 4. Ecuaciones paramétricas de la cicloide

DEFINICIÓN. *Llámase* ***cicloide*** *a la curva descrita por un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizamiento por una línea recta* (fig. 47).

Deduzcamos las ecuaciones paramétricas de la cicloide, tomando como recta el eje Ox, suponiendo que el radio de la circunferencia que rueda es a y que el punto en movimiento M en la posición inicial coincide con el origen de las coordenadas. Tomamos como parámetro t el ángulo de giro (en radianes) del radio móvil MC de la circunferencia respecto al

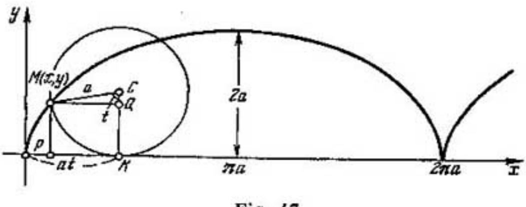

Fig. 47

radio vertical KC, donde K es el punto de contacto de la circunferencia con el eje Ox (fig. 47). Como la circunferencia rueda sin deslizamiento, tenemos evidentemente

$$OK = \widehat{MK} = at,$$

de donde, según la fig. 47, obtenemos, para las coordenadas corrientes del punto M de la cicloide, las expresiones siguientes:

$$x = OP = OK - PK = OK - MQ = at - a \operatorname{sen} t = a (t - \operatorname{sen} t)$$

e

$$y = PM = KC - QC = a - a \cos t = a (1 - \cos t).$$

De este modo, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a (t - \operatorname{sen} t), \quad y = a (1 - \cos t).$$

EJERCICIOS

1. Indicar los puntos de acuerdo con sus coordenadas polares: A (5, 0), B (2, $\pi/4$), C (3, $\pi/2$), D (1, π), E (2, $5\pi/3$).

2. ¿Cuáles son las coordenadas rectangulares de los puntos dados por sus coordenadas polares: A (5, 0), B (6, $\pi/4$), C (2, $\pi/2$), D (4, $5\pi/4$)?

3. Construir por puntos la espiral logarítmica $\rho = 2^{\varphi/\pi}$.

4. Escribir en coordenadas polares las ecuaciones de las líneas siguientes: a) $x = 1$; b) $y = -2$; c) $y = x$; d) $y = 2x$; e) $x + y = \sqrt{2}$; f) $x^2 + y^2 = 25$.

5. Escribir la ecuación de la recta $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0$ en coordenadas polares.

6. La ecuación de una curva en coordenadas polares es $\rho = a \cos \varphi$. Escribir la ecuación de esta misma curva en coordenadas rectangulares y esclarecer su naturaleza.

7. Una línea está dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = 1/(1 - \cos \varphi)$. Escribir su ecuación en coordenadas rectangulares.

8. Una línea está dada por las ecuaciones paramétricas $x = a \operatorname{sen} t$, $y = b \cos t$. Hallar su ecuación en coordenadas rectangulares.

9. Una línea está dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Hallar su ecuación en coordenadas rectangulares.

10. Una línea está dada por sus ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = 4t$. Hallar su ecuación en coordenadas rectangulares.

11. Un punto se desplaza por el plano Oxy ocupando en el instante de tiempo t, contado a partir del momento inicial $t = 0$, la posición M ($200 - t$, $100 - t$). ¿En qué momento el punto llegará a la recta $8x - 6y + 10 = 0$ y cuáles serán sus coordenadas en ese instante?

Capítulo VI

Función

§ 1. Magnitudes constantes y variables

Al estudiar las leyes de la naturaleza a cada instante tropezamos con **magnitudes constantes** y **magnitudes variables.**

DEFINICIÓN. *Se llama* **magnitud constante** *a aquella que conserva un mismo valor (en general, o en un proceso dado; en el último caso la magnitud constante se denomina* ***parámetro****).*

Llámase ***magnitud variable*** *a la que puede tomar valores numéricos diferentes.*

Citemos ejemplos de magnitudes constantes y variables.

EJEMPLO 1. El diámetro y la longitud de la circunferencia pueden tomar, según las circunstancias, valores diferentes y, por consiguiente, son en general magnitudes variables, mientras que la relación de la longitud de la circunferencia a su diámetro es siempre de un mismo valor y, por consiguiente, es una magnitud constante llamada «número π» ($\pi = 3,14159...$).

EJEMPLO 2. El volumen v y la presión p de una masa determinada de gas son magnitudes variables; sin embargo, como se sabe del curso de física, el producto vp es una magnitud constante para una temperatura dada. Si la temperatura varía, el producto vp también varía.

Notemos que en numerosos casos es cómodo para la generalización de las enunciaciones, considerar a las magnitudes constantes como magnitudes variables que toman un solo y único valor.

§ 2. Noción de función

Estudiando un fenómeno cualquiera generalmente nos encontramos con un conjunto de magnitudes variables ligadas entre sí de tal modo, que los valores de algunas de ellas (*variables independientes*) determinan por completo los valores de otras magnitudes (*variables dependientes* o *funciones*).

Al estudiar un gas, por ejemplo, nos interesa su volumen v, su temperatura t, su presión p. De acuerdo con la ley de Mendeléiev—Clapeyron, conociendo el volumen y la temperatura de un gas, podemos determinar unívocamente su presión; por consiguiente, las magnitudes v y t pueden considerarse como variables independientes, mientras que p, como una variable dependiente (función).

Demos ahora la **noción de función**, fundamental en las matemáticas superiores, limitándonos en principio al caso de dos variables.

DEFINICIÓN. *Una variable y es* **función** *de otra variable x, si ambas variables están ligadas entre sí de tal modo que a cada valor considerado de x, (valor admisible) le corresponde un valor único totalmente determinado de y*[1].

Esta definición fue enunciada por primera vez en términos generales por N. I. Lobachevski, genial matemático ruso.

En este caso la variable x se llama *argumento* o *variable independiente*, mientras que y se denomina a veces *variable dependiente*. Respecto a las magnitudes mismas de x e y, se dice que ellas se encuentran *en relación funcional*.

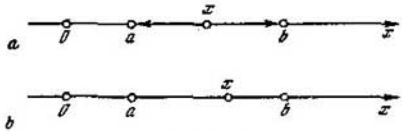

Fig. 48

El conjunto de todos los valores de la variable independiente x para los cuales la función y está definida se llama *dominio de definición* o *dominio de existencia* de esta función.

Más frecuentemente el dominio de definición de una función bien es un *intervalo* (a, b) (fig. 48,a), es decir, el conjunto de todos los valores de x que satisfacen la desigualdad

$$a < x < b$$

(es preciso subrayar que los valores $x = a$ y $x = b$ están aquí excluidos), o bien el segmento $[a, b]$ (fig. 48,b), es decir, el conjunto de todos los valores de x que satisfacen la desigualdad

$$a \leqslant x \leqslant b$$

(aquí los valores $x = a$ y $x = b$ están incluidos). En algunos casos el dominio de definición de la función representa un semiintervalo cerrado a la izquierda $[a, b)$ o cerrado a la derecha $(a, b]$, es decir, el conjunto de números x definidos por las condiciones $a \leqslant x < b$ o respectivamente, $a < x \leqslant b$. Llamaremos también *intervalo* al conjunto de puntos que representa un segmento o un semiintervalo y lo escribiremos $\langle a, b\rangle$.

Se examinan también intervalos infinitos: $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$, es decir, el conjunto de todos los números menores que a; $(b, +\infty) = \{x \mid x > b\}$, es decir, el conjunto de todos los números mayores que b; $(-\infty, +\infty)$, el conjunto de todos los números

[1]) En adelante supondremos que, si no se ha acordado nada en contrario, las magnitudes y los números que se examinan toman solamente valores reales.

reales (véase el § 1 del cap. VII). Los intervalos $(-\infty, a]$ y $[b, +\infty)$ tienen sentido análogo.

El hecho de que y sea función de x se escribe abreviadamente así:

$$y = f(x), \tag{1}$$

donde el símbolo f se llama *característica de la función*. Para designar la dependencia funcional (1) se puede, en lugar de la letra f, utilizar cualquier otra letra (por ejemplo, g, h, F, φ, etc.), pero las diferentes funciones existentes en un mismo problema deben ser designadas con letras diferentes.

El valor particular de la función $f(x)$, para $x = a$, se escribe así: $f(a)$. Por ejemplo, si

$$f(x) = x(1 - x),$$

entonces

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = -2, \text{ etc.}$$

Con algunos ejemplos se aclara la noción de función.

EJEMPLO 1. Según la fórmula del área del círculo,

$$S = \pi R^2,$$

se deduce que a cada valor admisible (es decir, positivo), del radio R le corresponde un valor determinado de la superficie S. Por consiguiente, S es una función de R definida en el intervalo infinito: $0 < R < +\infty$.

EJEMPLO 2. De acuerdo con la ley de Boile—Mariotte a una temperatura constante tenemos $vp = C$, donde v, es el volumen de un gas; p, su presión y C, una magnitud constante. De aquí,

$$v = \frac{C}{p}.$$

Por consiguiente, a cada valor de la presión p le corresponde un volumen determinado de gas v. En base a razonamientos físicos se deduce que el dominio de definición de esta función es el intervalo infinito

$$0 < p < +\infty.$$

EJEMPLO 3. Hallar el dominic que define la función

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

Esta función tiene sentido, si $4 - x^2 \geqslant 0$, de donde

$$x^2 \leqslant 4 \quad \text{ó} \quad |x| \leqslant 2.$$

Por consiguiente, el dominio de definición de la función es el segmento

$$-2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Para tener una idea concreta del comportamiento de una función, se construye el *gráfico de la función*, considerando la variable independiente x y la función y como coordenadas rectangulares de cierto punto M en el plano Oxy.

DEFINICIÓN. *Llámase* ***gráfico*** *de la función $y = f(x)$ al conjunto de todos los puntos $M(x, y)$ del plano Oxy, cuyas coordenadas están ligadas por una dependencia funcional dada.*

En otras palabras, el gráfico de la función es una línea, cuya ecuación es la igualdad que define la función.

Por ejemplo, para la función (2) tenemos

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y \geqslant 0$$

y su gráfico es evidentemente la semicircunferencia superior de radio $R = 2$, con centro en el origen de las coordenadas (fig. 49). La fig. 49 muestra que el dominio de definición de la función es el segmento $[-2, 2]$.

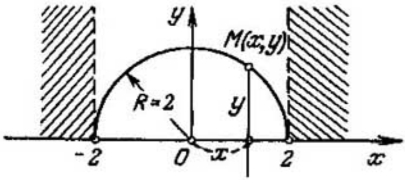

Fig. 49

Destaquemos que al construir el gráfico de la función $y = f(x)$ podemos determinar aproximadamente las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0$$

como las abscisas de los puntos de intersección del gráfico con el eje Ox.

Si a cada valor de la variable x le corresponde un valor de la variable y, tenemos una *función unívoca* de x; si a un valor de la variable x le corresponden varios (dos, tres, etc.) o una infinidad de valores de la variable y, entonces y se denomina *función multívoca* (biunívoca, triunívoca, etc.) de x.

Por ejemplo, $y = x^2$ es una función unívoca de x. También $y = \operatorname{sen} x$ es una función unívoca de x. La función $y = \pm\sqrt{x}$ es una función biunívoca de x; $y = \operatorname{Arcsen} x$ es una función multívoca (tiene infinidad de valores) de x.

En adelante, con el concepto de «función» entenderemos una función unívoca, si no se dice lo contrario.

§ 3. Dependencias funcionales elementales

1. Dependencia proporcional directa

DEFINICIÓN. *Dos magnitudes variables se llaman directamente proporcionales, si al variar una de ellas en cierta relación, la otra varía en la misma relación.*

Como ejemplos de magnitudes directamente proporcionales se pueden dar: la longitud de la circunferencia y su radio; el camino recorrido por un cuerpo con movimiento uniforme y el tiempo transcurrido; el alargamiento de una barra elástica y la carga, etc.

Sean x e y magnitudes directamente proporcionales, y sea k el valor de y para $x = 1$. En virtud de la definición tenemos

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{k},$$

de donde

$$y = kx;$$

la magnitud constante k se denomina *coeficiente de proporcionalidad*. La función (1) se llama función *lineal homogénea*. Su gráfico es una línea recta que pasa por el origen de las coordenadas con coeficiente angular k (fig. 50).

2. Dependencia lineal

DEFINICIÓN. *Dos magnitudes variables x e y son* ***linealmente dependientes*** *si*

$$y = y_0 + kx, \tag{2}$$

donde k e y_0 son magnitudes constantes.

La función (2) se llama *lineal*; su gráfico es una línea recta (fig. 51) con segmento inicial (ordenada al origen) y coeficiente angular k.

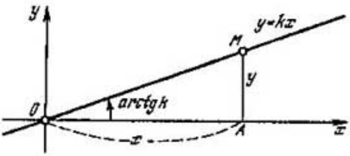

Fig. 50

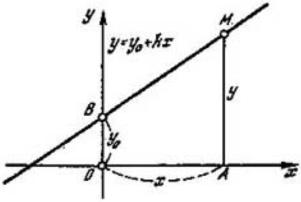

Fig. 51

Como ejemplos de magnitudes linealmente dependientes se tienen la distancia de un punto en movimiento rectilíneo y uniforme al origen y el tiempo; la longitud de una barra y su temperatura, etc.

3. Dependencia inversamente proporcional

DEFINICIÓN. *Dos magnitudes variables son* ***inversamente proporcionales****, si al variar una de ellas en cierta relación, la otra varía en relación inversa.*

Como ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales pueden servir: la velocidad de un movimiento uniforme y el tiempo necesario para recorrer una distancia dada; el volumen ocupado por un gas (a temperatura constante) y la presión; la intensidad de la corriente (con fuerza electromotriz constante) y la resistencia del circuito, etc.

Sean x e y magnitudes inversamente proporcionales, y supongamos que cuando $x = 1$, $y = k$. De acuerdo con la definición tenemos

$$\frac{x}{1} = \frac{k}{y},$$

de donde

$$y = \frac{k}{x}.$$

La gráfica de esta función cuando $k > 0$ es una hipérbola equilátera (o una de sus ramas) (fig. 52). Si $k < 0$ obtendremos una hipérbola situada en los cuadrantes II y IV.

4. *Dependencia cuadrática*

En el caso más simple, la *dependencia cuadrática* tiene la forma

$$y = kx^2, \tag{3}$$

donde k es una magnitud constante. La gráfica de la función (3) es una parábola (o una de sus ramas) (fig. 53); cuando $k > 0$ ella se sitúa encima del eje Ox, y por debajo del eje Ox, cuando $k < 0$.

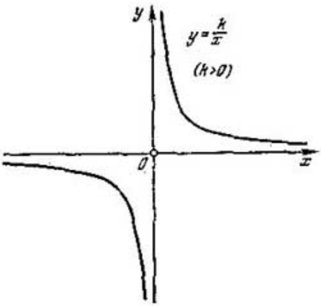

Fig. 52

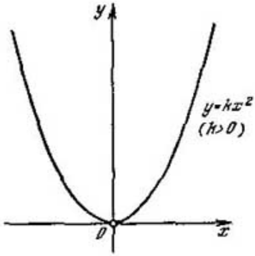

Fig. 53

De ejemplos de magnitudes entre las cuales existe dependencia cuadrática pueden servir: la superficie y el radio de un círculo; el camino recorrido por un cuerpo en caída libre y el tiempo de caída, etc.

5. Dependencia sinusoidal

La *dependencia sinusoidal*

$$y = A \operatorname{sen} (\omega x + \varphi) \tag{4}$$

desempeña un papel importante durante el estudio de los procesos periódicos.

La función (4) se denomina *armónica*; las constantes correspondientes (parámetros) A, ω, φ se llaman, respectivamente, *amplitud*, *frecuencia* y *fase inicial*. La función y es **periódica con período**

$$T = 2\pi/\omega,$$

es decir, los valores de la función $y = y(x)$ en los puntos x y $x + T$, que se diferencian en un período, son iguales. Tenemos efectivamente

$$y(x + T) = A \operatorname{sen} [\omega (x + T) + \varphi] =$$
$$= A \operatorname{sen} (\omega x + 2\pi + \varphi) =$$
$$= A \operatorname{sen} (\omega x + \varphi) = y(x).$$

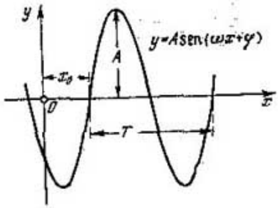

Fig. 54

La función armónica (4) puede ser reducida a la forma

$$y = A \operatorname{sen} \omega (x - x_0),$$

donde $x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$. De aquí deducimos que la gráfica de la función armónica es una **sinusoide deformada** de amplitud A y período T, obtenida por la traslación a lo largo del eje Ox en un valor x_0 (fig. 54) (véanse más detalles en el § 9).

Como ejemplos de la dependencia sinusoidal pueden citarse: la desviación de las partículas de aire respecto a la posición de equilibrio en el caso de propagación de una onda sonora de amplitud constante y el tiempo; la intensidad de una corriente sinusoidal monofásica y el tiempo, etc.

§ 4. Representaciones de una función

Se consideran generalmente tres modos de representación de una función: analítico, tabular y gráfico.

1. Modo analítico de representación de una función

Si una función se halla expresada mediante una fórmula, se dice que es *analítica*. Por ejemplo, en la fórmula del volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

el volumen V es función del radio R dada analíticamente.

Si la función

$$y = f(x)$$

está representada por una fórmula, su **característica** f designa el conjunto de operaciones a efectuar en un orden determinado sobre el valor del argumento x para obtener el valor correspondiente de la función y [o, lo que es lo mismo, el valor de la función $f(x)$].

Sea, por ejemplo,

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}. \tag{1}$$

Aquí la característica f designa el siguiente conjunto de operaciones:

1) elevación al cuadrado del argumento x;

2) sustracción de una unidad del resultado obtenido;

3) extracción de la raíz cúbica de la diferencia correspondiente.

Conociendo la característica f y dándole al argumento x distintos valores, obtendremos los valores correspondientes de la función $f(x)$. Así, por ejemplo, para nuestra función (1) tenemos

$$f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2 - 1} = 0,$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 - 1} = -1, \quad f(1) = \sqrt[3]{1^2 - 1} = 0,$$

etc.

Un sentido análogo obtienen las expresiones

$$f(x+h) = \sqrt[3]{(x+h)^2 - 1},$$

etc.

En algunos casos, la función puede ser representada por varias fórmulas.

Sea, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ x, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

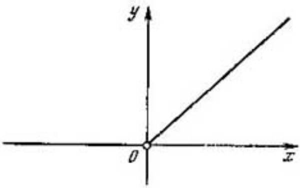

Fig. 55

Esta función es perfectamente definida, porque para cada valor del argumento x podemos indicar el valor correspondiente de la función $f(x)$. A saber, si x es negativo o nulo, $f(x)$ será igual a cero. Por ejemplo,

$$f(0) = 0, \quad f(-1/2) = 0, \quad f(-1) = 0,$$

etc.

Si x es positivo, $f(x)$ será igual al valor del argumento. Por ejemplo,

$$f(3/4) = 3/4, \quad f(5) = 5,$$

etc.

De este modo, dos fórmulas

$$f(x) = 0, \quad \text{si} \quad x \leqslant 0,$$

y

$$f(x) = x, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

determinan una función (fig. 55).

2. Modo de representación tabular de una función

Supongamos que deseamos establecer la dependencia entre la temperatura media anual $t°$ y la altura h de la región sobre el nivel del mar expresada en kilómetros. Introducimos los resultados de nuestras observaciones en la tabla:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$t°$	$+7,9$	$+4,6$	$+0,1$	$-5,0$	$-10,7$	$-16,9$	$-23,7$	$-30,8$	$-38,0$

Esta tabla muestra que la temperatura media anual varía junto con la altura de la región sobre el nivel del mar; a cada valor de la altura h le corresponde un valor determinado de la temperatura $t°$. Por consiguiente, la temperatura media anual $t°$ es función de la altura h de la región sobre el nivel del mar; en este caso la correspondencia entre las variables $t°$ y h se establece en la tabla. Este modo de representar la función se llama *tabular.*

Conociendo la expresión analítica de una función, la misma se puede representar en forma de una tabla para los valores del argumento que nos interesan. Sea dada, por ejemplo, la función

$$y = x^3.$$

Dando a x una serie de valores numéricos y calculando los valores correspondientes de y, obtendremos la tabla:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...

Podemos ver que si la función está dada analíticamente (es decir por una fórmula), es posible construir para ella una tabla o, como dicen, *tabular la función.*

Se tabulan generalmente funciones que tienen una expresión analítica complicada (es decir, expresadas por una fórmula complicada), pero se encuentran con frecuencia en la práctica. Así, por ejemplo, se utilizan ampliamente las siguientes tablas: de funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, etc., (tablas de valores trigonométricos naturales), $\log x$ (tablas de logaritmos), etc. Para estas funciones existen fórmulas expresadas mediante series infinitas (véase el § 12 del cap. XXI) pero ellas son muy complicadas para un empleo práctico.

Surge la pregunta, de si es siempre posible pasar de la representación tabular de una función a su expresión analítica, es decir, expresarla por medio de una fórmula.

Antes de responder a esta pregunta, cabe señalar que la tabla no da todos los valores de la función y que los valores intermedios pueden ser solamente hallados aproximadamente (por la llamada *interpolación de la función*). Por eso, en el caso general, es imposible hallar una expresión analítica precisa de la función a partir de su representación tabular.

Sin embargo siempre se puede construir una fórmula, o incluso varias, que den, para los valores del argumento que figuran en la tabla, los valores tabulares correspondientes de la función. Este tipo de fórmula se llama *de interpolación.*

3. *Representación gráfica de una función*

Las representaciones analítica y tabular no dan una imagen evidente. Esta insuficiencia se salva con la *representación gráfica* de la función $y = f(x)$, cuando la correspondencia entre el argumento x y la función y se establece por medio de una gráfica (fig. 56). Para hallar aquí el valor de la función y correspondiente al valor del argumento, por ejemplo, x, hace falta trazar el segmento $OA = x$ sobre el eje Ox en el

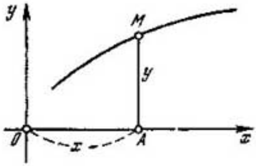

Fig. 56

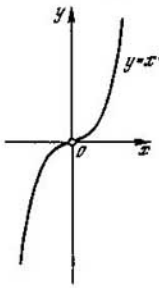

Fig. 57

sentido correspondiente y luego trazar la perpendicular AM hasta su intersección con la gráfica. Si se toma la longitud de esta perpendicular con el signo conveniente, obtenemos el número

$$y = f(x).$$

Dando a x diferentes valores, obtendremos, con este procedimiento, los valores correspondientes de la función y que, si es necesario, pueden ser escritos en una tabla.

Un ejemplo de representación gráfica de la función es el llamado *barograma* (diagrama obtenido con ayuda de un aparato autorregistrador llamado barógrafo) que indica gráficamente la variación de la presión atmosférica en función del tiempo.

Para construir la gráfica de la función $y = f(x)$ dada analíticamente es necesario componer una tabla de valores x e y de esta función y luego tomando x como abscisa e y como ordenada del punto, se construye el sistema de puntos del plano. Si unimos estos puntos por medio de una línea, cuya forma tiene en cuenta, en la medida de lo posible, el carácter de los valores intermedios de la función, obtendremos la representación gráfica aproximada de esta función.

Por ejemplo, utilizando los datos de la tabla de la pág. 75 construimos el gráfico de la función

$$y = x^3$$

(*parábola cúbica*) (fig. 57).

§ 5. Noción de la función de varias variables

La noción de función de una sola variable se generaliza naturalmente en el caso de varias variables.

DEFINICIÓN. *Una magnitud variable u se llama función (unívoca)* ***de varias variables****, por ejemplo, de dos variables: x e y, si a cada conjunto considerado de valores (admisibles) de x e y le corresponde un valor determinado de la magnitud u.*

Aquí x e y se denominan *variables independientes* o *argumentos*; el conjunto de sus valores considerados se llama *dominio de definición* o *dominio de existencia* de la función u. El dominio de existencia de la función de dos variables x e y es, en general, cierto conjunto de puntos del plano Oxy.

El hecho de que u es la función de x e y se escribe generalmente así:

$$u = f(x, y),$$

donde f es la *característica de la función*. Claro está que en vez de f se puede utilizar cualquier otra letra.

EJEMPLO 1. El área U de un rectángulo, cuyos lados son iguales a x e y se expresa por la fórmula

$$U = xy.$$

Es evidente que U es una función de dos argumentos determinada en el dominio $x > 0$, $y > 0$.

EJEMPPO 2. La ecuación del estado de un gas tiene la forma

$$vp = RT,$$

donde v es el volumen ocupado por la masa dada del gas; p, la presión del gas; T, la temperatura absoluta, y R es una constante. Resolviendo esta ecuación respecto a v, obtendremos

$$v = \frac{RT}{p}.$$

Vemos que v es función de dos variables: de la presión p y de la temperatura absoluta T; esta función está definida en el dominio $p > 0$, $T > 0$.

La función u de tres variables x, y, y z puede designarse así:

$$u = f(x, y, z).$$

EJEMPLO 3. El volumen $V = xyz$ y la superficie total $S = 2xy + 2yz + 2zx$ de un paralelepípedo rectangular, cuyas dimensiones lineales x, y, z son las funciones de tres argumentos x, y, z definidas en el dominio $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

§ 6. Noción de función implícita

Una función se llama *explícita*, si está dada por una fórmula, cuyo segundo miembro no contiene ninguna variable dependiente. Por ejemplo, la función $y = x^2$ es explícita.

Una función y del argumento x se llama *implícita*, si está dada por la ecuación

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

no resuelta respecto a la variable dependiente. Por ejemplo, la función y $(y > 0)$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es implícita.

Para expresar en forma explícita la función y dada por la ecuación (1) es necesario resolver esta ecuación respecto a y. Puesto que para un valor dado del argumento x la ecuación (1) puede tener muchas (incluso una infinidad de) raíces y, la función implícita es, en general, una función multívoca.

El conjunto de valores del argumento x, para cada uno de los cuales la ecuación (1) posee, por lo menos, una raíz real y, representa el *dominio de existencia* de la función implícita correspondiente. Cabe hacer notar que no toda ecuación (1) define una función implícita. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

no define evidentemente una función (en el dominio real).

EJEMPLO. Sea que x e y están vinculados por la ecuación

$$x^2 + y^3 = 1.$$

Aquí y es una función implícita del argumento x. Resolviendo esta ecuación respecto a y obtendremos

$$y = \sqrt[3]{1 - x^2}.$$

Esta última fórmula nos da y como función explícita de x.

A veces resulta difícil resolver la ecuación (1) respecto a y. Por ejemplo, la *ecuación de Kepler*

$$y - \varepsilon \operatorname{sen} y = x \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

no puede ser resuelta con procedimientos elementales respecto a y. En este caso, la función y se estudia utilizando directamente la ecuación que la define.

§ 7. Función recíproca

Sea y una función del argumento x:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Dando a x valores, obtendremos los correspondientes de y. Sin embargo, considerando y como argumento, y x, como función, se pueden asignar valores a y, calculando los valores correspondientes de x. En tal caso, la ecuación (1) definirá x como una función implícita de y. Esta última función se llama *función recíproca* o *inversa* respecto a la función dada y.

Suponiendo que la ecuación (1) está resuelta respecto a x obtendremos la expresión explícita de la función recíproca

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

donde la función $\varphi(y)$ satisface, para todos los valores admisibles de y, la condición

$$f[\varphi(y)] = y. \tag{3}$$

EJEMPLO 1. En la fórmula del volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{4}$$

el radio R es el argumento, el volumen V, la función. Al resolver la ecuación (4) respecto a R, obtendremos la función recíproca de la función dada:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

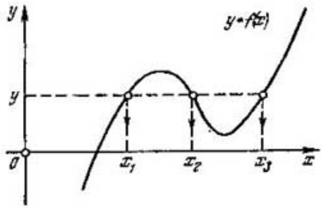

Fig. 58

A veces se usan designaciones normalizadas: se entiende como x la variable independiente; como y, la función, es decir, la variable dependiente. En tal caso, la función recíproca debe ser escrita así:

$$y = \varphi(x).$$

Por ejemplo, se puede decir que las funciones $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ son recíprocas.

La función recíproca de una función unívoca puede ser **multívoca** (fig. 58), es decir, a un valor dado de y pueden corresponder varios valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la función recíproca $x = \varphi(y)$ (fig. 58). En ciertos casos se logra obtener una función recíproca unívoca, introduciendo en sus valores posibles restricciones suplementarias.

EJEMPLO 2. La función biunívoca $x = \pm\sqrt{y}$ es recíproca respecto a la función $y = x^2$. Si convenimos tomar para la raíz sólo el valor aritmético, la relación recíproca será una función unívoca.

Es evidente que la función recíproca respecto a la función (2) es la función (1). Por eso las funciones f y φ ligadas por la relación (3), son **recíprocamente inversas.** Una de ellas se llama *función directa* y la otra, *función inversa*.

Notemos que una misma curva

$$y = f(x)$$

representa el gráfico de la función dada y el gráfico de su función recíproca, según estén trazados los valores del argumento, sobre el eje Ox o sobre el eje Oy.

Si nos ponemos de acuerdo en designar la variable independiente con x y la variable dependiente con y, entonces, para obtener del gráfico de la función dada $y = f(x)$ el de su función recíproca $y = \varphi(x)$ es suficiente reflejar de forma especular el primer gráfico respecto a la bisectriz de los cuadrantes I y III de las coordenadas (fig. 59).

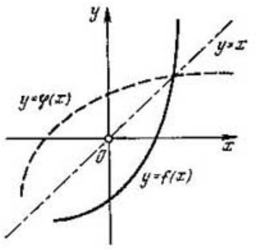

Fig. 59

§ 8. Clasificación de funciones de un solo argumento

En dependencia de la naturaleza de las operaciones que se deben efectuar sobre el valor del argumento, a fin de obtener el valor correspondiente de la función, se establece la siguiente clasificación de las funciones.

1) Si las operaciones a realizar sobre el argumento x y sobre ciertas constantes son adiciones, sustracciones, multiplicaciones, elevaciones a potencias enteras y positivas (un número finito de veces), se obtiene una *función racional entera* o *polinomio*. La forma general de esta función es:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

donde m es un número entero positivo o igual a cero, y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$, son números constantes.

2) La función representada en forma del cociente de la división de dos funciones racionales enteras

$$R(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

se llama *función racional fraccionaria.*

El conjunto de las funciones racionales enteras y fraccionarias forma la clase de las *funciones racionales.*

3) Si además de las cinco operaciones algebraicas arriba indicadas, se efectúa sobre el argumento un número finito de extracciones de las raíces, y el resultado obtenido no es una función racional, se

obtiene una *función irracional*. Por ejemplo,

$$f(x)=\sqrt{\frac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}}+(\sqrt[5]{x}+1)^3.$$

Aquí por raíz se entiende generalmente su valor aritmético.

El conjunto de funciones racionales enteras y fraccionarias forma la clase de las *funciones algebraicas explícitas*.

4) En el caso más general, se llama *función algebraica* a una función multívoca implícita definida por la ecuación

$$p_0(x)\,y^n+p_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y+p_n(x)=0,$$

donde n es un número entero positivo y los coeficientes $p_0(x)$, $p_1(x)$, . . ., $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ son funciones racionales enteras de x, y el coeficiente $p_0(x)$ no es idénticamente igual a cero [1]). Por ejemplo, la raíz de la ecuación $y^5+y-x^2=0$ es una función algebraica. Notemos que esta función no es explícita, ya que la ecuación algebraica de la potencia superior a cuatro no puede ser, en general, resuelta en radicales.

5) Toda función no algebraica se llama *función trascendente*.

Las funciones trascendentes más simples (llamadas *funciones trascedentes elementales*) son:

a) la función exponencial a^x, donde a es un número distinto de uno;

b) la función logarítmica $\log_a x$, donde $a>0$ y $a\neq 1$;

c) las funciones trigonométricas: sen x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x;

d) las funciones trigonométricas inversas: Arcsen x, Arccos x, Arctg x, Arcctg x, Arcsec x, Arccosec x.

Las funciones algebraicas, trascendentes elementales y sus combinaciones finitas se llaman *funciones elementales*. Éstas son las principales funciones que consideraremos a lo largo de nuestro curso.

Señalemos que en nuestro curso utilizaremos, como regla, solamente funciones elementales unívocas, imponiendo, si hace falta, restricciones suplementarias a las funciones multívocas que se examinen.

§ 9. Gráficas de las funciones elementales principales

Mostraremos aquí las gráficas de algunas funciones elementales fundamentales.

I. Función potencial

$$y=x^n, \tag{1}$$

donde n es un número entero.

Esta función se define para $-\infty<x<+\infty$, si $n\geqslant 0$ y para $0<|x|<+\infty$, si $n<0$.

---

[1]) Las funciones algebraicas generalmente son consideradas en un dominio complejo.

Si $n \geqslant 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), las gráficas de las funciones (1) representan **parábolas**, respectivamente, de grados cero, primero, segundo, etc. (fig. 60).

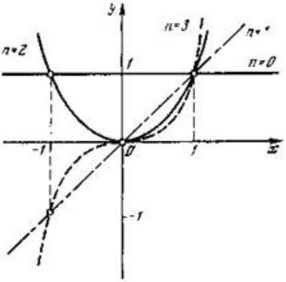

Fig. 60

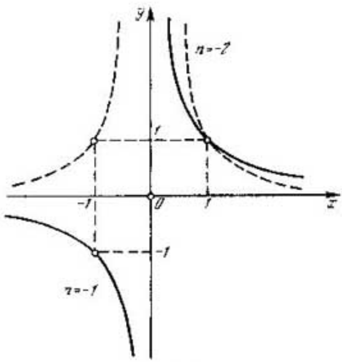

Fig. 61

Si $n < 0$ ($n = -1, -2, \ldots$), las gráficas de las funciones (1) representan hipérbolas de diversos grados (fig. 61).

II. Función radical

$$y = \sqrt[n]{x}, \tag{2}$$

donde n es un número natural.

El dominio de definición de la función: $0 \leqslant x < +\infty$ para n par y $-\infty < x < +\infty$ para n impar.

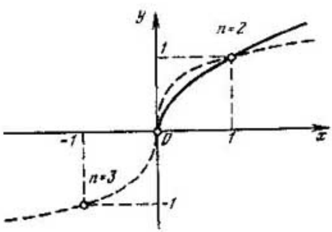

Fig. 62

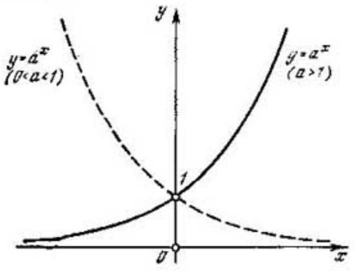

Fig. 63

Puesto que $x = y^n$, la función (2) es recíproca respecto a la función potencial (1). Por eso, las gráficas de las funciones radicales son parábolas o sus partes de distintos grados n (fig. 62).

III. Función exponencial

$$y = a^x,$$

donde a es un número constante, $a > 0$, $a \neq 1$.

Esta función está definida para todos los valores de x. La función es positiva y crece monótonamente desde 0 hasta $+\infty$ cuando $a > 1$ y decrece monótonamente desde $+\infty$ hasta 0, cuando $0 < a < 1$ (fig. 63).

IV. Función logarítmica

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1). \quad (3)$$

El dominio de definición es

$$0 < x < +\infty.$$

Puesto que la fórmula (3) da

$$x = a^y,$$

la función logarítmica es recíproca respecto a la exponencial. Por eso la gráfica de la función logarítmica se obtiene de la función exponencial con ayuda de la representación especular de esta última respecto a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III de las coordenadas (fig. 64).

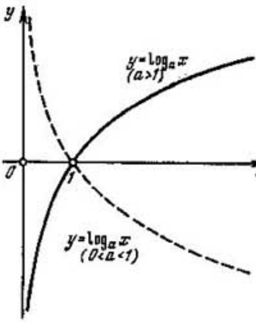

Fig. 64

V. Funciones trigonométricas

En las matemáticas superiores el argumento de una función trigonométrica es un número que puede ser considerado como la medida del ángulo correspondiente expresado en radianes.

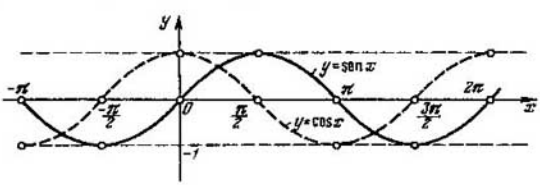

Fig. 65

Nos limitaremos a describir las funciones trigonométricas más importantes.

a) $$y = \operatorname{sen} x.$$

Esta función está definida para todos los valores de x. La función $\operatorname{sen} x$ está acotada ($|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$) y es periódica con período 2π (es decir, los valores de la función se repiten cuando el argumento varía en 2π; su gráfica es una *sinusoide* (fig. 65).

b) $$y = \cos x.$$

Esta función posee propiedades análogas a las de sen x. Su gráfica es una *cosinusoide*, que es una sinusoide dezplazada hacia la izquierda a $\frac{\pi}{2}$ (fig. 65). Efectivamente, $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $$y = \operatorname{tg} x.$$

Esta función está definida para $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Su período es igual a π. La gráfica de la función es una *tangensoide* (función tangente) (fig. 66).

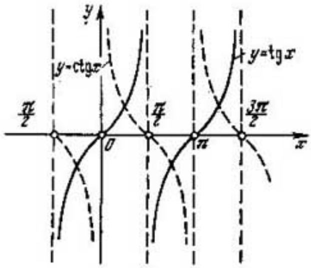

Fig. 66

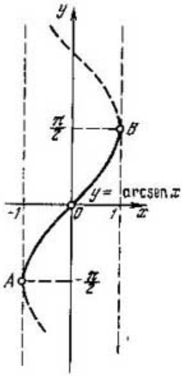

Fig. 67

d) $$y = \operatorname{ctg} x.$$

Esta función está definida para $x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Su período es igual a π. La gráfica de la función es una *cotangensoide* geométricamente idéntica a la de la tangensoide (fig. 66).

VI. Funciones trigonométricas inversas

a) $$y = \operatorname{arcsen} x, \tag{4}$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2, \tag{5}$$

cuyo seno es igual a x:

$$\operatorname{sen} y = x \tag{6}$$

(***significado principal***). La función (4) está unívocamente definida sobre el segmento $[-1, 1]$; su gráfica es una parte de la sinusoide (el arco AB en la fig. 67).

Si se invierte la igualdad (6), sin imponer la condición (5), es decir, si se hallan todos los valores de y, cuyos senos son iguales a x, obtenemos la **función multívoca**

$$y = \text{Arcsen } x,$$

cuyo gráfico es una sinusoide dirigida a lo largo del eje Oy. Basándose en las propiedades de los arcos que poseen el mismo seno, se deduce la fórmula

$$\text{Arcsen } x = (-1)^k \text{ arcsen } x + k\pi$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

b) $$y = \arccos x, \tag{7}$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$0 \leqslant y \leqslant \pi, \tag{8}$$

cuyo coseno es igual a x:

$$\cos y = x \tag{9}$$

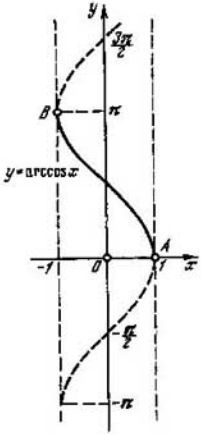

Fig. 68

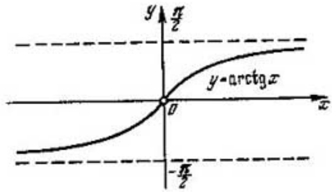

Fig. 69

(***significado principal***). La función (7) está unívocamente definida sobre el segmento $[-1, 1]$; su gráfica es una parte de cosinusoide (el arco AB en la fig. 68).

Resolviendo la ecuación (9) respecto a y, se obtiene, en el caso general, la **función multívoca**

$$y = \text{Arccos } x,$$

cuya gráfica es una cosinusoide dirigida a lo largo del eje Oy. En este caso es justa la fórmula

$$\text{Arccos } x = \pm \arccos x + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

c) $$y = \text{arctg } x, \tag{10}$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$-\pi/2 < y < \pi/2, \tag{11}$$

cuya tangente es igual a x:

$$\operatorname{tg} y = x \tag{12}$$

(significado principal).

La función (10) está unívocamente definida en el intervalo $-\infty < x < +\infty$; su gráfica es un arco de tangensoide (fig. 69).

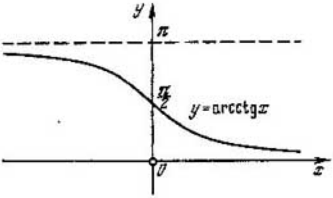

Fig. 70

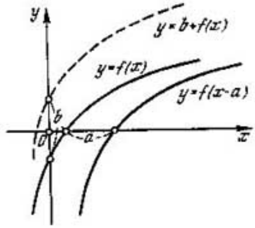

Fig. 71

Resolviendo la ecuación (12) respecto a y, se obtiene, en el caso general, la **función multívoca**

$$y = \operatorname{Arctg} x,$$

cuya gráfica está compuesta de un número infinito de tangensoides desplazadas (10). Es justa la fórmula

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

d) $$y = \operatorname{arcctg} x, \tag{13}$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$0 < y < \pi, \tag{14}$$

cuya cotangente es igual a x:

$$\operatorname{ctg} y = x. \tag{15}$$

La función (13) está unívocamente definida en el intervalo de $-\infty < x < +\infty$; su gráfica es un arco de cotangensoide (fig. 70).

Si en la ecuación (15) se hallan para cada valor de x todos los valores de y, cuya cotangente es igual a x, se obtiene la función multívoca

$$y = \operatorname{Arcctg} x, \tag{16}$$

cuya gráfica está compuesta de infinidad de cotangensoides desplazadas (13). Tenemos

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Las gráficas examinadas de funciones elementales principales deben ser memorizadas. Utilizándolas se puede construir fácilmente una gran cantidad de gráficas de funciones elementales, considerándolas como **«funciones elementales fundamentales transformadas»**.

Sea una función

$$y = f(x) \tag{17}$$

cuya gráfica es conocida (fig. 71).

Examinemos las transformaciones más importantes de esta gráfica.

1) La gráfica

$$y = f(x - a)$$

representa la gráfica inicial (17) **desplazada a lo largo del eje Ox a una magnitud igual a a** (fig. 71).

2) La gráfica

$$y = b + f(x)$$

se obtiene a partir de la gráfica (17), **trasladando esta última a lo largo del eje Oy a una magnitud igual a b** (fig. 71).

3) La gráfica

$$y = cf(x) \quad (c \neq 0) \tag{18}$$

se obtiene a partir de la gráfica de la función $f(x)$ **por compresión** en $1/c$ de las ordenadas de aquélla para $0 < c < 1$ y, **por extensión**

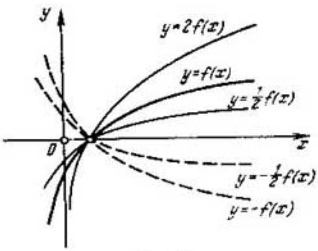

Fig. 72

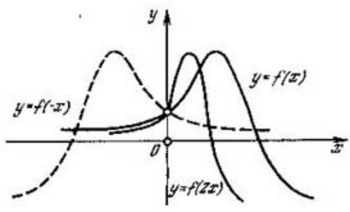

Fig. 73

en c veces de sus ordenadas, para $1 < c < +\infty$, conservando las abscisas correspondientes (fig. 72).

Si $-\infty < c < 0$, la gráfica (18) es la **representación especular** de la gráfica $y = -cf(x)$ **respecto al eje** Ox (fig. 72).

4) La gráfica

$$y = f(kx) \quad (k \neq 0) \tag{19}$$

se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ **aumentando** en $1/k$ veces las abscisas de sus puntos para $0 < k < 1$, y **dismi-**

nuyendo en k veces las abscisas de sus puntos para $1 < k < +\infty$, conservando sus ordenadas (fig. 73).

Si $-\infty < k < 0$ la gráfica (19) es una **imagen especular** de la gráfica

$$y = f(-kx)$$

respecto al eje Oy (fig. 73).

Las reglas indicadas son geométricamente evidentes, su demostración la dejamos al lector.

Combinando las transformaciones de 1) a 4), se pueden construir las gráficas de funciones relativamente complicadas a partir de gráficas de funciones simples.

EJEMPLO. Construir la gráfica de la función $y = 3 \text{ sen } 2x$.

De acuerdo con las reglas de transformación 3) y 4), esta gráfica es la sinusoide $y = \text{sen } x$, con las abscisas de sus puntos reducidas a la mitad y las ordenadas aumentadas al triple (en valor absoluto, conservando el signo, fig. 74).

Para construir la gráfica de una función es importante tener en cuenta *la simetría y la periodicidad de la gráfica.*

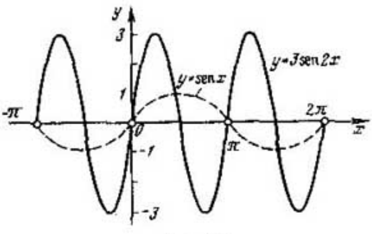

Fig. 74

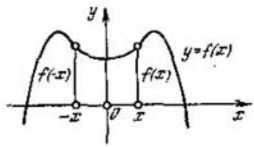

Fig. 75

DEFINICIÓN 1 *Una función $f(x)$ se llama **par**, si no cambia su valor cuando el signo del argumento es opuesto*, es decir, si

$$f(-x) = f(x).$$

Por ejemplo, las funciones $x^0 = 1$, x^2, $\cos x$, etc., son pares.

La gráfica de una función par $y = f(x)$ es evidentemente **simétrica respecto al eje** Oy (fig. 75). Por eso, en el caso de una funcóin par, es suficiente construir solamente la mitad derecha de la gráfica $(x \geqslant 0)$; su mitad izquierda $(x \leqslant 0)$ es una imagen especular de la mitad derecha respecto al eje de ordenadas.

DEFINICIÓN 2 *Una función $f(x)$ se llama **impar** si al cambiar el signo del argumento, cambia también el signo de la función, pero su valor numérico se conserva, es decir, si*

$$f(-x) = -f(x).$$

Por ejemplo, son funciones impares x, x^3, sen x, tg x, arcsen x, arctg x, etc.

La gráfica de una función impar $y = f(x)$ es evidentemente **simétrica respecto al origen de las coordenadas** (fig. 76). Por eso, para construir la gráfica de una función impar es suficiente trazar su mitad derecha ($x \geqslant 0$); la otra mitad de la gráfica ($x \leqslant 0$) se obtiene haciendo girar la mitad derecha en 180°.

DEFINICIÓN 3. *Una función $f(x)$ se llama* ***periódica****, si existe un número positivo T* (***período de la función***) *tal que*

$$f(x+T) \equiv f(x)$$

(fig. 77). En el § 3 del capítulo VI ya encontramos funciones periódicas; por ejemplo, sen x (período 2π), cos x (período 2π), tg x (período π), ctg x (período π), etc.

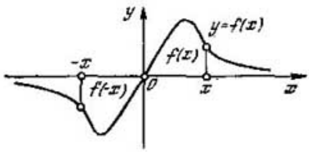

Fig. 76

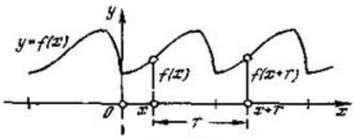

Fig. 77

Para construir una gráfica de una función periódica es suficiente con trazar sobre un segmento una longitud igual al período de esta función (*dominio principal*) y construir después la continuación periódica de la gráfica dando los mismos valores de las ordenadas a los puntos cuyas abscisas difieren en un número múltiplo del período.

§ 10. Interpolación de funciones

Examinemos la función $y = f(x)$ dada por las dos primeras columnas de la tabla siguiente

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
.	.	.	.
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	.
x_3	y_3	.	.

Suponemos que los valores tabulados . . ., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, . . . del argumento x son **equidistantes**; en otras palabras, la diferencia

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1}$$

es una magnitud constante (Δ es el símbolo de la diferencia). La magnitud h se llama *paso de la tabla*. Para estudiar la regularidad del comportamiento de la función y, completamos nuestra tabla con las *diferencias de primer orden* Δy (*primeras diferencias*)

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2}$$

Si la función $y = y_0 + kx$ es lineal, su diferencia $\Delta y_i = kh$ es una magnitud constante.

Se pueden componer de un modo análogo las *diferencias de segundo orden* (*segundas diferencias*)

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) =$$
$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

etc.

Si la función y es lineal, sus segundas diferencias $\Delta^2 y_i$ son iguales a cero. Para una función cuadrática $y = a + bx + cx^2$ sus segundas diferencias $\Delta^2 y_i$ son constantes (¡verificarlo!).

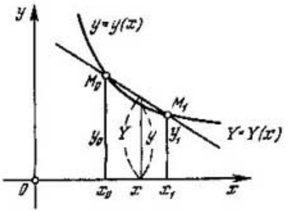

Fig. 78

Por *interpolación* se entiende la determinación aproximada de los valores de una función y, para valores intermedios del argumento x, no tabulados.

Supongamos que el paso h de la tabla sea pequeño y las diferencias Δy_i sean casi constantes. Sea x_0 el valor **menor** tabulado más cercano al valor no tabulado dado de x, es decir, $x_0 < x < x_1$. En el intervalo (x_0, x_1) la función y puede ser considerada aproximadamente como una Y lineal tal, que $Y(x_0) = y_0$ e $Y(x_1) = y_1$. Esto significa geométricamente que reemplazamos el arco $\overset{\frown}{M_0M_1}$ de la curva por la cuerda correspondiente $\overline{M_0M_1}$ (fig. 78). Puesto que el coeficiente angular de la cuerda $\overline{M_0M_1}$ es igual a

$$k = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

entonces

$$y \approx Y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \tag{4}$$

(*interpolación lineal*).

Al introducir la magnitud

$$\frac{x-x_0}{h}=t \qquad (5)$$

(«la distancia entre los puntos x y x_0 se mide en pasos»), se puede escribir la fórmula aproximada (4) así:

$$y=y_0+t\,\Delta y_0. \qquad (6)$$

Con ayuda de la fórmula (6) se puede efectuar una interpolación inversa, es decir, hallar el valor correspondiente del argumento x por el valor de la función y ($y_0 \leqslant y \leqslant y_1$). Efectivamente, tenemos

$$t=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}. \qquad (7)$$

De aquí, mediante la fórmula (5), obtenemos

$$x=x_0+th. \qquad (8)$$

EJEMPLO 1. Sea dada la función $y=y(x)$ en la tabla:

x	1	1,02	1,04
y	1.21	1,44	1,69

Efectuando la interpolación lineal hallar y (1,005). ¿Cuál es valor de x, si $y(x)=1{,}5$?

Aquí el paso $h=0{,}02$. Considerando que $x_0=1$, tenemos

$$t=\frac{1{,}005-1}{0{,}020}=\frac{1}{4},$$

de donde, mediante la fórmula (6), hallamos

$$y=1{,}21+\frac{1}{4}\cdot 0{,}02=1{,}215.$$

Para la interpolación inversa, consideramos que $x_0=1{,}02$ e $y_0=1{,}44$. De aquí, $\Delta y_0=1{,}69-1{,}44=0{,}25$. Por medio de las fórmulas (7) y (8), hallamos

$$t=\frac{1{,}5-1{,}44}{0{,}25}=\frac{0{,}06}{0{,}25}=0{,}24$$

y $x=1{,}02+0{,}24\cdot 0{,}02=1{,}0248$.

Notemos que para $x \in (x_0, x_1)$ se obtiene una fórmula de interpolación lineal análoga, si en vez del valor menor más cercano tabulado de x_0, se utiliza el valor **mayor** tabulado más cercano de x_1, lo cual es a veces más cómodo. A saber, tenemos

$$y \approx y_1+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_1). \qquad (4')$$

Para obtener resultados más precisos se recurre a veces a la *interpolación cuadrática*. Para eso se reemplaza la función y en el intervalo (x_0, x_2) por un trinomio cuadrado $\widetilde{Y}$ tal, que

$$\widetilde{Y}(x_0) = y_0, \quad \widetilde{Y}(x_1) = y_1, \quad \widetilde{Y}(x_2) = y_2, \tag{9}$$

donde x_0 sigue siendo el valor tabulado mínimo más cercano al valor dado de x que no figura en la tabla. Esto significa geométricamente que el arco $\overset{\frown}{M_0M_1M_2}$ del gráfico de la función $y = y(x)$ es reemplazado de modo aproximado por una parábola de eje vertical que pasa por los puntos M_0, M_1, M_2 (fig. 79).

Escribimos la función $\widetilde{Y}$ en la forma artificial siguiente:

$$\widetilde{Y} = a + b(x - x_0) + \\ + c(x - x_0)(x - x_1). \tag{10}$$

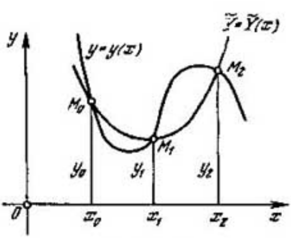

Fig. 79

Haciendo $x = x_0$, en virtud de la fórmula (9), obtenemos

$$\widetilde{Y}(x_0) = y_0 = a,$$

de donde

$$a = y_0. \tag{11}$$

De modo análogo, para $x = x_1$, tendremos

$$\widetilde{Y}(x_1) = y_1 = a + b(x_1 - x_0),$$

de donde, utilizando la fórmula (11) y teniendo en cuenta que $x_1 - x_0 = h$, hallamos

$$b = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}. \tag{12}$$

Por fin, para $x = x_2$ tenemos

$$\widetilde{Y}(x_2) = y_2 = a + b(x_2 - x_0) + c(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

de donde, puesto que $x_2 - x_0 = 2h$ y $x_2 - x_1 = h$, entonces, teniendo en cuenta las fórmulas (11) y (12), obtenemos

$$c = \frac{y_2 - y_0 - \frac{\Delta y_0}{h}\cdot 2h}{2h^2} = \frac{(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}. \tag{13}$$

De este modo, tenemos definitivamente

$$y \approx \widetilde{Y} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \tag{14}$$

(*fórmula de interpolación cuadrática*).

Suponiendo que

$$\frac{x-x_0}{h}=t \tag{15}$$

y

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{(x-x_0)-(x_1-x_0)}{h}=t-1, \tag{16}$$

obtendremos una fórmula de interpolación cuadrática más cómoda

$$y\approx y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0. \tag{17}$$

EJEMPLO 2. La función $y=y(x)$ está dada por dos primeras columnas de la tabla:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0,20	1,2214	626	33
0,25	1,2840	659	33
0,30	1,3499	692	
0,35	1,4191		

Utilizando la fórmula de interpolación cuadrática, hallar y (0,27).

En calidad de valor inicial, elegimos $x_0=0{,}25$ (los elementos necesarios de la tabla están subrayados). El paso de la tabla $h=$ $=0{,}05$.

Calculamos las diferencias $\Delta y_0=0{,}0659$ y $\Delta^2 y_0=0{,}0033$ (para abreviar, los decimales no se indican en la tabla).

Tenemos

$$t=\frac{0{,}27-0{,}25}{0{,}05}=0{,}4,$$

de donde, mediante la fórmula (17), obtenemos

$$y(0{,}27)=1{,}2840+0{,}4\cdot 0{,}0659+\frac{0{,}4\cdot(-0{,}6)}{2}\cdot 0{,}0033=$$
$$=1{,}2840+0{,}0264-0{,}0004=1{,}3100.$$

EJERCICIOS

1. En el triángulo ABC de base $AC=b$ y de altura $BD=h$ se traza una recta EF, paralela a AC y separada de ella a una distancia x. Expresar el área y del trapecio $AEFC$ como función de x. Determinar el dominio de definición de esta función y construir su gráfica.

2. Determinar el dominio de existencia de las funciones:

a) $y=\sqrt{x-2}$; b) $y=\sqrt{x^2-1}$; c) $y=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; d) $y=\log(1+x)$.

3. Hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-x)$, $f(1/x)$, $f(x+1)$, si $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

4. Sabiendo que $f(1) = -2{,}23$ y $f(2) = 1{,}05$, hallar el valor aproximado de $f(1,3)$ considerando que la función es lineal sobre el segmento $[1, 2]$ (*interpolación lineal*).

5. Los resultados de la medición de x e y están dados en la tabla:

x	10	15	25
y	10	20	40

Hallar la dependencia entre x e y, si se sabe que ésta es lineal.

6. Hallar una función racional entera de segundo grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

tal que $f(0) = -3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 5$.

7. Sean $\varphi(x) = x^2$ y $\psi(x) = 2^x$. Hallar $\varphi[\psi(x)]$ y $\psi[\varphi(x)]$.

8. Hallar $f[f(x)]$ y $f\{f[f(x)]\}$, si $f(x) = 1/(1-x)$.

9. Hallar las funciones explícitas recíprocas de funciones siguientes:

a) $y = 2x + 3$; b) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; c) $y = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$.

10. Construir las gráficas de las siguientes funciones elementales:

a) $y = x^{2/3}$; b) $y = \dfrac{1}{x-2}$; c) $y = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; d) $y = \log(x+2)$; e) $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; f) $y = \operatorname{sen}^2 x$ $\left(\textbf{Indicación: } \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)$; g) $y = 4\operatorname{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; h) $y = -\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; i) $y = -\operatorname{arcsen}\dfrac{x+1}{2}$; k) $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$.

11. Hallar los valores aproximados de las raíces reales de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$, y construir la gráfica de la función $y = x^3 - 3x + 1$.

12. Hallar el valor aproximado de la raíz más pequeña de la ecuación $\operatorname{tg} x = x$, construyendo las gráficas de funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = x$.

13. La función $y = y(x)$ está dada por la tabla:

x	0,6	0,7
y	1,8221	2,0138

Utilizando la interpolación, hallar $y(0{,}63)$. ¿Cuál es el valor de x, si $y(x) = 2$?

Capítulo VII

Teoría de los límites

§ 1. Números reales

En matemáticas por *magnitud* se entiende todo lo que puede ser medido; en este caso la naturaleza física de la magnitud no tiene importancia para nosotros. Por eso las conclusiones de las matemáticas poseen un carácter absolutamente **general**, y pueden ser aplicadas a todas las magnitudes. El proceso de medición de una magnitud consiste en su comparación con otra magnitud de la misma naturaleza, tomada como unidad. El resultado de medir una magnitud es un *número* que expresa el valor de la magnitud medida. Si la magnitud a medir y la unidad de medición son **conmensurables** (es decir, tienen una medida común), el resultado de la medición es un *número racional*

$$x = \frac{m}{n},$$

donde m y n son números enteros. Si la magnitud a medir y la unidad de medición son **no conmensurables** (es decir, no tienen una medida común), el resultado de la medición es un *número irracional* (por ejemplo, $\sqrt{2}$, π, etc.) que puede ser expresado en forma de una fracción decimal infinita no periódica

$$x = p_0, \quad p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$

Si en esta fracción se toma un número finito de cifras después de la coma, se obtendrán ciertos números racionales que expresarán con la precisión deseada el valor de la magnitud que se mide, por eso, para las medidas prácticas podemos conformarnos con los números racionales. Sin embargo, para enunciar las leyes generales es preciso utilizar números irracionales (por ejemplo, el área del círculo $S = \pi R^2$, donde π es un número irracional). Los números racionales e irracionales se llaman *números reales* [1]). Para la representación geométrica de los números reales se utiliza el eje numérico Ox (fig. 80), sobre el cual se sitúan en escala determinada los números racionales (los enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y los fraccionarios $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \ldots$ etc.) e irracionales. Como resultado todos los números reales se

---

[1]) En adelante, si no se menciona lo contrario, entenderemos como «número» al «número real».

sitúan sobre el eje numérico, ocupándolo enteramente, es decir, *a cada número real le corresponde un punto determinado del eje numérico, y viceversa, a cada punto del eje numérico le corresponde un número real.* Por eso en vez de las palabras un «número real» dicen frecuentemente un «punto».

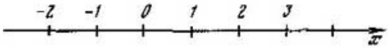

Fig. 80

Al conjunto de todos los números reales x se le agregan dos símbolos, $-\infty$ y $+\infty$, con las propiedades siguientes:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Este sistema de números reales se llama *ampliado*. Se supone que es justa la siguiente aritmética:

a) $x \pm \infty = \pm\infty$;

b) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$;

c) $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, si $x > 0$

y

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \text{ si } x < 0.$$

Los números reales pueden ser positivos o negativos. En algunos casos es preciso examinar el valor absoluto de un número real, ignorando su signo.

DEFINICIÓN *Llámase* ***valor absoluto*** (*o* ***módulo***) *de un número real al valor aritmético de este número.*

El valor absoluto del número a se designa así: $|a|$. Por ejemplo, $|-5| = 5$, $|+3| = 3$. En general, si x es un número real, entonces

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es evidente que para todo número x tiene lugar la igualdad $|-x| = |x|$.

Si los números reales están repartidos sobre el eje numérico, el valor absoluto $|x|$ de todo número x representa en sí la distancia desde el punto correspondiente A, de abscisa x hasta el origen O: $|x| = OA$ (fig. 81).

De aquí se deduce que, si el valor absoluto de un número x satisface la desigualdad

$$|x| < a \quad (\text{o} \quad |x| \leqslant a), \tag{1}$$

el número x se subordina a la acotación

$$-a < x < a \quad \text{(o, respectivamente, } -a \leqslant x \leqslant a), \qquad (2)$$

es decir, x pertenece al intervalo $(-a, a)$ (o al segmento $[-a, a]$). En particular, para todo número x es justa la desigualdad

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Recíprocamente, si tiene lugar una de las desigualdades dobles (2), se cumplirá una de las desigualdades (1).

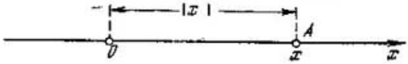

Fig. 81

Una afirmación más general es: si

$$|x - x_0| < a \quad (\text{o} \quad |x - x_0| \leqslant a),$$

entonces, tenemos

$$x_0 - a < x < x_0 + a \quad (\text{o} \quad x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a)$$

puesto que $|x - x_0|$ es igual a la distancia entre los puntos x y x_0. La reciprocidad es también justa (fig. 82).

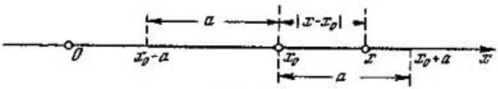

Fig. 82

El valor absoluto de un número real posee las propiedades siguientes:

1) ***El valor absoluto de una suma*** *de dos o varios números es inferior o igual a la suma de los valores absolutos de estos números.*

Efectivamente, supongamos primero que x e y son números reales de signos iguales, es decir, $xy \geqslant 0$. Es evidente que tenemos

$$|x + y| = |\pm|x| \pm |y|| = |\pm(|x| + |y|)| = |x| + |y|$$

(por ejemplo, $|-3 - 5| = |-(3 + 5)| = 3 + 5$).

Ahora, sean x e y números reales de signos contrarios, es decir, $xy < 0$. Supongamos para mayor certeza que $|x| \geqslant |y|$. En este caso tenemos

$$|x + y| = |\pm|x| \mp |y|| = |\pm(|x| - |y|)| = |x| - |y| < |x| + |y|$$

(por ejemplo, $|-5 + 2| = |-(5 - 2)| = 5 - 2 < 5 + 2$).

De este modo, para todo número real x e y es justa la desigualdad

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \tag{3}$$

donde el signo de igualdad tiene lugar solamente cuando los números x e y son del mismo signo.

OBSERVACION. La desigualdad (3) se extiende fácilmente al caso de un número cualquiera de sumandos, por ejemplo,

$$|x+y+z| = |(x+y)+z| \leqslant |x+y| + |z| \leqslant$$
$$\leqslant |x| + |y| + |z|.$$

2. ***El valor absoluto de la diferencia*** *de dos números es superior o igual a la diferencia de los valores absolutos de estos números.*

Efectivamente en virtud de la propiedad (1) tenemos

$$|x| = |y + (x-y)| \leqslant |y| + |x-y|.$$

De aquí

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|.$$

3) ***El valor absoluto del producto*** *de dos o más números es igual al producto de los valores absolutos de estos números*, por ejemplo,

$$|xy| = |x|\,|y|.$$

4) ***El valor absoluto de un cociente*** *es igual al cociente de los valores absolutos (si el divisor es distinto de cero)*, es decir, si $y \neq 0$, entonces

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

5) ***El valor absoluto de una potencia***, *entera positiva o entera negativa, es igual a la potencia correspondiente del valor absoluto de la base, es decir*,

$$|x^n| = |x|^n.$$

La demostración de las proposiciones 3) — 5), que son casi evidentes, la dejamos al lector.

§ 2. Errores de números aproximados

Al medir una magnitud, cuyo valor exacto es igual a a, obtenemos generalmente su *valor aproximado* x; la diferencia $a - x$ se llama *error* del número aproximado x. A a lo denominamos *número exacto* y a x, *número aproximado*. Si $x \leqslant a$, x se llama *aproximación por defecto*, si $x \geqslant a$, x se denomina *aproximación por exceso*.

DEFINICION 1. *El valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto del número a y un valor aproximado x de este número se llama* ***error absoluto*** Δ_0, *es decir*

$$\Delta_0 = |a - x|. \tag{1}$$

Si el valor exacto del número a es desconocido, la fórmula (1) no permite determinar el error absoluto Δ_0 del número aproximado x. En este caso se limita a una *estimación por exceso* del error absoluto Δ_0, es decir, se halla un número positivo Δ que difiere poco de Δ_0; un número tal, que

$$\Delta_0 \leqslant \Delta. \tag{2}$$

El número Δ que satisface la desigualdad (2) se llama *error absoluto límite* del número aproximado x. Es evidente que tenemos

$$x - \Delta \leqslant a \leqslant x + \Delta; \tag{3}$$

o, en forma abreviada

$$a = x \pm \Delta. \tag{3'}$$

Ocurre frecuentemente que son conocidos dos números aproximados x_1 y x_2 entre los cuales se encuentra el número exacto a:

$$x_1 \leqslant a \leqslant x_2.$$

En este caso se puede escribir

$$a = x \pm \Delta,$$

donde $x = (x_2 + x_1)/2$ y $\Delta = (x_2 - x_1)/2$.

El error absoluto, tomado sin tener en cuenta el valor que se mide, no caracteriza la precisión de una medición. Por ejemplo, si al medir la longitud de una mesa $a_1 = 2$ m y la longitud de un ferrocarril $a_2 = 200$ km, se ha cometido un mismo error absoluto $\Delta_1 = \Delta_2 = 0{,}1$ m, esto no significa que las mediciones son de igual calidad. El segundo resultado es evidentemente más exacto que el primero. Para juzgar acerca del grado de precisión de las mediciones se introduce la noción de *error relativo*.

DEFINICION 2. *Llámase* ***error relativo*** δ_0 *de un número aproximado x a la relación del error absoluto de este número respecto al valor absoluto del número exacto correspondiente a, es decir,*

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|a|}, \tag{4}$$

de donde

$$\Delta_0 = |a| \delta_0, \tag{5}$$

es decir, *el error absoluto de un número aproximado es igual al error relativo de éste multiplicado por el valor absoluto del número exacto correspondiente.*

Si el número exacto a es desconocido o muy complicado de hallar, se da la **estimación superior** del número δ_0. El número δ que satisface la desigualdad

$$\delta_0 \leqslant \delta,$$

se llama *error relativo límite* del número aproximado x. Es evidente que si $x > 0$, se puede hacer

$$\delta = \frac{\Delta}{x-\Delta},$$

donde Δ es un error absoluto límite del número x tal, que $x - \Delta > 0$.

EJEMPLO 1. ¿Cuál es el error relativo límite δ del número $x = 3,14$ que sustituye el número π?

Como $3,14 < \pi < 3,142$, el error absoluto Δ_0 del número x satisface la desigualdad $\Delta_0 < 0,002$. De aquí,

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{\pi} < \frac{0,002}{3,14} < 6,4 \cdot 10^{-4}.$$

Por consiguiente, se puede considerar que $\delta = 0,064\%$.

Como el número exacto a en numerosos casos es difícil de hallar, en la práctica se considera que $a \approx x$, donde x es un número aproximado suficientemente cercano a a, y se utilizan fórmulas aproximadas

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{|x|} \tag{4'}$$

y

$$\Delta_0 \approx |x|\,\delta_0 \tag{5'}$$

($\approx$ es el signo de igualdad aproximada). Las fórmulas correspondientes son igualmente justas para los errores límites.

EJEMPLO 2. El resultado de una medición con una precisión de 0,5% es igual a $x = 25,7$ m. Determinar el error absoluto límite de esta medición.

Según la fórmula (5') tenemos $\Delta \approx 25,7 \cdot 1/2 \cdot 0,01 \approx 0,13$. Por consiguiente, la magnitud a medir a puede ser considerada igual a $a = 25,7 \pm 0,13$ m.

Introduzcamos algunas nociones ligadas a la representación de números en el sistema decimal y limitemos nuestro análisis al caso de números enteros [1]). Toda cifra en la representación decimal de un número distinto de cero, y el cero, si éste no designa un orden decimal o no reemplaza una cifra incógnita o rechazada, se llama *cifra significativa* de este número. Por ejemplo, el número 0,0507 posee tres cifras significativas: 5, 0 y 7. La escritura del número 27 600 no permite juzgar sobre el número de cifras significativas; si este número tiene cuatro cifras significativas, debe ser escrito, por ejemplo, así: $2,760 \cdot 10^4$. Las cifras significativas de un número aproximado se dividen en cifras *exactas* e *inexactas*.

DEFINICION 3 *Se dice que un número aproximado tiene n* ***cifras significativas exactas*** *(unidades decimales contando de izquierda a derecha), si el error absoluto de este número no pasa 1/2 unidad de su n-ésimo orden.*

---

[1]) La influencia del signo puede ser considerada separadamente.

Por ejemplo, si el número $x = 2{,}356$ tiene tres cifras exactas 2, 3, 5, el error absoluto de este número es

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005.$$

Las tablas matemáticas se componen de tal modo, que todas las cifras indicadas en ellas son exactas. Por ejemplo, para las tablas de logaritmos de cuatro cifras se garantiza que el error absoluto de la mantisa de cada número es

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.$$

En algunos casos, el error absoluto de un número aproximado puede alcanzar la **unidad** de su n-ésimo orden; entonces se dice que este número tiene *n cifras exactas en sentido amplio*. Si el error absoluto de un número aproximado puede alcanzar dos unidades de su n-ésimo orden, se dice que las $n - 1$ primeras cifras significativas del número son *exactas* y la n-ésima es *dudosa*.

La noción de cifras exactas no debe ser entendida al pie de la letra, es decir, en tal sentido que si un número tiene n signos exactos, las n primeras cifras del número aproximado y las n primeras cifras del número exacto coinciden entre sí. Por ejemplo, si $a = 1$ es un número exacto y $x = 0{,}999$ es un número aproximado, todas las cifras de x son evidentemente exactas en sentido amplio, aunque ninguna de las cifras del número exacto a coincide con la cifra correspondiente del número aproximado dado. Sin embargo, en la mayoría de los casos esta noción puede ser verídica en sentido lato.

La cantidad de cifras exactas del número aproximado caracteriza la precisión de la medida y permite hallar el error relativo límite de este número.

EJEMPLO 3. El número aproximado $x = 8{,}3047$ tiene dos cifras exactas. ¿Cuál es el error relativo límite δ de este número?

Aquí el error absoluto es

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}05.$$

De acuerdo con la fórmula (4) tenemos una evaluación del error relativo

$$\delta_0 \approx \frac{0{,}05}{8{,}3047} = 0{,}006.$$

Por consiguiente, aproximadamente se puede considerar que $\delta = 0{,}6\%$.

Y a la inversa, conociendo el error relativo límite de un número aproximado se puede determinar la cantidad de sus cifras exactas.

EJEMPLO 4. El error relativo límite del número aproximado $x = 623{,}809$ es igual a $\delta = 0{,}2\%$. ¿Cuántas cifras exactas tiene este número?

Utilizando la fórmula (5'), hallamos el valor del error absoluto de nuestro número aproximado Δ_0 que es $\Delta_0 \approx 0{,}2 \cdot 0{,}01 \cdot 623{,}809 \approx 1{,}2$. Se puede considerar no muy rigurosamente que el número x tiene las tres primeras cifras exactas en sentido amplio.

En general, en la notación definitiva del número aproximado no hay razón alguna guardar cifras no exactas; en último caso, se puede tener una cifra de reserva. Por eso las cifras del número aproximado que no son exactas generalmente se rechazan o, como se dice, se **redondea** el número aproximado. Con frecuencia tenemos que redondear números exactos muy grandes.

REGLA DE REDONDEO. 1) *Si la primera cifra rechazada de un número (contando de izquierda a derecha) es **inferior** a 5, las cifras restantes se dejan sin cambios*; 2) *si la primera de las cifras rechazadas es **superior o igual** a 5, la primera de las cifras restantes se aumenta en una unidad.*

Por ejemplo, redondeando el número $\pi = 3{,}141592\ldots$ hasta cinco, cuatro, y tres cifras significativas, se obtienen respectivamente los números aproximados: 3,1416; 3,142 y 3,14.

Se considera especialmente un caso particular cuando se redondea una cifra de un número cuya última cifra es 5. En este caso *la última cifra conservada queda sin cambios si es par, y se aumenta en una unidad, si ella es impar (regla de las cifras pares).*

Hablando en general, al redondear un número aproximado, aumentamos su error absoluto añadiendo al error absoluto del número el *error de redondeo.*

Al aplicar la regla de redondeo es evidente que el error de redondeo no supera 1/2 unidad de la última cifra decimal conservada.

De esto se deduce que:

1) *si un número exacto está redondeado hasta n cifras significativas el número aproximado obtenido tendrá n cifras decimales exactas*;

2) *si un número aproximado que tiene n cifras decimales exactas está redondeado hasta n cifras significativas, el nuevo número aproximado obtenido tendrá n cifras decimales exactas en el sentido amplio.*

§ 3. Límite de una función

En el análisis matemático se estudian generalmente magnitudes **adimensionales**, es decir, privadas de contenido físico. Los conjuntos de valores de tales magnitudes representan en sí conjuntos de números. Partiendo de este hecho y utilizando los símbolos lógicos $\forall$ («para todo») y $\exists$ («existe», «se halla») se puede formalizar la definición de la función dada en el capítulo VI (§ 2).

DEFINICIÓN 1. *Sean X e Y dos conjuntos de números dados. Si en virtud de una correspondencia f que confronta los elementos del conjunto X a los elementos del conjunto Y, $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ (único), entonces y se denomina **función** unívoca de x definida en el conjunto X.*

Este hecho se designa brevemente del siguiente modo,

$$y = f(x) \quad (x \in X)^{1)}. \tag{1}$$

El **conjunto de valores de la función** (1) según el sentido de la definición está incluido en Y, es decir, $\{f(x)\} \subset Y$.

Se puede decir que la función f efectúa la *aplicación* del conjunto X en el conjunto Y (fig. 83).

Si $\{f(x)\} = Y$, es decir, todo elemento $y \in Y$ es valor de la función f, se puede decir que la función f *aplica* el conjunto X **en el conjunto** Y.

EJEMPLO. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ $(0 < x < 2\pi)$ aplica el intervalo $X = (0, 2\pi)$ sobre el segmento $Y = [-1, 1]$.

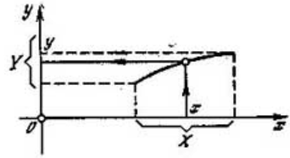

Fig. 83

Supongamos que la función $y = f(x)$ establece una **correspondencia recíprocamente unívoca** entre los elementos de los conjuntos X e Y, es decir, $\forall x \in X$ existe solamente una *imagen* $y = f(x) \in Y$ e inversamente, $\forall y \in Y$ se hallará una sola *preimagen* $x \in X$ tal, que $f(x) = y$. En este caso, la función $x = f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ que establece una correspondencia entre los elementos de los conjuntos Y y X se llama *función recíproca* de $y = f(x)$. En otras palabras, la función recíproca f^{-1}

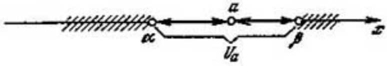

Fig. 84

es una aplicación del conjunto Y sobre el conjunto X. Es evidente que las funciones $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ son **mutuamente recíprocas**.

DEFINICION 2. *Entendemos por* **entorno** U_a *de un punto* a *(a es un número real) todo intervalo* $\alpha < x < \beta$ *que rodea este punto* $(\alpha < a < \beta)$ *y del cual se excluye el punto* a (fig. 84).

Fig. 85

Se entiende por *entorno* U_∞ del símbolo $\infty \equiv \pm\infty$, el exterior de todo segmento $[\alpha, \beta]$ (fig. 85), es decir, $U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$. Por supuesto, el símbolo ∞ no está contenido en su entorno.

[1]) Más exactamente por función (1) conviene entender la correspondencia misma f que a toda $x \in X$ hace corresponder su imagen $y \in Y$. En este caso $f(x)$ representa el **valor de la función** f en el punto x. Sin embargo, en la práctica el símbolo $f(x)$, donde x adquiere todos los valores posibles, se llama también **función**.

OBSERVACIÓN Habitualmente se entiende por entorno de un punto a todo intervalo $I_a = (\alpha, \beta)$ que contiene el punto a, es decir, si I_a es el entorno del punto a, entonces $I_a \ni a$. En nuestra definición del entorno U_a de un punto a excluimos (para mayor comodidad de los razonamientos ulteriores) al propio punto a, es decir, consideramos que $a \notin U_a$. Semejante conjunto de puntos se llama generalmente entorno **perforado** (o **puntuado**) del punto a.

Con cierta libertad se puede decir que el conjunto de puntos $U_a = (\alpha, a) \cup \cup (a, \beta)$ se llama **entorno del punto** a (en el sentido de nuestra definición). Esta definición de entorno concuerda con su compresión habitual. Por ejemplo, es natural suponer que en el entorno de la ciudad de Moscú no entra la propia ciudad; máxima que al definir los entornos **unilaterales** del punto a: $U_a^- = (\alpha, a)$ (*entorno izquierdo*) y $U_a^+ = (a, \beta)$ (*entorno derecho*), el punto a se excluye siempre (véase el § 4).

Entonces, en adelante por *entorno* de un punto a, si no se estipula lo contrario, entenderemos todo intervalo que rodea este punto, sin incluir al punto.

En los casos cuando sea más comodo considerar que el entorno del punto a contiene este punto, lo llamaremos «entorno completo del punto a».

No es difícil convencernos de que: 1) la suma (unión) de un número cualquiera de entornos de un punto a y, 2) el producto (intersección) de un número finito de entornos de un punto a son también entornos de este punto.

Para un número positivo δ, el entorno U_a de un punto a será llamado δ-*entorno*, si $U_a = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, es decir, si

$$0 < | x - a | < \delta, \quad \forall x$$

(véase la fig. 86).

Sea $f(x)$ una función definida sobre un conjunto X. El punto a (a es finito) se denomina *punto límite* (*punto de acumulación*) de este

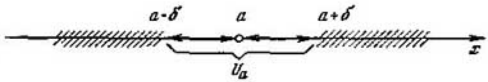

Fig. 86

conjunto, si en **todo** δ-entorno U_a se contiene una infinidad de elementos $x \in X$, es decir, $U_a \cap X \neq \varnothing \; \forall U_a$. En el caso más simple se puede suponer que la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto a, mientras que en el propio punto a la función $f(x)$ no debe tener obligatoriamente sentido.

Pues sea a un punto límite del conjunto X que es el dominio de la definición de la función $f(x)$.

DEFINICION 3. *Un número A se llama* ***límite de la función*** $f(x)$ *cuando $x \to a$ (a es un número), es decir,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* δ*-entorno* $U_a = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ *depende de* ε, *tal que*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad para \quad x \in U_a\,^{1)}. \tag{2}$$

Claro está que la desigualdad (2) debe cumplirse para todo x donde la función $f(x)$ está definida, es decir, para $x \in X \cap U_a$; según la definición del punto límite en cada entorno U_a el conjunto de tales valores no es vacío.

OBSERVACION 1. Según el sentido de la definición del límite de una función los números ε y $\delta = \delta(\varepsilon)$ pueden ser considerados como suficientemente pequeños.

DEFINICIÓN 4. *La afirmación*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

es equivalente a la siguiente:

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad para \quad |x| > \Delta, \tag{3}$$

donde $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ *depende de* ε.

El conjunto de todos los puntos x para los cuales $|x| > \Delta$ es evidentemente un entorno **simétrico** U_∞ del símbolo ∞; en este caso se supone que en estas condiciones para todo entorno de tal género $U_\infty \cap X \neq \varnothing$; se puede decir convencionalmente que ∞ es un punto límite del conjunto X, dominio de definición de la función $f(x)$.

Reuniendo las definiciones 2 y 3 se obtiene la definición general del límite de una función cuando $x \to a$, que sirve para un a finito, y para $a = \infty$.

Definición general del límite de una función. *Sea $f(x)$ una función definida sobre un conjunto X y sea a un punto límite de este conjunto. El punto A es el* ***límite de la función*** *$f(x)$ cuando $x \to a$ si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno U_a del punto a* [2]) *tal, que*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_a \cap X \tag{4}$$

(en este caso $U_a \cap X \neq \varnothing$).

Este hecho se escribe brevemente del modo siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \tag{5}$$

o

$$f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to a. \tag{5'}$$

---

[1]) Para simplificar la explicación utilizamos aquí el δ-entorno del punto a, es decir, su entorno **simétrico**. Sin embargo, la definición sigue en vigor para un entorno cualquiera $\widetilde{U}_a = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$, puesto que él contiene evidentemente el δ-entorno del punto a, donde $\delta = \min(a - \alpha, \beta - a) > 0$.

[2]) No obligatoriamente simétrico.

EJEMPLO 1. Mostrar que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4. \tag{6}$$

Supondremos, para comodidad de los razonamientos, que $1 < x < 3$, es decir, $|x-2| < 1$.

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. Tenemos

$$|x^2-4| = |x-2|\,|x+2| = |x-2|\,(x+2) < \\ < 5\,|x-2| < \varepsilon,$$

si $|x-2| < \varepsilon/5$ y $|x-2| < 1$, de donde se puede escribir

$$\delta = \text{mín}\left(\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right) > 0.$$

De este modo la igualdad (6) está demostrada. Observemos que aquí el δ-entorno del punto $x = 2$ es completo, es decir, contiene el punto 2.

EJEMPLO 2. Mostrar que

$$\frac{x}{x+1} \to 1 \text{ cuando } x \to \infty. \tag{7}$$

Tenemos

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{|x-(-1)|} \leqslant \frac{1}{|x|-|-1|} = \frac{1}{|x|-1} < \varepsilon,$$

si

$$|x| > 1 + \frac{1}{\varepsilon} = \Delta,$$

lo que es equivalente a la afirmación (7).

OBSERVACIÓN 2. No cabe pensar que la función $f(x)$ permanece constantemente inferior a su límite.

Son posibles tres casos: 1) la función no supera su límite, por ejemplo,

$$\frac{x^2}{x^2+1} \to 1 \text{ cuando } x \to \infty, \text{ además, } \frac{x^2}{x^2+1} < 1;$$

2) la función no es inferior a su límite, por ejemplo $x^2 \to 0$ cuando $x \to 0$ y $x^2 > 0$ cuando $x \neq 0$;

3) la función oscila alrededor de su límite tomando valores inferior o superior a este límite; por ejemplo,

$$2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 2 \text{ cuando } x \to \infty.$$

OBSERVACIÓN 3. Al considerar el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$ para simplificar la exposición se podría suponer que la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto a.

Pero, como muestran los ejemplos más simples, esto no es cómodo para las aplicaciones.

EJEMPLO 3. Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{x} \quad (x > 0).$$

Esta función está definida sobre el conjunto $X = (0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$, que no es un entorno de un punto alejado infinitamente ∞. Pese a todo, según nuestro punto de vista tenemos $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Señalemos una proposición simple.

TEOREMA 1. *Si una función $f(x) = c$ es constante en un entorno de un punto a, entonces,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

siendo c el límite único de esta función cuando $x \to a$.

Dejamos al lector la demostración de este teorema.

No debe confundirse la función que admite un límite con la **función acotada.**

DEFINICIÓN 5. *La función $f(x)$ se llama* **acotada** *sobre un conjunto dado X, si existe un número positivo M tal, que*

$$|f(x)| \leqslant M \quad para \quad x \in X.$$

Si tal número M no existe, la función $f(x)$ se llama *no acotada.*

LEMA. *La función $f(x)$ que tiene un límite A cuando $x \to a$, es acotada en un entorno del punto a.*

Efectivamente, eligiendo $\varepsilon = 1$, tenemos $|f(x) - A| < 1$ para $x \in U_a$, donde U_a es un entorno correspondiente del punto a. De aquí para todos los valores admisibles del argumento x [1]) obtenemos

$$|f(x)| = |[f(x) - A] + A| \leqslant |f(x) - A| + \\ + |A| < 1 + |A| = M,$$

si solamente $x \in U_a$.

OBSERVACIÓN 4. La afirmación recíproca no es justa: una función acotada puede no tener límite.

Por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es acotada para $0 < < |x| < +\infty$ y no tiene límite cuando $x \to 0$.

Prestemos atención a otro teorema que establece la relación entre las cotas de la función y su límite.

TEOREMA 2. *Sea que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ y*

$$M < f(x) < N \tag{8}$$

en cierto entorno U_a del punto a. Entonces,

$$M \leqslant A \leqslant N. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sea $A < M$. Suponiendo que $\varepsilon = = M - A > 0$, tendremos en cierto entorno V_a del punto a

$$|f(x) - A| < M - A, \quad \text{es decir,} \quad -(M - A) < f(x) - \\ - A < M - A.$$

---

[1]) Es decir, para $x \in U_a$, donde la función $f(x)$ tiene sentido.

De aquí, eligiendo $x \in V_a \cap U_a$, obtendremos $f(x) < M$, que contradice la desigualdad izquierda (8).

La suposición de que $A > N$ se refuta de modo análogo.

OBSERVACIÓN 5 El teorema 2 sigue siendo justo si en la desigualdad (8) una o las dos desigualdades no son rigurosas.

COROLARIO *Una función positiva no puede tener límite negativo.*

OBSERVACIÓN 6. La noción de límite de la función de una variable se extiende naturalmente a los casos de funciones de varias variables.

Examinemos, por ejemplo, una función de dos variables $f(x, y)$ dada sobre un conjunto X del plano Oxy.

Como *entorno* $U_{a,b}$ del punto $M_0(a, b)$ (a y b son finitos) tomamos el interior de un rectángulo $\{\alpha_1 < x < \beta_1, \alpha_2 < y < \beta_2\}$ construido alrededor del punto M_0 (es decir, $\alpha_1 < a < \beta_1$, $\alpha_2 < b < \beta_2$), del cual el punto M_0 se excluye.

En tal caso la afirmación

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$$

significa que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, U_{a,b}$ tal, que para $\forall\, M(x, y) \in U_{a,b}$ es justa la desigualdad

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon. \tag{10}$$

Claro está que en este caso se supone que en todo entorno $U_{a,b}$ se hallarán puntos $M(x, y)$ en los cuales la función $f(x, y)$ tiene sentido (*punto límite*).

Esta definición se generaliza fácilmente en el caso cuando a, b o ambos, son los símbolos ∞.

§ 4. Límites unilaterales de una función

En los anexos se encuentran **límites unilaterales de una función.**

Introduzcamos la noción de entornos **izquierdo y derecho** de un punto a (a es un número).

DEFINICIÓN 1. 1) *Cualquier intervalo $U_a^- = (\alpha, a)$, cuyo extremo derecho es el punto a, se llama **entorno izquierdo** de este punto.*

2) *De modo análogo, todo intervalo $U_a^+ = (a, \beta)$, cuyo extremo izquierdo es el punto a, se llama **entorno derecho** de este punto.*

La escritura simbólica $x \to a - 0$, significa que x toma valores pertenecientes a un entorno izquierdo del punto a, es decir, $x \to a$, $x < a$.

De modo análogo, la escritura $x \to a + 0$, significa que $x \to a$, $x > a$.

DEFINICIÓN 2. 1) *La fórmula*

$$\lim_{x \to a - 0} f(x) = A,$$

donde la función $f(x)$ está definida sobre un conjunto X, a es un punto límite (finito) de este conjunto, y A es un número, significa que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ U_a^-$ tal, que

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad para \quad x \in X \cap U_a^{-}\ ^{1)} \tag{1}$$

(límite izquierdo de la función).

2) *Análogamente, la fórmula*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = B$$

(donde B es un número) tiene el siguiente sentido:

$$|f(x) - B| < \varepsilon \quad para \quad x \in X \cap U_a^{+}\ ^{2)}, \tag{2}$$

donde $\varepsilon > 0$ es arbitrario y U_a^+ depende de ε (límite derecho de la función).

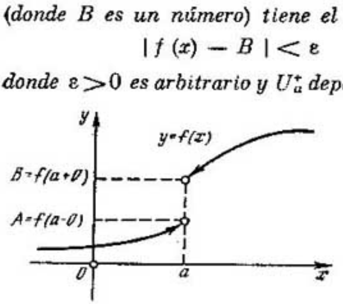

Fig. 87

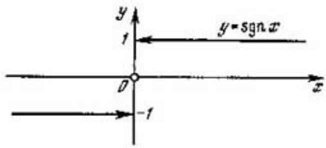

Fig. 88

Para los números A y B se utilizan las escrituras simbólicas (fig. 87):

$$A = f(a - 0) \quad \text{y} \quad B = f(a + 0).$$

Si la función $f(x)$ está definida en el punto a, su valor en este punto se designa con $f(a)$; claro está que éste puede no coincidir con los números $f(a - 0)$ y $f(a + 0)$.

DEFINICION 3. *Por* ***entorno del símbolo*** $-\infty$ *se entiende todo intervalo* $(-\infty, \alpha)$, *y por entorno del símbolo* $+\infty$, *todo intervalo* $(\beta, +\infty)$.

Las fórmulas

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A' \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = B'$$

significan, respectivamente, que

$$|f(x) - A'| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in (-\infty, \Delta_1),$$

y

$$|f(x) - B'| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in (\Delta_2, +\infty),$$

donde ε es arbitrario, $x \in X$ y $\Delta_i = \Delta_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$.

[1] Podemos, claro está, detenernos en el estudio de δ-entornos izquierdos del punto a: $U_a^- = (a - \delta, a)$, donde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

[2] Generalmente se supone que $U_a^+ = (a, a + \delta)$, donde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

EJEMPLO. Sea $f(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$ (fig. 88). Tenemos

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = 1^{2)}.$$

OBSERVACION 5. Para que la función $f(x)$ tenga un límite (cuando $x \to a$ (a es un número)), es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$f(a-0) = f(a+0).$$

§ 5. Límite de una sucesión

Se llama *sucesión*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

a la función $x_n = f(n)$ definida sobre el conjunto de números naturales $X = \{1, 2, \ldots\}$.

Por analogía con el límite de una función en un punto alejado infinitamente, se introduce la noción de **límite de una sucesion.** Precisamente, un número a es el *límite de la sucesión* x_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a^{\,2)},$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal número N dependiente de ε, que para todos los números naturales $n > N$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

EJEMPLO. Sea $x_1 = 0{,}9$, $x_2 = 0{,}99$, $x_3 = 0{,}999$, ...
Tenemos

$$x_n = 1 - \frac{1}{10^n} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. En este caso $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$, si $n > \log \frac{1}{\varepsilon} = N$. Por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

§ 6. Infinitésimos

DEFINICIÓN. *Una función $\alpha(x)$ se llama **infinitesimal** cuando $x \to a$ (a es un número real o el símbolo ∞), si para todo $\varepsilon > 0$ existe un*

---

[1]) Aquí para abreviar se utilizan las designaciones $-0 \equiv 0 - 0$ y $+0 \equiv 0 + 0$.

[2]) Hablando rigurosamente hay que escribir $n \to +\infty$. Pero como n es un numero natural, $n \to \infty$ y $n \to +\infty$ es lo mismo.

entorno U_a del punto a tal, que

$$|\alpha(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in U_a\text{ [1]}. \tag{1}$$

La condición (1) es equivalente a

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0, \tag{2}$$

es decir, *el límite de una función infinitesimal $\alpha(x)$ es igual a cero y viceversa*. En otras palabras

$$\alpha(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to a. \tag{3}$$

De modo análogo se define una función infinitesimal cuando $x \to a - 0$ y $x \to a + 0$, así como cuando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$.

OBSERVACIÓN Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{4}$$

en virtud de la definición del límite de la función, obtenemos que la diferencia $f(x) - A$ es un infinitésimo. De este modo, mediante la fórmula (4) obtenemos una representación de la función $f(x)$ que tiene el límite A cuando $x \to a$, de la forma

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{5}$$

donde $\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

Inversamente, si la fórmula (5) es justa para la función $f(x)$, el número A es el límite de esta función cuando $x \to a$. De la fórmula (5) se deduce un ***lema*** importante **sobre la conservación del signo de la función.**

LEMA *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = A \neq 0$, *el signo de la función $f(x)$ $(x \in X)$ coincide con el signo del número A en un entorno U_a del punto a.*

Efectivamente, sea $\varepsilon = |A| > 0$. Eligiendo el entorno U_a de tal modo que $|\alpha(x)| < |A|$ para $x \in U_a$, tendremos, en virtud de la igualdad (5),

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A\text{ [2]},$$

donde $x \in U_a \cap X$.

EJEMPLO. Un punto M se desplaza a lo largo del eje Ox siguiendo la ley de movimiento

$$x = 2^{-t} \operatorname{sen} t \quad (t \text{ es el tiempo}).$$

---

[1]) Como siempre la desigualdad (1) debe verificarse para aquelas x, con las que la función $\alpha(x)$ está definida. Además se supone que el conjunto de tales valores de x no es vacío en todo entorno U_a del punto a.

[2]) La escritura sgn x se lee: «signo de x». La función sgn x se define del modo siguiente: $\operatorname{sgn} x = +1$, si $x > 0$; $\operatorname{sgn} 0 = 0$; $\operatorname{sgn} x = -1$, si $x < 0$ (fig. 88).

Es evidente que $|x| \leqslant 2^{-t} < \varepsilon$, si $t > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = T$. Por eso

$$\lim_{x \to +\infty} x = 0.$$

De este modo, el punto M efectúa movimientos oscilatorios amortiguados alrededor del origen de las coordenadas.

OBSERVACIÓN Según el sentido de la definición (1) la función $f(x) \equiv 0$ es, en un entorno U_a, una **función infinitesimal**, cuando $x \to a$.

Subrayemos que ninguna función constante $f(x) = c \neq 0$, donde el número c es, en valor absoluto, tan pequeño como se desee, puede ser llamada función infinitesimal. Por eso las magnitudes físicas llamadas infinitesimales (por ejemplo, la masa de la molécula, las dimensiones del átomo, la carga del electrón, etc.) no son infinitésimos desde el punto de vista matemático.

§ 7. Infinitos

DEFINICIÓN. *Una función $f(x)$ se llama* ***infinita*** *cuando $x \to a$ (a es un número o el símbolo ∞):*

$$f(x) \to \infty \quad \textit{cuando} \quad x \to a, \tag{1}$$

si para cualquier $E > 0$ existe un entorno U_a del punto a tal, que para todos los valores admisibles del argumento x

$$|f(x)| > E \quad \textit{para} \quad x \in U_a. \tag{2}$$

Si $f(x)$ es una función infinita cuando $x \to a$, se escribe convencionalmente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

EJEMPLO. $\operatorname{tg} x \to \infty$ para $x \to \frac{\pi}{2}$.

Las escrituras

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

significan, respectivamente: $f(x) < -\text{E}$ para $x \in U_a$ y $f(x) > \text{E}$ para $x \in U_a$ ($\text{E} > 0$ es arbitrario y el entorno U_a depende de E).

Se demuestra fácilmente la afirmación siguiente.

LEMA. 1) *Si $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, entonces $1/f(x) \to 0$ cuando $x \to a$;* 2) *si $\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to a$* ($\alpha(x) \neq 0$ para $x \neq a$), *entonces $1/\alpha(x) \to \infty$, cuando $x \to a$.*

OBSERVACIÓN. Una función no acotada puede no ser infinita.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

no es acotada en todo entorno del punto $x = 0$, sin embargo, no es infinita cuando $x \to 0$.

§ 8. Teoremas fundamentales de infinitésimos

TEOREMA 1. *La suma algebraica de un número finito de funciones infinitesimales, cuando $x \to a$* [1]) *es una función infinitesimal, cuando $x \to a$.*

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar nos limitamos a examinar el caso de tres funciones: $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$ y $\gamma(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

Examinemos su suma algebraica

$$\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x).$$

Sea $\varepsilon > 0$ un número positivo cualquiera. En este caso $\varepsilon/3$ será también un número positivo.

En virtud de la definición de infinitésimo, existen tres entornos U'_a, U''_a, U'''_a caracterizados por el número $\frac{\varepsilon}{3}$ y tales que,

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } x \in U'_a, \tag{1}$$

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } x \in U''_a, \tag{2}$$

$$|\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } x \in U'''_a. \tag{3}$$

La intersección $U_a = U'_a \cap U''_a \cap U'''_a$ es un entorno del punto a en el cual **se verifican simultáneamente** las tres desigualdades (1), (2) y (3). De este modo

$$|\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |-\gamma(x)| =$$
$$= |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

si $x \in U_a$ y $x \in X$. Esto significa que

$$\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x) \to 0, \text{ cuando } x \to a.$$

El teorema queda demostrado.

En particular, *la diferencia de dos funciones infinitesimales cuando $x \to a$, es una función infinitesimal para $x \to a$.*

DEFINICION. *Se dice que una función $f(x)$ es **acotada** cuando $x \to a$, si ella está acotada en un entorno U_a del punto a.*

TEOREMA 2. *El producto de una función acotada, cuando $x \to a$, por una función infinitesimal, para $x \to a$ es una función infinitesimal para $x \to a$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$|f(x)| \leqslant M \quad (M > 0) \quad \text{para} \quad x \in V_a,$$

[1]) Aquí y en adelante en este párrafo supondremos que todas las funciones examinadas están a priori definidas sobre un **conjunto común** X, para el cual a es un punto finito. Los valores considerados de x son tales que $x \in X$.

donde V_a es un entorno del punto a, y sea

$$\alpha(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

En este caso, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un entorno $U_a \subset \subset V_a$, tal, que

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{para} \quad x \in U_a. \tag{4}$$

De aquí tenemos

$$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)|\,|\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

si $x \in U_a$. De este modo $f(x)\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

TEOREMA 3. *El producto de un número finito de funciones infinitesimales, cuando $x \to a$ es también una función infinitesimal cuando $x \to a$.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Examinemos primeramente dos funciones $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

Considerando que $0 < \varepsilon < 1$ y razonando como en el teorema 1 nos aseguramos de que existe un entorno U_a tal que

$$|\alpha(x)| < \varepsilon, \quad |\beta(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in U_a,$$

de donde

$$|\alpha(x)\beta(x)| = |\alpha(x)|\cdot|\beta(x)| < \varepsilon \cdot \varepsilon < \varepsilon, \quad \text{si} \quad x \in U_a.$$

Por consiguiente, $\alpha(x)\beta(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

2) Si tenemos, por ejemplo, tres funciones $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, $\gamma(x) \to 0$, cuando $x \to a$, entonces, utilizando la primera parte de la demostración, obtenemos $\alpha(x)\beta(x)\gamma(x) = [\alpha(x)\beta(x)]\gamma(x) \to \to 0$, cuando $x \to a$.

COROLARIO. *Una potencia entera positiva $[\alpha(x)]^n$ de una función infinitesimal $\alpha(x) \to 0$, cuando $x \to a$, es una función infinitesimal para $x \to a$.*

OBSERVACIÓN. En lo que se refiere a la relación de dos funciones infinitesimales $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$, cuando $x \to a$, ésta puede ser una función de comportamiento arbitrario cuando $x \to a$.

EJEMPLO. Sean $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x + x^2$, $\gamma(x) = x^2$. Aquí cuando $x \to 0$ tenemos

$$\alpha(x) \to 0, \quad \beta(x) \to 0, \quad \gamma(x) \to 0;$$

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2 + x \to 2; \quad \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = x \to 0; \ \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \frac{1}{x} \to \infty.$$

La división permite comparar entre sí funciones infinitesimales.

DEFINICION 1. *Dos funciones infinitesimales $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ cuando $x \to a$ son de igual orden, para $x \to a$, si su relación tiene un límite* *finito no nulo, es decir,*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0.$$

DEFINICIÓN 2. *Se dice que cuando $x \to a$ un infinitésimo $\beta(x)$ es de orden* **superior** *a otro infinitésimo $\alpha(x)$* (o lo que es lo mismo, *que el orden de un infinitésimo $\alpha(x)$ es* **inferior** *al orden de un infinitésimo $\beta(x)$), si la relación $\beta(x)/\alpha(x)$ es una función infinitesimal cuando $x \to a$*, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

En este caso se escribe

$$\beta(x) = o[\alpha(x)], \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

DEFINICIÓN 3. *Se dice que una función infinitesimal $\beta(x)$* **es de orden** *n (n es un número natural) respecto a un infinitésimo $\alpha(x)$, cuando $x \to a$, si*

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha^n(x)} = k \neq 0.$$

Si $\beta(x) = o[\alpha^n(x)]$, cuando, $x \to a$ (es decir, $k = 0$), el orden de $\beta(x)$ es superior a n en comparación con $\alpha(x)$.

§ 9. Teoremas fundamentales sobre los límites

Aquí supondremos también que las funciones examinadas en cada uno de los teoremas que siguen están definidas sobre un conjunto común X para el cual a es un punto límite (punto de acumulación).

TEOREMA 1. *Si cada sumando de una suma algebraica de un número finito de funciones tiene un límite cuando $x \to a$, el límite de esta suma algebraica existe para $x \to a$ y es igual a la suma algebraica de los límites de sus sumandos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada, por ejemplo, la suma algebraica de tres funciones $f(x) + g(x) - h(x)$, donde

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B, \quad \lim_{x \to a} h(x) = C.$$

Como las funciones difieren de sus límites en infinitésimos, obtenemos

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x), \quad h(x) = C + \gamma(x), \tag{1}$$

donde $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, $\gamma(x) \to 0$ cuando $x \to a$. De las igualdades (1), aplicando el teorema sobre la suma algebraica de infinitésimos (§ 8, teorema 1), tendremos

$$f(x) + g(x) - h(x) = (A + B - C) + [\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)], \tag{2}$$

donde $\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x) \to 0$ cuando $x \to a$. De la igualdad (2) se deduce que la suma $f(x) + g(x) - h(x)$ difiere del número $A + B - C$ en un infinitésimo y, por consiguiente, este número es el límite de la suma dada. Así, tenemos

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x) - h(x)] = A + B - C =$$
$$= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x), \quad (3)$$

lo que se debía demostrar.

COROLARIO. *Una función puede tener un solo límite para $x \to a$.*

Efectivamente, si $f(x) \to A$ y $f(x) \to A'$ cuando $x \to a$, obtendremos, según el teorema 1,

$$f(x) - f(x) = 0 \to A - A', \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

Como el límite de una función constante es único e igual a la función misma (§ 3, teorema 1), deducimos que $A - A' = 0$, es decir, $A' = A$.

OBSERVACIÓN. En los datos del teorema se supone que cada una de las funciones tiene su límite y se demuestra que su suma también lo tiene. Lo inverso no es, en general, justo: la existencia del límite de una suma no significa que los sumandos tienen límites. Por ejemplo, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1,$$

mientras que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}^2 x$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^2 x$ no existen, y por eso aquí

$$\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \neq \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}^2 x + \lim_{x\to\infty} \cos^2 x.$$

De este modo la formulación: «el límite de una suma es igual a la suma de los límites de los sumandos», no es precisa.

Una observación análoga es correcta para los límites de un producto (teorema 2) y de un cociente (teorema 4).

TEOREMA 2. *Si cada uno de los factores de un producto de un número finito de funciones tiene un límite cuando $x \to a$, el límite de este producto cuando $x \to a$ es igual al producto de los límites de los factores.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Examinemos primeramente el producto de dos factores $f(x)\, g(x)$, sea

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Tenemos

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x), \quad (4)$$

donde $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$ cuando $x \to a$. De aquí obtenemos

$$f(x)\, g(x) = AB + \gamma(x), \quad (5)$$

donde

$$\gamma(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\,\beta(x). \quad (6)$$

De los teoremas fundamentales sobre los infinitésimos (los teoremas 1, 2 y 3 del § 8) se deduce que $\gamma(x) \to 0$ cuando $x \to a$. Por eso, en virtud de la igualdad (5), tendremos

$$\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = AB = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x). \tag{7}$$

2) Examinemos ahora, por ejemplo, el producto de tres funciones $f(x)\, g(x)\, h(x)$ que tienen límites finitos cuando $x \to a$. Utilizando la primera parte de la demostración, hallamos

$$\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)\, h(x)] = \lim_{x\to a} \{f(x)\, [g(x)\, h(x)]\} =$$
$$= \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} [g(x)\, h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) \lim_{x\to a} h(x).$$

COROLARIO 1. *Se puede sacar un factor constante fuera del signo de límite.*

Efectivamente, si c es una función constante, entonces

$$\lim_{x\to a} [cf(x)] = \lim_{x\to a} c \lim_{x\to a} f(x) = c \lim_{x\to a} f(x).$$

COROLARIO 2. *Si una función $f(x)$ tiene un límite cuando $x \to a$, el límite de una potencia entera positiva de esta función cuando $x \to a$ es igual a la misma potencia del límite de esta función, es decir,*

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

(n es un número natural).

EJEMPLO 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+10)(x+20)^2(x+30)^3}{x^6} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{10}{x}\right)\left(1+\frac{20}{x}\right)^2 \times\right.$$
$$\left.\times \left(1+\frac{30}{x}\right)^3\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right) \times$$
$$\times \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{20}{x}\right)^2 \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{30}{x}\right)^3 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

LEMA. *Sea $f(x) \to A \neq 0$ cuando $x \to a$. En este caso la función de valor inverso $1/f(x)$ está acotada en un entorno del punto a, U_a.*

Efectivamente, tomemos $\varepsilon = |A| > 0$. De acuerdo con la definición del límite de una función tenemos

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{|A|}{2}, \quad \text{cuando} \quad x \in U_a,$$

para todos los valores admisibles de x. De aquí obtenemos

$$|f(x)| = |A - [A - f(x)]| \geqslant |A| - |A - f(x)| >$$
$$> |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2} > 0, \text{ cuando } x \in U_a.$$

De este modo

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|},$$

si $x \in U_a$, lo que se quería demostrar.

TEOREMA 3 *Si una función $f(x)$ tiene un límite distinto de cero cuando $x \to a$, el límite de la función de valor inverso $1/f(x)$, cuando $x \to a$, es igual al valor inverso del límite de esta función*, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}. \tag{8}$$

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sea $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \neq 0$. Entonces, según el lema y teniendo en cuenta que el producto de la función acotada por un infinitésimo es un infinitésimo (§ 8, teorema 2), tendremos

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot [A - f(x)] \to 0 \text{ cuando } x \to a.$$

De aquí obtenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}.$$

TEOREMA 4. *Si el dividendo $f(x)$ y el divisor $g(x)$ tienen límites cuando $x \to a$ y el límite del divisor es distinto de cero, el límite de su cociente (fracción) cuando $x \to a$ es igual al cociente de los límites del dividendo (numerador de la fracción) y del divisor (denominador de la fracción)*, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$. En este caso, utilizando el teorema sobre el límite del producto (teorema 2) y el teorema sobre el valor inverso de la función (teorema 3), obtendremos

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

EJEMPLO 2

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x+1)}{\lim\limits_{x \to 1} (x^2+x+1)} = \frac{2}{3}.$$

Sin demostrarlo citemos otro teorema.

TEOREMA 5. *Si una función $f(x)$ tiene límite cuando $x \to a$ y $\sqrt[n]{f(x)}$ (n es un número natural) existe en el punto a y en un entorno suyo U_a, entonces*

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}. \qquad (10)$$

§ 10. Algunos criterios de la existencia del límite de una función

No toda función, incluso acotada, tiene límite. Por ejemplo, sen x no tiene límite cuando $x \to \infty$, aunque $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$.

Indiquemos dos criterios de existencia del límite de una función.

TEOREMA SOBRE UNA FUNCION INTERMEDIA *Sea que una función $f(x)$ está encajada en un entorno U_a de un punto a entre dos funciones $\varphi(x)$* y $\psi(x)$ *que tienen un mismo límite A cuando $x \to a$* (fig. 89), *es decir,*

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \qquad (1)$$

y

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = A. \qquad (2)$$

En este caso, la función $f(x)$ tiene el mismo límite:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A. \qquad (3)$$

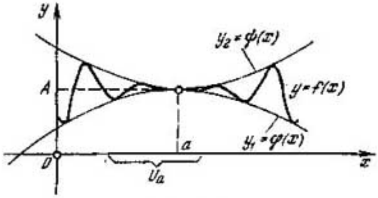

Fig. 89

DEMOSTRACIÓN. De la desigualdad (1) tenemos

$$\varphi(x) - A \leqslant f(x) - A \leqslant \psi(x) - A.$$

De aquí,

$$|f(x) - A| \leqslant \text{máx}\,(|\varphi(x) - A|, \quad |\psi(x) - A|). \qquad (4)$$

En virtud de la condición (2), para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno U_a tal, que

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{y} \quad |\psi(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{cuando} \quad x \in U_a. \qquad (5)$$

Por eso, de la desigualdad (4) obtenemos

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad x \in U_a, \qquad (6)$$

es decir, la igualdad (3) es justa.

DEFINICION. 1) *Una función $f(x)$ se llama **creciente** (**no decreciente**) sobre un conjunto dado X, si de la desigualdad $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) se deduce la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$).*

2) *Una función $f(x)$ se llama* **decreciente (no creciente)** *sobre un conjunto X, si de la desigualdad $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ se deduce la desigualdad $f(x_1) > f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).*

Una función creciente (no decreciente) o decreciente (no creciente) se llama *monótona* sobre un conjunto dado X.

TEOREMA *Sea $f(x)$ una función monótona y acotada para $x < a$ o $x > a$. En este caso existe su límite izquierdo*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$$

o su límite derecho

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0).$$

A pesar de que este teorema es evidente, su demostración no puede ser realizada en este capítulo.

OBSERVACIÓN Una confirmación análoga es justa para $a = -\infty$ o para $a = +\infty$.

COROLARIO *Una sucesión acotada monótona creciente o decreciente x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, tiene límite.*

EJEMPLO. Examinemos una sucesión de perímetros $P_3, P_6, P_{12}, \ldots$ de polígonos regulares de n lados $(n = 3, 6, 12, \ldots)$ inscritos en una circunferencia de radio R y obtenidos por duplicación del número de sus lados.

Es fácil asegurarse de que

$$P_3 < P_6 < P_{12} < \ldots,$$

es decir, que el perímetro P_n crece monótonamente junto con n. Al mismo tiempo, la magnitud P_n está acotada, porque el perímetro de cada polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia, no supera al perímetro de todo polígono circunscrito y, en particular, por ejemplo, de un cuadrado circunscrito, es decir, que $P_n < 8R$.

Por consiguiente, existe

$$\lim_{n \to \infty} P_n = C,$$

que se toma por la **longitud de la circunferencia**.

§ 11. Límite de la relación del seno de un arco infinitamente pequeño y el propio arco

TEOREMA *El límite de la relación del seno de un arco infinitamente pequeño y el propio arco expresado en radianes, es igual a una unidad:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN 1) Tomamos primero $x > 0$; como el arco x tiende a cero se puede considerar que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Construyamos un ángulo $x = \angle AOB$ en el círculo trigonométrico de radio $R = 1$ (fig. 90). Sean: DB, la longitud de la perpendicular bajada desde el punto B sobre el radio OA, y AC, el segmento de la tangente a la circunferencia, trazada en el punto A hasta su intersección con la continuación del radio AB. Es evidente que

$$\text{área } \Delta OAB < \text{área sect. } OAB < \text{área } \Delta OAC.$$

Puesto que $DB = \operatorname{sen} x$ y $AC = \operatorname{tg} x$, según las fórmulas de la geometría elemental, obtendremos

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

es decir,

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

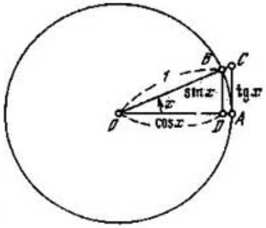

Fig. 90

Dividiendo los términos de la última desigualdad doble por sen x positivo, obtendremos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\cos x}, \qquad (3)$$

o bien

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \qquad (4)$$

Sea $x \to +0$; en este caso como resultado de consideraciones evidentes obtenemos $\cos x \to 1$ [1]). De este modo, de la desigualdad (4) se deduce que la función sen x/x está acotada por dos funciones que tienen un límite común igual a 1. Según el teorema sobre la función intermedia (§ 12), obtenemos

$$\lim_{x \to +0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \qquad (5)$$

2) Sea ahora $x < 0$; tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x},$$

donde $-x > 0$.
Por eso

$$\lim_{x \to -0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \qquad (5')$$

De las fórmulas (5) y (5′) se deduce evidentemente la igualdad (1) (véase la observación 5 del § 4).

---

[1]) Efectivamente, ya que en virtud de la fórmula (2) $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ ($|x| < \pi/2$), el seno de un arco infinitamente pequeño es un infinitésimo. De aquí, $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \to 0$ para $x \to 0$, es decir, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

OBSERVACIÓN De las fórmulas (2) se deduce que si $0 < |x| < \pi/2$, entonces

$$|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} |x| < |x|.$$

Como $|\operatorname{sen} x|$ no es mayor que 1, para todo x es justa la desigualdad

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|, \tag{6}$$

(la igualdad tiene lugar solamente cuando $x = 0$). La desigualdad (6) se utiliza frecuentemente para estimar los senos de arcos pequeños.

§ 12. El número e

Examinemos la expresión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es un número natural.

Atribuyamos a n valores ilimitadamente crecientes y calculemos los valores correspondientes de la potencia $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Obtenemos la siguiente tabla:

n	1	2	10	100	1000	10 000	...
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718	...

Vemos que con el aumento de n, la potencia $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ varía más y más lentamente y tiende hacia un límite aproximadamente igual a 2,718. Demostremos que esto es efectivamente así.

TEOREMA. *La sucesión*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

tiende a un límite finito situado entre 2 *y* 3.

DEMOSTRACIÓN. Con ayuda de la fórmula del binomio de Newton (véase el § 5 del cap. XI), tendremos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

o

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{1}$$

Para $n > 1$ todos los términos de la fórmula (1) son positivos y, además, si crece el exponente n, el número de términos aumenta y cada término correspondiente se hace más grande.

Por consiguiente, la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ crece a partir de su valor mínimo igual a 2 cuando el exponente n aumenta.

Por otra parte, es evidente que cada término del segundo miembro de la fórmula (1) se hace más grande, si todos los factores de los denominadores se reemplazan por 2 y cada una de las expresiones entre paréntesis se reemplaza por 1. Por eso

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Según la fórmula bien conocida para la suma de una progresión geométrica, tenemos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

De aquí,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

De este modo, cuando n crece ilimitadamente, los términos de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aumentan constantemente quedando superior a 2 pero inferior a 3.

Por consiguiente, de acuerdo con el corolario del teorema del § 10 existe un límite finito de esta sucesión que pertenece evidentemente al segmento $[2, 3]$ (véase el teorema 2 del § 3). Este límite se llama número e [1]. Así

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

El valor aproximado de este número es $e = 2{,}7182818284\ldots$

Se puede demostrar que la función

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty))$$

tiende al número e cuando $x\to\infty$:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

[1]) La designación del número e y su amplia utilización en numerosos problemas matemáticos es mérito del académico Euler. Se puede demostrar que $e < 3$.

Demos otra expresión para el número e. Considerando que $\frac{1}{x}=\alpha\ (\alpha>-1)$, tendremos

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Con ayuda del número e es fácil expresar numerosos límites.

EJEMPLO 1. Hallar

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x.$$

Considerando que $\frac{2}{x}=\alpha$ tendremos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{2/\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{1/\alpha}]^2=e^2.$$

La función de tipo

$$y=e^x, \tag{2}$$

donde $e=2{,}71828\ldots$, se llama *función exponencial*. Se utiliza también la designación

$$e^x=\exp x.$$

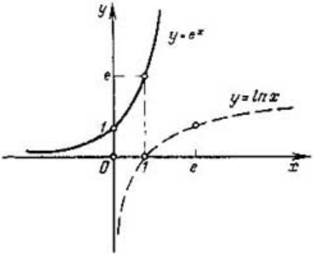

Fig. 91

La gráfica de la función (2) está representada en la fig. 91. La función exponencial desempeña un papel importante en el análisis matemático y en sus aplicaciones.

EJEMPLO 2. Supongamos que una reacción química transcurre de modo que a cada instante de tiempo t la velocidad de formación de una substancia es proporcional a la cantidad de esta última disponible en este instante.

Designemos por Q_0 la cantidad inicial de esta substancia (es decir la cantidad de la substancia al instante inicial $t=0$). Dividamos el intervalo de tiempo $(0, t)$ en n intervalos pequeños:

$$\left(0, \frac{t}{n}\right), \left(\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right), \ldots, \left(\frac{(n-1)t}{n}, \frac{nt}{n}\right).$$

Si en el transcurso de estos intervalos sumamente pequeños la velocidad de la reacción se considera constante, entonces las cantidades de la sustancia en los momentos de tiempo

$$\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \ldots, \frac{nt}{n}=t$$

serán respectivamente iguales a

$$Q_1 = Q_0 + kQ_0 \cdot \frac{t}{n} = Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right),$$

$$Q_2 = Q_1 + kQ_1 \cdot \frac{t}{n} = Q_1 \left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n = Q_{n-1} + kQ_{n-1} \cdot \frac{t}{n} = Q_{n-1} \left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n,$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad dado (*ley de porcentajes compuestos*). Pero, según los datos del problema, la cantidad de la substancia crece continuamente. Por eso para obtener una fórmula exacta hace falta suponer que el número de nuestros intervalos aumenta ilimitadamente y cada uno de ellos tiende a cero.

De aquí, considerando que $\frac{t}{n} \to 0$, obtendremos para la cantidad Q de substancia al instante de tiempo t la fórmula siguiente:

$$Q = \lim_{n \to \infty} \left[Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n \right].$$

Este límite se expresa fácilmente por el número e. En efecto, al introducir la designación $\frac{kt}{n} = \alpha$, donde $\alpha \to 0$, obtendremos

$$Q = Q_0 \lim_{\alpha \to 0} [(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{kt},$$

es decir,

$$Q = Q_0 e^{kt}. \tag{3}$$

Ésta es la ley según la cual se efectúa el crecimiento de la substancia en nuestras condiciones.

La fórmula (3) se encuentra en el estudio de una serie de fenómenos tales como: la desintegración del radio (aquí $k < 0$), la reproducción de bacterias, etc. Estos ejemplos muestran la importancia del número e en el análisis matemático y sus aplicaciones.

§ 13. Nociones sobre logaritmos naturales

Si la base de logaritmos es el número e, ellos se llaman logaritmos *naturales* o *neperianos* [1]) y se designan

$$\log_e x = \ln x.$$

En matemáticas superiores se utilizan casi exclusivamente logaritmos naturales, porque, como veremos más adelante, las numerosas fórmulas en que ellos intervienen resultan más simples que aquellas donde figuran los logaritmos de otros sistemas [2]).

---

[1]) Por el nombre de Neper, matemático escocés, inventor de los logaritmos.

[2]) Además, en la práctica se encuentran frecuentemente funciones exponenciales del tipo (3) del párrafo precedente; por eso es más cómodo utilizar los logaritmos de base e.

Establezcamos una relación entre el logaritmo natural de un número y el logaritmo de la base a ($a > 0$, $a \neq 1$). Sea dado

$$y = \log_a x,$$

de donde

$$a^y = x.$$

Calculando los logaritmos de base e de los dos miembros de esta igualdad hallamos

$$y \ln a = \ln x.$$

De aquí

$$y = \frac{1}{\ln a} \ln x,$$

o

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x \qquad (1)$$

Esta fórmula expresa el logaritmo de base a del número x mediante el logaritmo natural de este mismo número.

Notemos que si se toma $x = e$ en la fórmula (1), se obtiene

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a} \ln e = \frac{1}{\ln a}.$$

Considerando que en la fórmula (1) $a = 10$, obtendremos

$$\log x = \log_{10} x = M \ln x, \qquad (2)$$

donde $M = \frac{1}{\ln 10} = \log e = 0{,}43429$ es el *módulo de conversión* (de logaritmos naturales a decimales), y viceversa, mediante la fórmula (2) hallamos

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

donde $\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}30258$.

§ 14. Nociones sobre fórmulas asintóticas

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos funciones definidas en un entorno de un punto a.

Generalizando la definición dada en el § 8, diremos que

$$\psi(x) = o(\varphi(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to a, \qquad (1)$$

si

$$\psi(x) = \alpha(x)\, \varphi(x), \qquad (2)$$

donde $\alpha(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

Si $\varphi(x) \neq 0$ en un entorno del punto a, de la relación (2) tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0, \qquad (3)$$

(compárese con el § 8).

DEFINICION. *Si cuando $x \to a$ es justa la igualdad*

$$f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)), \tag{4}$$

entonces $\varphi(x)$ se llama ***término asintótico*** *(o expresión asintótica) de la función $f(x)$ cuando $x \to a$.*

Se utiliza la escritura: $f(x) \sim \varphi(x)$ cuando $x \to a$. Si $\varphi(x) \neq 0$ para $x \in U_a$, de la fórmula (4), obtenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1. \tag{5}$$

Aclaremos las condiciones de existencia de un término asintótico lineal **no nulo** para la función $f(x)$:

$$\varphi(x) = kx + b \text{ cuando } x \to \infty. \tag{6}$$

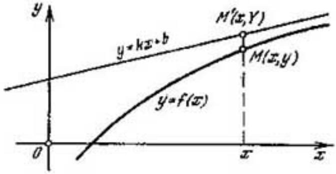

Fig. 92

Sea

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{7}$$

donde $\alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to \infty$, es decir, $\alpha(x) = o(1)$ cuando $x \to \infty$; es también evidente que $\alpha(x) = o(kx + b)$, cuando $x \to \infty$.

De la (7) tendremos

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}. \tag{8}$$

Pasando al límite en la igualdad (8), cuando $x \to \infty$ y teniendo en cuenta que $\alpha(x)/x \to 0$ cuando $x \to \infty$, obtendremos

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{9}$$

De la fórmula (7) hallamos

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx], \tag{10}$$

y viceversa, si existen los límites (9) y (10), y por lo menos uno de ellos es distinto de cero, es justo el desarrollo asintótico (7). Efectivamente, por la fórmula (10), donde k se determina de la igualdad (9), tenemos

$$\lim_{x \to a} [f(x) - kx - b] = 0,$$

de donde se deduce inmediatamente la fórmula (7).

La gráfica del término asintótico lineal $y = kx + b$ se llama *asíntota* de la curva $y = f(x)$ (fig. 92); cabe señalar que el caso cuando $k = 0$, $b = 0$ no se excluye. Aquí, para los puntos $M(x, y)$ de la curva, y $M'(x, Y)$ de la asíntota, $Y - y = MM' \to 0$ cuando $x \to \infty$ [1]).

EJEMPLO. Establecer una fórmula asintótica lineal para la función $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, cuando $x \to +\infty$.

Utilizando las fórmulas (9) y (10), tenemos:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$$

y

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

De este modo,

$$\sqrt{x^2+x+1} \sim x + \frac{1}{2}, \text{ cuando } x \to +\infty.$$

EJERCICIOS

1. Construir sobre el eje numérico los conjuntos de puntos que se definen por las desigualdades siguientes: a) $|x+2| < 1$; b) $|x-3| \geqslant 3$; c) $0 < |x-1| < 1/2$; d) $1 \leqslant |x| \leqslant 2$.

2. Al determinar la masa de un cuerpo se obtuvo un resultado aproximado $p = 2{,}57$ g con un error absoluto $\Delta_0 \leqslant 0{,}01$ g. Calcular el error relativo límite δ del número p.

3. ¿Cuántas cifras exactas tiene el número $x = 35{,}719$, si su error relativo es $\delta_0 \leqslant 1\%$?

Hallar los límites siguientes:

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000x}{1+x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; b) $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. 7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$.

8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 9. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$. 10. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

11. Estudiar el comportamiento de las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

si el coeficiente $a \to 0$ y los coeficientes $b \neq 0$ y c son constantes.

12. Sean $y_1 = x$, $y_2 = \sqrt{x^2+1}$. Mostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} (y_2 - y_1) = 0$. Aclarar el sentido geométrico de esta igualdad.

Hallar los límites siguientes:

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$. 14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$. 15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$. 17. $\lim\limits_{x\to0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$. 18. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

[1]) Si los límites (9) y (10) existen cuando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$, la fórmula asintótica (7) es justa en las condiciones correspondientes. En este caso la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una asíntota izquierda o, respectivamente, una asíntota derecha.

Capítulo VIII

Continuidad de una función

§ 1. Incremento del argumento y de la función. Continuidad de una función

Sea x cierto valor de una magnitud variable dada. Consideremos junto con x otro valor x_1 de esta variable. Introduzcamos la definición siguiente.

DEFINICIÓN. *Se llama* ***incremento*** *de una magnitud variable, la diferencia entre el nuevo valor de esta variable y su valor anterior.* En nuestro caso, el incremento de la variable es igual a $x_1 - x$.

Para designar el incremento se utiliza la letra griega Δ; así, por ejemplo, $\Delta x = x_1 - x$ designa el incremento de la variable x.

Al añadir al valor de una variable su incremento, se obtiene el *valor incrementado* de esta variable. Por ejemplo, $x + \Delta x$ es el valor incrementado de la variable x.

Supongamos que y sea una función del argumento x, es decir,

$$y = f(x). \qquad (1)$$

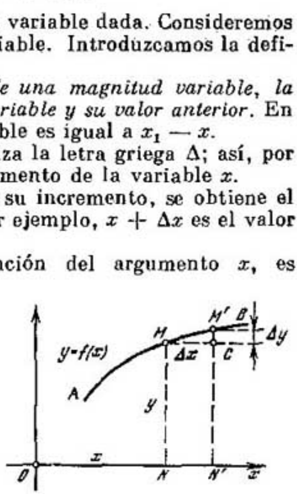

Fig. 93

Demos al argumento x un incremento Δx; en este caso la función y obtendrá un incremento Δy. Este hecho puede ser evidentemente escrito así:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) se deduce que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (3)$$

EJEMPLO 1. Determinar el incremento de la variable x y el incremento de la función $y = x^2$, si el argumento x ha variado de -1 a 2.

Es evidente que aquí $\Delta x = 2 - (-1) = 3$ y $\Delta y = 2^3 - (-1)^3 = 9$.

Efectuemos una interpretación geométrica del incremento.

Sea la curva AB la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 93).

Examinemos sobre esta curva un punto M de coordenadas corrientes x e y. Demos a la abscisa x del punto $M(x, y)$ un incremento Δx; entonces la ordenada y de este punto recibirá un incremento Δy. El punto $M(x, y)$ ocupará en este caso una nueva posición $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Sea C el punto de intersección de la recta que pasa por el punto M, paralela al eje Ox, y de la perpendicular $M'N'$ bajada desde el punto M' al eje Ox. Es evidente que

$$MC = \Delta x, \quad CM' = \Delta y.$$

Puede ocurrir que para cierto x el punto M' se aproxima ilimitadamente al punto M cuando Δx tiende a cero y, por consiguiente, Δy tiende también a cero. En tal caso la función $y = f(x)$ se denomina *función continua* para el valor dado de x. Más exactamente:

DEFINICIÓN 1. *Una función $f(x)$ definida sobre un conjunto X se llama* ***continua*** *para $x = x_1$ (**o continua en el punto x_1**), si:*

1) *la función está definida en $x = x_1$ (es decir, $x_1 \in X$);*

2) *el incremento de la función en el punto x_1 tiende a cero cuando el incremento del argumento $\Delta x_1 = x - x_1$ tiende a cero, es decir,*

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} [f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)] = 0, \tag{4}$$

donde el incremento infinitamente pequeño Δx_1 recorre solamente valores para los cuales $f(x_1 + \Delta x_1)$ tiene sentido. En este caso suponemos como siempre (véase el § 3 del cap. VII) que x_1 es un punto límite del conjunto X y de este modo en cualquier entorno U_{x_1} existen puntos $x_1 + \Delta x_1 \in X$ distintos de x_1 ($\Delta x_1 \neq 0$), para los cuales la función $f(x)$ está definida.

De un modo breve, *una función se llama* ***continua en un punto dado****, si en este punto a un incremento infinitamente pequeño del argumento le corresponde un incremento infinitamente pequeño de la función.*

Utilizando la noción de límite de una función (§ 3 del cap. VII) obtenemos la definición desarrollada de **continuidad de una función en un punto:** *una función $f(x)$ es continua en un punto x_1 si, y sólo si,*

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_1) > 0$ *tal, que*

$$|f(x) - f(x_1)| = |f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)| < \varepsilon, \tag{5}$$

si $x = x_1 + \Delta x_1$ y $0 < |\Delta x_1| < \delta$ (Δx_1 es cualquier incremento admisible). Notemos que la desigualdad (5) evidentemente se cumple también para $\Delta x_1 = 0$, es decir, el entorno δ del punto x_1 puede ser interpretado aquí como un entorno **completo:** $|\Delta x_1| < \delta$.

DEFINICIÓN 2. *Una función $f(x)$ se llama* ***continua sobre un conjunto dado*** *X si 1) está definida sobre este conjunto (es decir, $\forall x \in X, \exists f(x)$); 2) es continua en cada punto de este conjunto, es decir, $\forall x \in X$, es justa la igualdad*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0, \tag{6}$$

donde $x + \Delta x \in X$.

Notemos que el conjunto X está aquí interpretado como **el dominio de definición de la función**, es decir, que los puntos $x \notin X$ y $x + \Delta x \notin X$ no se examinan.

Por ejemplo, una función $f(x)$ es continua sobre un segmento $[a, b]$, si: 1) esta función está definida en cada punto de este segmento, 2) $\forall x \in [a, b]$ es justa la igualdad (6), donde $x + \Delta x \in [a, b]$.

EJEMPLO 2. La función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{para } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

es continua sobre el segmento $X = [0, 1]$, aunque ella no es continua sobre el eje $-\infty < x < +\infty$.

EJEMPLO 3. Estudiar, si la función $y = x^2$ es continua.

Dando al argumento x un incremento Δx, obtendremos

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

donde Δy es el incremento de la función y. De aquí,

$$\Delta y = \Delta x \cdot (2x + \Delta x).$$

Es evidente que cualquiera que sea el valor fijo de x, Δy será un infinitésimo si Δx es un infinitésimo. Por consiguiente, la función $y = x^2$ es continua para todo valor del argumento x. En otras palabras, la función x^2 es continua sobre el intervalo infinito $[-\infty, +\infty]$.

Es también fácil demostrar la continuidad de la función potencial x^n, donde n es un número natural entero.

DEFINICIÓN 3. *El punto donde se altera la continuidad de una función, se llama* ***punto de discontinuidad*** *de esta función.*

Si $x = x_0$ es un punto de discontinuidad de la función $y = f(x)$, son posibles dos casos:

1) la función $f(x)$ está definida para $x = x_0$, además,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) \not\to 0$$

cuando $\Delta x_0 = x - x_0 \to 0$;

2) la función $f(x)$ no está definida para $x = x_0$ y hablar sobre un incremento de la función en el punto x_0 no tiene sentido. En este caso convenimos en llamar a $x = x_0$ punto de discontinuidad de la función $f(x)$ si, y sólo si, la función $f(x)$ está definida en un entorno inmediato de x_0 [1)].

Si una función $f(x)$ puede ser modificada o definida suplementariamente en el punto x_0 (es decir, elegir un número $f(x_0)$) de tal modo que la nueva función $f(x)$ sea continua para $x = x_0$, este punto se llama *punto de discontinuidad evitable* de la función $f(x)$. En el caso contrario, es decir, cuando la función $f(x)$ permanece discontinua en $x = x_0$ para toda elección del número $f(x_0)$, el punto x_0 se llama *punto de discontinuidad inevitable* de la función $f(x)$.

EJEMPLO 4. Examinemos una función $E(x)$ igual a la parte entera del número x, es decir, si $x = n + q$, donde n es un número entero y $0 \leqslant q < 1$, en-

---

[1)] Es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existen en el intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ puntos, donde la función $f(x)$ está definida.

tonces $E(x) = n$ (fig. 94). Por ejemplo, $E(\sqrt{2}) = 1$, $E(\pi) = 3$, $E(-1{,}5) = -2$, etc.

La función $E(x)$ es discontinua para todo valor entero del argumento x. Efectivamente, por ejemplo, para $x = 1$ y un incremento suficientemente pequeño de Δx tenemos

$$E(1 + \Delta x) = 1, \quad \text{si} \quad \Delta x > 0,$$
$$E(1 + \Delta x) = 0, \quad \text{si} \quad \Delta x < 0.$$

De aquí teniendo en cuenta que $E(1) = 1$, obtendremos

$$E(1+\Delta x) - E(1) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \Delta x > 0, \\ -1, & \text{si} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, el incremento de la función $\Delta y = E(1 + \Delta x) - E(1)$ no tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$, y por eso la función es discontinua para $x = 1$.

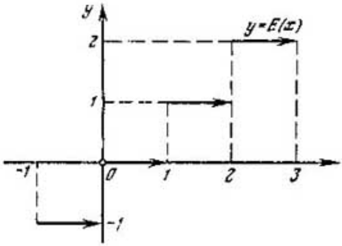

Fig. 94

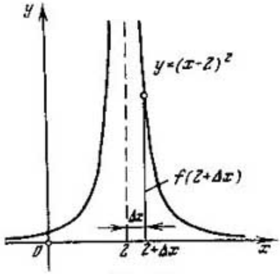

Fig. 95

Un razonamiento análogo puede ser desarrollado para cada uno de los valores $x = k$, donde k es un número entero.

EJEMPLO 5. Sea

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Esta función no está definida para $x = 2$, pero tiene un sentido para todos los valores de $x \neq 2$ (fig. 95). Cualquiera que sea el valor atribuido a $f(2)$ siempre tendremos

$$f(2+\Delta x) - f(2) = \frac{1}{(\Delta x)^2} - f(2) \to \infty,$$

cuando $\Delta x \to 0$. De este modo en el caso examinado cualquiera que sea la elección del valor de $f(2)$, para $x = 2$, a un incremento infinitamente pequeño Δx del argumento le corresponde un incremento infinitamente grande Δy de la función. Esta función tiene un punto de discontinuidad inevitable para $x = 2$.

§ 2. Otra definición de la continuidad de una función

Teniendo en cuenta la importancia de la noción de continuidad de una función, daremos otra definición de la continuidad en un punto equivalente a la formulada antes.

DEFINICION. *Una función $f(x)$ se llama* **continua** *en $x = x_1$ si: 1) está definida en $x = x_1$; 2) tiene lugar la igualdad*

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)\ ^{1)} \qquad (1)$$

es decir, que una función es continua en un punto dado x_1 si, y sólo si, el límite de esta función, cuando $x \to x_1$, es igual al valor de la función en el punto límite (fig. 96). Se supone aquí que la variable x toma solamente los valores, para los cuales la función $f(x)$ tiene sentido. En otras palabras para una función $f(x)$ continua en x_1, de la condición $x \to x_1$, se deduce la relación límite

$$f(x) \to f(x_1).$$

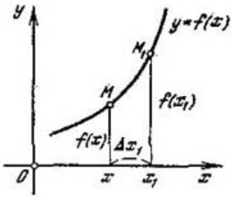

Fig. 96

Es fácil ver que: 1) si la función $f(x)$ es continua en $x = x_1$ en el sentido indicado antes (§ 1), es decir, si

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)] = 0, \qquad (2)$$

entonces, considerando que $x_1 + \Delta x_1 = x$, donde, evidentemente, $x \to x_1$ cuando $\Delta x_1 \to 0$, y utilizando el teorema sobre el límite de la suma geométrica, obtendremos

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1). \qquad (3)$$

Por consiguiente, la función $f(x)$ es también continua en $x = x_1$ en el sentido de nuestra definición;

2) a la inversa, es evidente que de la igualdad (3) se deduce la igualdad (2).

De este modo, la equivalencia de las dos definiciones queda demostrada por completo.

Para una función continua sobre un conjunto X, en virtud de la fórmula (1), para cada valor de $x_1 \in X$ se cumple la igualdad

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Puesto que $x_1 = \lim\limits_{x \to x_1} x$, se obtiene

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(\lim_{x \to x_1} x),$$

es decir, *si una función es continua, los signos del límite y de la función son permutables.*

---

1) Aquí se supone habitualmente que x_1 es un punto límite del dominio de definición de la función $f(x)$.

En los cursos de análisis más detallados se demuestra que la fórmula (4) es también justa para toda función continua $x = \varphi(t)$ tal que $\varphi(t) \to x_1$ cuando $t \to t_1$. De este modo, tenemos una **condición reforzada de permutabilidad de la función $f(x)$ y del límite**:

$$\lim_{t \to t_1} f(\varphi(t)) = f(\lim_{t \to t_1} \varphi(t)). \tag{5}$$

De la definición 3 (§ 1) se deduce que *una función es discontinua en un punto dado si, y sólo si, 1) no existe límite de la función en este punto, ó 2) el límite de la función en el punto dado existe pero no coincide con el valor de la función en este punto.*

§ 3. Continuidad de las principales funciones elementales

1) La función potencial

$$y = x^n$$

(n es natural (véase la fig. 60)) es continua para todo valor de x (véase el ejemplo 2 del § 1).

2) La función exponencial

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

(véase la fig. 63) es continua para todo valor de x.

3) La función trigonométrica

$$y + \text{sen}\, x$$

(véase la fig. 65) es continua para todo valor de x.

Efectivamente, dando al argumento x un incremento Δx y designando con Δy el incremento correspondiente de la función y, tendremos

$$y + \Delta y = \text{sen}\,(x + \Delta x),$$

de donde

$$\Delta y = \text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\, x = 2\,\text{sen}\, \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

En virtud de la nota para el teorema del § 11 del cap. VII tendremos para $\Delta x \neq 0$

$$\left|\text{sen}\, \frac{\Delta x}{2}\right| < \frac{|\Delta x|}{2}.$$

Además,

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1.$$

Por eso

$$|\Delta y| < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} \cdot 1 = |\Delta x|,$$

es decir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Por consiguiente, la función sen x es continua en el intervalo $|-\infty, +\infty|$.

Se demuestra exactamente igual, que

$$y = \cos x$$

es una función continua en el intervalo $|-\infty, +\infty|$ (véase la fig. 65).

§ 4. Teoremas fundamentales de las funciones continuas

TEOREMA 1. *La **suma** de un número finito de funciones continuas es una función continua* [1]).

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones continuas sobre un conjunto X, y x_1 es un punto cualquiera de este conjunto, entonces

$$\lim_{x\to x_1} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to x_1} f_1(x) + \lim_{x\to x_1} f_2(x) = f_1(x_1) + f_2(x_1),$$

es decir, el límite de la suma cuando $x \to x_1$, es igual al valor de ésta cuando $x = x_1$.

Por consiguiente, la función $f_1(x) + f_2(x)$ es también continua sobre el conjunto X.

TEOREMA 2. *El **producto** de un número finito de funciones continuas es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la demostración del teorema 1.

COROLARIO. *Un polinomio entero*

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

es una función continua.

TEOREMA 3. *El **cociente** de la división de dos funciones continuas es una función continua en todos los puntos donde el divisor es distinto de cero.*

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la demostración del teorema 1.

COROLARIO *Una función racional fraccionaria*

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

es continua en todos los lugares, excluyendo los valores de x, donde el denominador se anula.

TEOREMA 4. *La función continua de una función continua es también una función continua*; en otras palabras, la función compuesta de funciones continuas es continua.

---

[1]) Se supone que todas las funciones examinadas están definidas y son continuas sobre un conjunto común X que no contiene puntos aislados (por ejemplo, sobre un intervalo (a, b) o un segmento $[a, b]$, etc.).

DEMOSTRACIÓN. Sea x_1 un punto cualquiera del dominio de definición de una función compuesta $f(\varphi(x))$, donde la función $u = \varphi(x)$ es continua en el punto x_1 y la función $f(u)$ es continua en el punto $u_1 = \varphi(x_1)$. En virtud de la condición reforzada de permutabilidad de una función continua y de su límite (§ 1), tenemos

$$\lim_{x\to x_1} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_1} \varphi(x)) = f(\varphi(x_1)),$$

es decir, la función compuesta $f(\varphi(x))$ es continua en el punto x_1.

Por ejemplo, en virtud del teorema 4, las funciones $(\operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(x^2)$ son continuas por ser continuas las funciones x^2 y $\operatorname{sen} x$.

Las funciones que se examinarán en adelante serán continuas en todos los lugares excepto, probablemente, para ciertos valores del argumento.

Por ejemplo, la función

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

(véase la fig. 66) es, según el teorema 3 de este párrafo, continua para todos los valores del argumento x a excepción de los valores para los cuales $\cos x = 0$, es decir, excepto los valores de $x = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$, donde k es un número entero cualquiera.

De modo análogo, la función

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

(véase la fig. 66) es continua cuando $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir, cuando $k \neq k\pi$ (k es entero).

Es justo el teorema sobre la continuidad de la función recíproca que formulamos sin demostración.

TEOREMA 5. *Si una función $y = f(x)$ es continua y estrictamente monótona*[1]) *en el intervalo $\langle a, b\rangle$, existe una función unívoca recíproca $x = \varphi(y)$, definida sobre el intervalo $\langle f(a), f(b)\rangle$, igualmente continua y estrictamente monótona.*

En virtud de este teorema, el radical $\sqrt[n]{x}$ (n es un número natural) (véase la fig. 62), la función logarítmica $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) (véase la fig. 64), los valores principales de las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ (véase las figs. 67—70) son continuas para todos los valores del argumento x en los cuales estas funciones están definidas.

---

[1]) Es decir, $f(x)$ es una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $\langle a, b\rangle$.

§ 5. Interpretación de indeterminaciones

Puede ocurrir que una función $f(x)$ esté definida y es continua en todos los lugares excepto para un cierto valor de $x = x_1$ donde dicha función $f(x)$ pierde sentido (se vuelve **indeterminada**). Surge la cuestión: si es posible elegir un número $f(x_1)$ tal, que la función $f(x)$ completada sea continua en $x = x_1$.

De acuerdo con esto, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$f(x_1) = \lim_{x \to x_1} f(x).$$

Las operaciones necesarias para hallar el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to x_1$ se llama en este caso *desarrollo de la indeterminación* y el propio límite $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$, si existe, lleva el nombre poco feliz de *valor auténtico de la función* $f(x)$ cuando $x = x_1$.

EJEMPLO 1. Sea

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}.$$

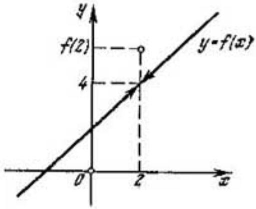

Fig. 97

Esta función no tiene sentido cuando $x = 2$. Considerando adicionalmente que

$$f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4,$$

obtendremos una función continua en todos los lugares incluyendo $x = 2$. Si se supone que $f(2) \neq 4$, la función correspondiente será discontinua para $x = 2$ (fig. 97).

EJEMPLO 2. La función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

es indeterminada cuando $x = 0$. Considerando adicionalmente que

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

obtendremos una función definida y continua para todos los valores del argumento x.

§ 6. Clasificación de los puntos de discontinuidad de una función

Un punto de discontinuidad x_0 de una función $f(x)$ se llama *punto de discontinuidad de primera especie*, si existen límites finitos unilaterales de la función (§ 4) (fig. 87):

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

(en este caso la función $f(x)$ no debe necesariamente estar definida en el punto x_0, es decir, $f(x_0)$ puede no existir).

La magnitud

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

se llama *salto de la función* $f(x)$ en el punto x_0.

Los puntos restantes de discontinuidad x_1 de la función $f(x)$ se llaman *puntos de discontinuidad de segunda especie*. Entre ellos tienen mucha importancia los puntos de discontinuidad infinita x_1 para los cuales existen límites unilaterales (finitos o infinitos)

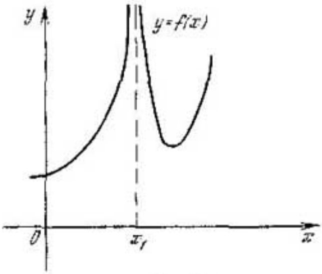

Fig. 98

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_1 + 0} f(x)$$

por lo menos uno de éstos es infinito (véase, por ejemplo, la fig. 98).

En este caso, la recta $x = x_1$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de la función $y = f(x)$.

La función que admite sobre un intervalo dado solamente puntos de discontinuidad de primera especie en un número finito se llama *función continua a trozos* sobre este intervalo. Notemos que en los puntos de discontinuidad la función continua a trozos puede no estar definida.

Señalemos que para que se cumpla la continuidad de una función $f(x)$ en un punto x_0 es necesario y suficiente que sean iguales los tres números:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0),$$

(es decir, que el salto de la función en el punto x_0 sea igual a cero).

EJEMPLO. Determinar la naturaleza del punto de discontinuidad $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}.$$

Aquí tenemos

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \pi \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = 0.$$

Por consiguiente, $x_0 = 0$ es un punto de discontinuidad de primera especie.

EJERCICIOS

1. Determinar el incremento del argumento x y el incremento de la función $y = \log x$, si el argumento x varía de 10 a 100.

2. Mostrar que para la función lineal $y = ax + b$ el incremento Δy no depende de x.

3. Demostrar que la función $y = \sqrt{x}$ es continua.
4. Demostrar que la función $y = |x|$ es continua.

Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones:

5. $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 6. $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. 7. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} \pi x}$.

Hallar el «valor auténtico» de las funciones: 8. $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, cuando $x=1$. 9. $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$, cuando $x=4$. 10. $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2}$, cuando $x=0$.

11. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones: a) $\frac{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}{x}$; b) $\operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$; c) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

Capítulo IX

Derivada

§ 1. El problema de la tangente

Sea M un punto fijo de una curva continua dada K (fig. 99). Examinemos la secante MM' que pasa por el punto M. Puede ocurrir que cuando el punto M' se aproxime ilimitadamente a lo largo de la curva al punto M, la secante MM' tienda a una cierta posición límite MT, es decir, que el ángulo $\gamma = \angle M'MT \to 0$ cuando $M' \to M$. En este caso la recta límite MT se llama *tangente*.

DEFINICION. *Se llama* ***tangente*** *en un punto dado M (punto de tangencia) a una curva continua dada, la posición límite de la secante*

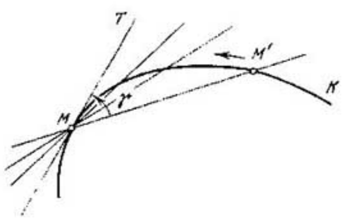

Fig. 99

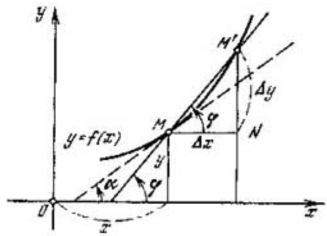

Fig. 100

MM' que pasa por el punto M, cuando el segundo punto de intersección M' se aproxima ilimitadamente al primer punto a lo largo de la curva.

Si la secante MM' no tiene posición límite cuando $M' \to M$, se dice que la tangente en el punto M a la curva dada **no existe**.

Mostremos ahora cómo se halla la ecuación de la tangente a una curva a partir de la ecuación de esta curva.

PROBLEMA. *Conociendo la ecuación de una línea continua*

$$y = f(x),$$

hallar la ecuación de la tangente a esta línea en un punto dado $M(x, y)$ suponiendo que la tangente existe.

Además del punto $M(x, y)$ tomemos en nuestra línea un otro punto $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (fig. 100). Al trazar la secante MM' y las rectas $MN \parallel Ox$ y $M'N \parallel Oy$ obtendremos un triángulo rectángulo MNM' de catetos $MN = \Delta x$ y $NM' = \Delta y$.

Sea φ el ángulo formado por la secante MM' y la dirección positiva del eje Ox. En este caso, es evidente que $\angle NMM' = \varphi$. Mediante el triángulo rectángulo MNM' determinamos el **coeficiente angular de la secante**

$$k' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Supongamos ahora que $M' \to M$; en este caso es evidente que $\Delta x \to 0$ y la secante MM' tiende a su posición límite, es decir, a la **tangente** MT en el punto M (consideramos que la tangente existe). Designemos con α el ángulo formado por la tangente MT y la dirección positiva del eje Ox. Cuando $\Delta x \to 0$, tendremos: $\varphi \to \alpha$ y si la tangente MT no es perpendicular al eje Ox, obtendremos, en virtud de la continuidad de la tangente,

$$\operatorname{tg} \varphi \to \operatorname{tg} \alpha,$$

de donde, pasando al límite, cuando $\Delta x \to 0$ en la igualdad (1) hallamos el **coeficiente** angular $k = \operatorname{tg} \alpha$ **de la tangente** MT:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

El límite puesto en el segundo miembro de la igualdad (2) se llama *derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto x y se designa brevemente así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \tag{3}$$

(y' se lee: «y prima»).

De este modo, *el coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función es igual al valor de su derivada en el punto de tangencia,* es decir,

$$k = f'(x). \tag{4}$$

Conociendo el coeficiente angular de la tangente, es fácil escribir su ecuación. La tangente MT pasa por el punto de tangencia $M(x, y)$; por eso su ecuación (véase el § 3 del cap. III) es de la forma

$$Y - y = k(X - x),$$

donde X e Y son las coordenadas corrientes. Sustituyendo aquí el valor del coeficiente angular k y teniendo en cuenta que el punto M pertenece a la línea, obtendremos la ecuación de la tangente a esta línea

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x). \tag{5}$$

OBSERVACIÓN 1 Si se designan, para mayor claridad, las coordenadas del punto de tangencia por (x_1, y_1) y las coordenadas corrientes, como siempre, por (x, y), la *ecuación de la tangente* a la línea $y = f(x)$ en el punto $M_1(x_1, y_1)$ será la siguiente

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1), \tag{5'}$$

donde $y_1 = f(x_1)$ e $y_1' = f'(x_1)$.

OBSERVACIÓN 2 Efectuando la deducción hemos supuesto que la tangente MT a la línea $y = f(x)$ en el punto M existe. Y viceversa, es fácil mostrar que si para la función $y = f(x)$ en el punto x existe una derivada finita, es decir, el límite (3) (tal función se llama *derivable en el punto* x), la gráfica de esta función en el punto correspondiente tiene una tangente (5) no paralela al eje Oy.

§ 2. Problema sobre la velocidad de movimiento de un punto

El problema de cálculo de la velocidad de un movimiento no uniforme nos conduce también a la noción de derivada.

Supongamos que un punto M se desplaza a lo largo de una recta que tomamos por el eje Ox (fig. 101). A cada valor del tiempo t le

Fig. 101

corresponde una distancia determinada $OM = x$. Por consiguiente, se puede decir que la abscisa x del punto en movimiento es una función del tiempo t:

$$x = f(t).$$

Esta función se llama *ecuación del movimiento* y expresa la **ley de movimiento** de un punto.

PROBLEMA. *Conociendo la ley del movimiento, hallar la velocidad del punto en movimiento en cualquier instante de tiempo.*

Supongamos que en un instante de tiempo t el punto en movimiento ocupa la posición M, además, $OM = x$. En el instante $t + \Delta t$ el punto ocupará la posición M', donde $OM' = x + \Delta x$, de donde $x + \Delta x = f(t + \Delta t)$. Por consiguiente, el desplazamiento del punto M durante el tiempo Δt será

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t). \tag{1}$$

Si el punto M se desplaza durante el tiempo $[t, t + \Delta t]$ en un mismo sentido, entonces Δx representa numéricamente el **camino** recorrido por el punto durante el tiempo Δt [1]). La relación

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

expresa la **velocidad media** de variación de la abscisa x durante el intervalo de tiempo Δt denominada habitualmente *velocidad media de movimiento de un punto*. El límite de la velocidad media del movimiento, cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero, se llama *velocidad de movimiento* en el instante de tiempo dado t. Designando esta velocidad por v, obtendremos

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Se puede decir, por analogía con el problema de la tangente (§ 1), que la expresión obtenida (3) representa la **derivada** de la función x con respecto a la variable t, es decir,

$$v=f'(t).$$

De este modo, *la velocidad de un movimiento rectilíneo es igual a la derivada del camino respecto al tiempo* [2]).

OBSERVACIÓN. Señalemos que si $v=f'(t)$ conserva el signo en un cierto intervalo $a<t<b$, se puede demostrar (véase el § 2 del cap. XI) que para todo instante $t\in(a,b)$ el punto se desplaza siempre en el mismo sentido durante un intervalo de tiempo suficientemente pequeño $[t, t+\Delta t]$. De este modo, Δx representa el camino recorrido por el punto y la noción citada es localmente (es decir, para un intervalo de tiempo suficientemente pequeño) exacta.

Si para un instante de tiempo t_1 tenemos $f'(t_1)=0$, es decir, para un intervalo de tiempo infinitamente pequeño $\Delta t_1=t-t_1$ el desplazamiento correspondiente Δx del punto es un infinitésimo de orden superior, entonces Δx no representa en general el camino recorrido. Por ejemplo, una tal situación tiene lugar en el caso cuando el punto efectúa oscilaciones rápidamente amortiguadas alrededor de su posición de equilibrio. En este caso la fórmula (3) no es adecuada a nuestra definición.

§ 3. Definición general de la derivada

Históricamente la resolución de problemas sobre la tangente y de la velocidad de un movimiento, ha conducido a la noción de **derivada**, uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas superiores. Para resolver estos problemas se debe efectuar en esencia

---

[1]) En el caso general, el desplazamiento de un punto y el camino recorrido por el mismo son diferentes. Por ejemplo, si durante el primer segundo después de iniciado el movimiento el punto se ha desplazado 10 m a la derecha y durante el segundo siguiente se movió 10 m a la izquierda, el desplazamiento del punto en el tiempo $\Delta t=2$ s es igual a $\Delta x=0$, mientras que el camino recorrido es $s=20$ m.

[2]) Más exactamente: *la velocidad es la derivada de la abscisa de un punto en movimiento, con respecto al tiempo.*

siempre la misma operación: hallar el límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento del argumento.

Examinemos ahora esta cuestión en forma general.

Para simplificar supongamos que la función considerada $y = f(x)$ está definida en un cierto intervalo finito o infinito $X = (a, b)$ y es continua en este intervalo. Sea $x \in (a, b)$ un punto fijo del intervalo (a, b). Demos al argumento x un incremento $\Delta x \neq 0$ tal, que $x + \Delta x \in (a, b)$, en este caso la función y obtendrá un incremento correspondiente

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

Componemos la relación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

Ella muestra cuántas veces en el intervalo dado $[x, x + \Delta x]$ el incremento de la función y es más grande que el incremento del argumento x; en otras palabras esta relación expresa la **velocidad media de variación de la función y respecto al argumento x** en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Sea que $\Delta x \to 0$; en este caso $\Delta y \to 0$ (en virtud de la continuidad de la función y). Designemos por $X_1 \subset (a, b)$ el conjunto de puntos del intervalo (a, b), para los cuales el paso al límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{3}$$

tiene sentido.

En tal caso la fórmula

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (x \in X_1) \tag{4}$$

define una función $y' = f'(x)$ denominada *derivada de la función* $f(x)$.

DEFINICION. *Llámase **derivada** de una función $y = f(x)$ al límite, si existe, de la relación entre el incremento de la función y el incremento del argumento, cuando el incremento del argumento tiende a cero.*

De este modo la derivada de la función $f(x)$ es una cierta función $f'(x)$, ***obtenida*** de acuerdo con reglas determinadas de la función dada.

La función que tiene derivada sobre un conjunto X_1 se llama *función derivable* en este conjunto (véase el cap. XII).

Si $x \in X_1$ es fijo, en virtud de la igualdad (4), *la derivada y' es la velocidad de variación de la función y respecto al argumento x en el punto x.*

Para designar la derivada de una función dada $y = f(x)$ se utilizan además de

$$y' = f'(x) \quad \text{(Lagrange)}^{1)}$$

los símbolos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{(Leibniz)}^{2)}$$

(el sentido de esta designación será explicado en el cap. XII) e

$$\dot{y} = \dot{f}(x) \quad \text{(Newton)}^{3)}.$$

En los casos cuando es necesario precisar el argumento (x, t, etc.) respecto al cual se toma la derivada de la función y, se utiliza para las derivadas correspondientes las designaciones

$$y'_x, \ y'_t, \quad \text{etc.}$$

OBSERVACIÓN. Se define de un modo análogo la derivada de una función $y = f(x)$ definida sobre un conjunto X que no contiene puntos aislados. En particular, una función $f(x)$ es derivable sobre un segmento $[a, b]$, si para todo punto $x \in [a, b]$ existe el límite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

se supone, además, que $x + \Delta x \in [a, b]$. Aquí

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

y

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

Para el valor de la derivada $y' = f'(x)$ de la función $y = f(x)$ en un punto fijo $x = x_1$ se utilizan las designaciones

$$(y')_{x=x_1} = [f'(x)]_{x=x_1} = f'(x_1).$$

Aquí $f'(x_1)$ es un número.

Utilizando la fórmula (1), se puede escribir más detalladamente la expresión para la derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5}$$

Con ayuda de la fórmula (5), apoyándose en la teoría de los límites, se pueden hallar derivadas de funciones.

---

1) Se lee «y prima es igual a f prima de x».

2) $\frac{dy}{dx}$ se lee «dy sobre dx».

3) $\dot{y}$ se lee «y punto».

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la función $y = x^2$.

Sea x un valor fijo cualquiera del argumento. Dando a x un incremento $\Delta x \neq 0$ tendremos $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. De aquí

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

y, por consiguiente,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

De este modo,

$$(x^2)' = 2x. \tag{6}$$

Al resolver el problema de la tangente (§ 1) fue aclarada la significación geométrica de la derivada.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA *Para una función dada $y = f(x)$ su derivada $y' = f'(x)$ es igual, para todo valor de x, al coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente.*

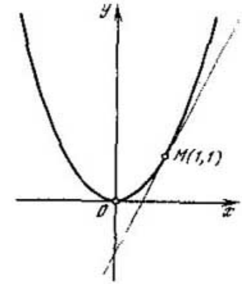

Fig. 102

EJEMPLO 2. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $M(1, 1)$ (fig. 102).

Hallamos la derivada y' para $x = 1$. Según la fórmula (6) tenemos

$$y' = 2x.$$

De aquí

$$k = (y')_{x=1} = 2.$$

Entonces, la ecuación de la tangente se escribirá así

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ó} \quad y = 2x - 1.$$

Notemos que la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto dado forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo agudo u obtuso en dependencia si la derivada en este punto es positiva o negativa. Si la derivada es igual a cero, la tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente es evidentemente paralela al eje Ox. Son justas también las afirmaciones recíprocas.

Luego, de la definición de derivada se deduce que la derivada y' da la velocidad de variación de la función $y = f(x)$ respecto al argumento x. Por ejemplo, si en un punto x cualquiera tenemos $y' = 2$, esto significa que en un intervalo pequeño $[x, x + \Delta x]$ el incremento Δy de la función y es aproximadamente dos veces mayor que el incremento del argumento x; esta relación será tanto más precisa cuanto menor sea $|\Delta x|$.

La derivada de la función $y = f(x)$ obtiene un sentido sumamente evidente, si el argumento x designa el tiempo. En este caso la relación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

representa la **velocidad media de variación de la función** y **en el intervalo de tiempo** $[x, x + \Delta x]$, y el límite de esta relación

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es la **variación de la función** y **en el instante de tiempo** x.

De este modo tenemos:

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA. *Para una función* $y = f(x)$ *que varía con el tiempo* x, *la derivada* y'_x *es la velocidad de variación de esta función en el instante de tiempo dado* x.

La derivada permite estudiar el carácter de variación de la función. Cuanto mayor es el valor absoluto de la derivada, tanto más fuerte es la variación de la función y al variar x y, por consiguiente, tanto más bruscamente asciende o desciende la gráfica de esta función. Si la derivada de una función y es positiva, esto significa, evidentemente, que cuando el argumento x crece la función y también crece; si la derivada de la función es negativa, esto significa que la función y decrece cuando el argumento x crece. Este problema se estudia más detalladamente en el § 2 del cap. XI.

La noción de derivada halla numerosas aplicaciones en geometría, física, mecánica, química, biología y otras ciencias.

§ 4. Otras aplicaciones de la derivada

La rapidez con la cual se desarrollan los fenómenos físicos, químicos, biológicos y otros, por ejemplo, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo, la velocidad de una reacción química, etc., se expresan también con ayuda de la derivada. Expliquémoslo con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Supongamos que la temperatura U de un cuerpo es una función decreciente del tiempo: $U = f(t)$.

Sea t un instante dado del tiempo. Si t recibe un incremento Δt, la temperatura U varía (decrece) en ΔU. En este caso la relación

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}$$

es la *velocidad media* de enfriamiento del cuerpo. El límite de esta relación para $\Delta t \to 0$, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = f'(t),$$

expresa la velocidad de enfriamiento del cuerpo en el instante dado t.

De este modo, *la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es igual a la derivada de la temperatura del cuerpo respecto al tiempo.*

EJEMPLO 2. Sea x la cantidad de una sustancia formada como resultado de una reacción química en un intervalo de tiempo t. Es evidente que x es una función del tiempo t: $x = f(t)$.

Si t recibe un incremento Δt, x recibirá un incremento Δx. En este caso la relación

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

es la *velocidad media* de la reacción química y el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t)$$

expresa *la velocidad de la reacción química en el instante dado t.*

De este modo, *la velocidad de la reacción química es igual a la derivada de la masa reaccionante respecto al tiempo.*

§ 5. Relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función

Hemos visto (§ 1 del cap. VIII) que una función

$$y = f(x) \tag{1}$$

se denomina *continua en el punto* x, si en este punto

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

La función (1) se llama *derivable en el punto* x, si ella tiene derivada en este punto, es decir, si existe un límite finito:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \tag{2}$$

Entre estas nociones del análisis matemático existe una relación simple.

TEOREMA. *Si una función es derivable en un punto, ella es continua en ese punto. La afirmación recíproca es incorrecta: una función continua puede no tener derivada.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en el punto x, es decir, la relación (2) está cumplida por esta función.

Escribamos la igualdad

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \quad (\Delta x \neq 0).$$

De aquí

$$\lim_{x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Por consiguiente, la función $y = f(x)$ es continua en el punto x.

COROLARIO. *Si una función es discontinua en un punto, ésta no tiene derivada en este punto.*

Como ejemplo de función continua que no tiene derivada en un punto, se puede indicar la función

$$y = | x |$$

(fig. 103). Esta función es continua en $x = 0$, pero no es derivable para este valor (de la variable), porque en el punto $x = 0$ de la gráfica de la función no existe tangente.

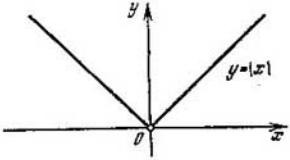

Fig. 103

Los matemáticos (**Weierstrass** y otros) supieron construir funciones continuas que no admiten derivadas en ningún punto.

Una distinción clara entre las nociones de continuidad y de derivabilidad de una función fue establecida por primera vez por **N.I. Lobachevski,** genial matemático ruso.

Señalemos que la derivada $y' = f'(x)$ de una función continua $y = f(x)$ **no debe ser obligatoriamente continua.** Si una función $f(x)$ admite una derivada continua $f'(x)$ sobre un intervalo $\langle a, b \rangle$, la función se llama *suave* en ese intervalo. Una función $f(x)$ se llama *suave a trozos* en un intervalo $\langle a, b \rangle$ cuando su derivada $f'(x)$ admite solamente un número finito de puntos de discontinuidad, y todos de primera especie.

§ 6. Noción de derivada infinita

Si una función $y = f(x)$ es continua en un punto x_0 y si

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \infty, \qquad (1)$$

se dice que la función $f(x)$ tiene una *derivada infinita* en el punto $x = x_0$. Por la significación geométrica de la derivada (§ 1), la derivada $y' = f'(x_0)$ es igual al coeficiente angular $k = \operatorname{tg} \alpha$ de la tangente en el punto x_0. Por eso, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ y, por consiguiente, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. De este modo, la condición (1) significa geométricamente que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una tangente vertical en el punto x_0.

EJERCICIOS

1. ¿Qué se entiende por: a) pendiente media de un camino; b) pendiente de un camino en un punto dado?
2. ¿Qué significa: a) la densidad lineal media de una barra material; b) la densidad lineal de una barra en un punto dado?
3. ¿Qué se entiende por: a) velocidad media de la variación del área de un mar; b) velocidad de variación de área de un mar en un instante dado?
4. Definir: a) el calor específico medio de un cuerpo; b) el calor específico de un cuerpo.

Capítulo X

Teoremas fundamentales sobre las derivadas

§ 1. Observaciones preliminares

Como hemos visto, la solución de numerosos problemas se reduce al cálculo de las derivadas de funciones conocidas. Por eso es importante saber hallar rápidamente las derivadas de funciones más o menos complicadas.

La operación de cálculo de una derivada se llama *derivación* (*diferenciación*), y la función que tiene una derivada finita sobre un conjunto dado se llama función *derivable* (*diferenciable*) sobre este conjunto. El estudio de la derivada y de sus aplicaciones lo efectúa la disciplina *cálculos diferenciales.*

En este capítulo examinaremos las reglas principales de la *derivación de funciones.*

Supondremos aquí que las funciones consideradas están definidas en cierto intervalo finito o infinito, si no se ha especificado lo contrario.

Antes de pasar al estudio de las reglas principales para hallar las derivadas, calculamos las derivadas de algunas funciones simples.

§ 2. Derivadas de algunas funciones simples

La derivada de una función $y = f(x)$ puede ser hallada mediante el siguiente procedimiento:

1) se le da al argumento x un incremento $\Delta x \neq 0$ y se halla para la función y el nuevo valor incrementado $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$;

2) restando del valor nuevo de la función $y + \Delta y$ su valor inicial $y = f(x)$ se obtiene el incremento Δy de la función;

3) se compone la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) se halla el límite de esta relación cuando $\Delta x \to 0$. El resultado del paso al límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ es efectivamente la **derivada** y' de la función y respecto al argumento x, si, claro está, este límite existe.

Aplicando este procedimiento hallemos las derivadas de algunas funciones simples (elementales).

I. Derivada de una potencia x^m, donde m es un número entero positivo. Sea

$$y = x^m.$$

Tenemos $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$ o, según el binomio de Newton,

$$y + \Delta y = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m,$$

de donde

$$\Delta y = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{m-1}.$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, hallamos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1}$$

Por consiguiente,

$$(x^m)' = mx^{m-1}. \tag{1}$$

Así, pues, tenemos un teorema: *la derivada de una potencia entera positiva de una variable independiente es igual al producto de su exponente por la misma base cuyo exponente está disminuido en una unidad.*

En particular, para $m = 1$ obtenemos

$$(x)' = 1,$$

es decir, *la derivada de una variable independiente es igual a la unidad.*

Tenemos también

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2,$$

etc.

OBSERVACIÓN. Como se mostrará más adelante, (§ 10) la fórmula (1) es válida para todo exponente m real y constante (en particular para un exponente fraccionario). Por eso tenemos, por ejemplo,

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0);$$

es decir, *la derivada de la raíz cuadrada de una variable independiente es igual a la magnitud inversa del duplo de la raíz.*

Cuando $x = 0$ la función $y = \sqrt{x}$ tiene una derivada $y' = \infty$ que es unilateral, porque $\Delta x \to +0$. Geométricamente esto significa que la tangente a la parábola $y = \sqrt{x}$ en el punto $x = 0$ es perpendicular al eje Ox.

II. Derivada del sen x. Sea

$$y = \operatorname{sen} x,$$

donde el argumento x está expresado en radianes. Tenemos

$$y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x).$$

De aquí

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x, \text{ o sea } \Delta y = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Dividiendo ambos miembros de la última igualdad por Δx obtendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

o sea

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ y utilizando el teorema sobre el límite de un producto tenemos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Del teorema sobre el límite de la relación entre el seno de un arco infinitamente pequeño y este mismo arco (véase el § 11 del cap. VII) se deduce que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Además, teniendo en cuenta la continuidad de la función $\cos x$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x.$$

Por consiguiente,

$$y' = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$

es decir,

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x. \qquad (2)$$

Entonces obtenemos el teorema: *la derivada del* sen x *es igual al* $\cos x$.

III. Derivada del $\cos x$. Sea

$$y = \cos x.$$

En este caso $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$ y, por consiguiente,

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x, \text{ o sea, } \Delta y = -2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

De aquí,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtendremos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Por cuanto

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \operatorname{sen} x,$$

hallamos finalmente

$$y' = -\operatorname{sen} x,$$

es decir,

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x. \tag{3}$$

De este modo, tenemos el teorema: *la derivada del* $\cos x$ *es igual al* $\operatorname{sen} x$ *tomado con el signo contrario.*

§ 3. Reglas principales de la derivación de funciones

Pasamos ahora a deducir las reglas principales de la derivación de funciones.

Supongamos que todas las funciones consideradas están definidas y son derivables sobre un intervalo común y que todos los valores utilizados del argumento x, así como los valores incrementados $x + \Delta x$ pertenecen a este intervalo.

I. Derivada de una constante. *La derivada de una constante es igual a cero.*

Una magnitud constante c puede ser considerada como una función

$$f(x) = c$$

que toma un solo valor.

Demos al argumento x un incremento $\Delta x \neq 0$; en este caso, por ser constante la función $f(x)$ al cambiar el argumento, obtendremos

$$f(x + \Delta x) = c.$$

Sustrayendo miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, obtendremos

$$f(x+\Delta x)-f(x)=0,$$

de donde

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0.$$

Pasando ahora al límite cuando $\Delta x \to 0$ hallamos

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0,$$

es decir,

$$c'=0. \qquad (1)$$

Traduciendo este resultado al lenguaje de mecánica, obtendremos la siguiente interpretación concreta de nuestro teorema: *la velocidad de un punto en reposo es igual a cero.*

II. Derivada de una suma. ***La derivada de una suma algebraica*** *de un número finito de funciones derivables es igual a la suma algebraica de las derivadas de estas funciones.*

Sea, por ejemplo,

$$y=u+v-w,$$

donde u, v y w son funciones derivables de x.

Demos al argumento x un incremento Δx; en este caso cada una de las funciones u, v y w recibirá el incremento respectivo Δu, Δv y Δw; como resultado la función y recibirá el incremento Δy. Tenemos

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w).$$

Sustrayendo miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, hallamos

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w.$$

Dividiendo los dos miembros de la última igualdad por Δx, tendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Pasando ahora al límite cuando $\Delta x \to 0$, y teniendo en cuenta que cada sumando del segundo miembro tiene límite, hallamos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

o, utilizando la definición de la derivada, finalmente obtendremos

$$y'=u'+v'-w'.$$

De este modo, *si cada una de las funciones u, v y w es derivable, la suma algebraica de estas funciones* (por ejemplo, $u+v-w$) *es* *también derivable; en este caso*

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Calcular la derivada de la función $y = 2 - x + x^2$.

Aplicando la fórmula (1) del § 2, obtendremos $y' = (2)' - (x)' + (x^2)' = -1 + 2x$.

COROLARIO. *Si dos funciones derivables se diferencian en un sumando constante, sus derivadas son iguales.*

Efectivamente, si $f(x)$ es una función derivable y c es un sumando constante, tenemos

$$[f(x) + c]' = f'(x) + (c)' = f'(x) + 0 = f'(x).$$

III. Derivada de un producto. ***La derivada de un producto*** *de dos funciones derivables es igual a la suma del producto del primer factor por la derivada del segundo más el producto del segundo factor por la derivada del primero.*

Sea

$$y = uv,$$

donde u y v son funciones derivables de x. Demos a x un incremento Δx; en este caso u recibirá un incremento Δu, v recibirá un incremento Δv e y obtendrá un incremento Δy. Tenemos

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

o

$$y + \Delta y = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Por consiguiente,

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Pasando al límite en la última igualdad cuando $\Delta x \to 0$ y teniendo en cuenta que u y v no dependen de Δx tendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x.$$

o bien

$$y' = uv' + vu'.$$

De este modo, *si cada uno de los factores de u y v tiene derivada, el producto de estos factores tambien tendrá derivada; además*

$$(uv') = uv' + vu'. \tag{3}$$

EJEMPLO 2. Sea $y = x^3 \operatorname{sen} x$.

Aplicando la fórmula (3) y utilizando las fórmulas (1) y (2) del § 2, tendremos

$$y' = x^3 (\operatorname{sen} x)' + (x^3)' \operatorname{sen} x = x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x.$$

COROLARIO 1. *Se puede sacar un factor constante fuera del signo de derivación.*

Efectivamente, si c es un factor constante, tenemos

$$(cu)' = cu' + cu,$$

de donde, puesto que $c' = 0$, obtenemos

$$(cu)' = cu'.$$

COROLARIO 2. *Si*

$$y = uvw,$$

donde u, v y w *son funciones derivables de* x, *entonces*

$$y' = (uvw)' = [(uv)\,w]' = (uv)\,w' + (uv)'\,w = (uv)\,w' + $$
$$+ (uv' + u'v)\,w = u'vw + uv'w + uvw'.$$

En general, *la derivada del producto de varias funciones derivables es igual a la suma de los productos de la derivada de cada una de estas funciones por todas las demás.*

IV. Derivada de un cociente. *Si el numerador y el denominador de una fracción son funciones derivables y si el denominador no se anula, la* ***derivada de la fracción*** *es otra fracción cuyo numerador es la diferencia entre el producto del denominador de la fracción por la derivada del numerador y el producto del numerador de la fracción por la derivada del denominador, mientras que el denominador es el cuadrado del denominador inicial.*

Sea

$$y = \frac{u}{v},$$

donde u y v son funciones derivables de x y $v \neq 0$. Demos al argumento x un incremento Δx. En este caso u, v, y recibirán respectivamente incrementos Δu, Δv, Δy, y tendremos

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Sustrayendo miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, obtendremos

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v},$$

o bien

$$\Delta y = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{(v + \Delta v)\,v}.$$

De aquí hallamos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)\,v}. \tag{4}$$

Sea $\Delta x\to 0$. Como la función v es derivable en el punto x, ella es continua en este mismo punto (véase el § 5 del cap. IX) y, por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Por eso, pasando al límite en la igualdad (4) y teniendo en cuenta que las funciones u y v tienen derivadas, obtenemos

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

o, definitivamente,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}. \tag{5}$$

EJEMPLO 3. Sea $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.
Utilizando la fórmula (5) tendremos

$$y'=\frac{(x^2+1)\,(x^2-1)'-(x^2-1)\,(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{(x^2+1)\,2x-(x^2-1)\,2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2\,x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

COROLARIO 1. *Si el denominador de una fracción es una magnitud constante*, entonces,

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{cu'-uc'}{c^2}=\frac{u'}{c},$$

es decir,

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}.$$

OBSERVACIÓN. El último resultado es evidente porque

$$\frac{u}{c}=\frac{1}{c}\cdot u$$

y, por consiguiente,

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}u'=\frac{u'}{c}.$$

COROLARIO 2. *Si el numerador de una fracción es una magnitud constante*, entonces,

$$\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{vc'-cv'}{v^2}=-\frac{cv'}{v^2}. \tag{6}$$

En particular, para $c = 1$ hallamos

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}. \tag{7}$$

EJEMPLO 4. Si $y = \frac{1}{x^2-1}$, de acuerdo con la fórmula (7) tenemos

$$y' = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

V. Derivada de una potencia con exponente entero negativo. Sea m un número entero positivo e

$$y = x^{-m},$$

o bien

$$y = \frac{1}{x^m}.$$

Aplicando la fórmula (7), obtendremos

$$y' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

Por consiguiente,

$$(x^{-m})' = -mx^{-m-1}. \tag{8}$$

Acabamos de obtener la misma regla que para la derivación de una potencia entera positiva.

VI. Derivada de la tg x. Sea

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Utilizando la fórmula (5) hallamos

$$y' = \frac{\cos x \cdot (\operatorname{sen} x)' - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Entonces

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x. \tag{9}$$

VII. Derivada de la ctg x. Sea

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

En este caso tenemos

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x \cdot (\cos x)' - \cos x\,(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Entonces

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{10}$$

§ 4. Derivada de una función compuesta

Examinemos una **función compuesta**

$$y = f\,[\varphi\,(x)]. \tag{1}$$

Si en la cadena de las relaciones funcionales $y = f(z)$ y $z = \varphi(x)$ el argumento x es el último, lo llamaremos *variable independiente* (para subrayar el hecho de que la variación de este argumento no depende del comportamiento de otras variables).

De este modo, cabe distinguir la noción de argumento de la de variable independiente. Por ejemplo, sea

$$y = \operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad z = x^2.$$

Aquí z es el argumento de la función y, pero z no es, evidentemente, una variable independiente.

Supondremos para simplificar que la función $y = f(z)$ está definida y es derivable en un intervalo (A, B), y que la función $z = \varphi(x)$ está definida, es derivable en un intervalo (a, b) y toma los valores del intervalo (A, B). En este caso, la función (1) estará de antemano definida y es continua en el intervalo (a, b). La cuestión consiste en decidir si esta función es derivable.

TEOREMA. *Si $y = f(z)$ y $z = \varphi(x)$ son funciones derivables respecto a sus argumentos, la derivada de la función compuesta*

$$y = f\,[\varphi\,(x)]$$

existe y es igual a la derivada de la función dada y respecto al argumento intermedio z, multiplicada por la derivada del argumento intermedio z respecto a la variable independiente x, es decir,

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea x un valor admisible de la variable independiente. Demos a x un incremento suficientemente pequeño no nulo Δx; en este caso las funciones $z = \varphi(x)$ e $y = f(z)$ recibirán los incrementos correspondientes Δz y Δy. Puesto que según la hipótesis del teorema existe la derivada $y'_z = f'(z)$, se puede escribir, suponiendo que $\Delta z \neq 0$,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z + \alpha$$

(véase el § 6 del cap. VII), donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$ y, por consiguiente,

$$\Delta y = (y'_z + \alpha)\,\Delta z.$$

Predeterminamos un α infinitamente pequeño para $\Delta z = 0$, suponiendo que $\alpha = 0$ para $\Delta z = 0$. Entonces, la última igualdad también es justa para $\Delta z = 0$ porque en este caso sus dos miembros son evidentemente iguales a cero. Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por Δx, tendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (y'_z + \alpha) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Pasando ahora al límite cuando $\Delta x \to 0$ y teniendo en cuenta que en este caso $\Delta z \to 0$ y, por consiguiente, $\alpha \to 0$, obtendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (y'_z + \alpha) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

o bien,

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x, \tag{2}$$

lo que demuestra el teorema.

El teorema demostrado puede ser brevemente enunciado así:

La función derivable de otra función derivable, es también una función derivable.

OBSERVACION. En las designaciones de Leibniz la fórmula (2) adquiere la forma de la igualdad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$.

Tomando $z = x^2$, en este caso $y = \operatorname{sen} z$. De aquí

$$z'_x = 2x \quad \text{e} \quad y'_z = \cos z = \cos(x^2).$$

Por consiguiente, según la fórmula (1) tenemos,

$$y'_x = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2).$$

EJEMPLO 2. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{sen}^3 x = (\operatorname{sen} x)^3$.

Tomamos $z = \operatorname{sen} x$; entonces $y = z^3$. De aquí

$$z'_x = \cos x \quad \text{e} \quad y'_z = 3z^2 = 3 \operatorname{sen}^2 x.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x.$$

Al adquirir cierta experiencia la variable intermedia z no se escribe, introduciéndola sólo mentalmente.

EJEMPLO 3. Hallar la derivada de la función $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$.

Utilizando la fórmula para la derivada de la raíz cuadrada (§ 2) y aplicando la regla de derivación de una función compuesta, tenemos

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot (x^2+4x+3)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot (2x+4) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

EJEMPLO 4. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}$.

Tenemos

$$y' = 3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = 3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \sec^2 \frac{x}{2}.$$

§ 5. Derivada de una función inversa

Sea

$$y = f(x) \tag{1}$$

una función derivable del argumento x definida sobre un intervalo (a, b). Si en la ecuación (1) y se considera argumento, y x, función, la nueva función

$$x = \varphi(y),$$

donde $f[\varphi(y)] \equiv y$, se llama, como sabemos, función **inversa** respecto a la dada. Nuestra tarea es: conociendo la derivada $y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la función $y = f(x)$, calcular la derivada $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ de su función inversa $x = \varphi(y)$, suponiendo que la función inversa existe y es continua sobre el intervalo correspondiente (sin resolver la ecuación (1)).

TEOREMA. *La* ***derivada de la función inversa****, de una función derivable cuya derivada no es nula, es igual a la magnitud inversa de la derivada de la función inicial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y = f(x)$ una función derivable y sea $y'_x = f'(x) \neq 0$.

Sean $\Delta y \neq 0$ el incremento de la variable independiente y y Δx el incremento correspondiente de la función inversa $x = \varphi(y)$. Escribamos la igualdad

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}\ ^{1)}. \tag{2}$$

[1]) Se puede demostrar que, si en nuestras condiciones $\Delta y \neq 0$, entonces $\Delta x \neq 0$. Por eso la igualdad (2) no puede perder su sentido.

Pasando al límite en la igualdad (2) cuando $\Delta y \to 0$, y teniendo en cuenta que en este caso $\Delta x \to 0$ (por ser continua la función inversa), obtendremos

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

De aquí

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \tag{3}$$

donde x'_y es la derivada de la función inversa.

OBSERVACIÓN. Si se utilizan las designaciones de Leibniz, la fórmula (3) se escribirá así:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

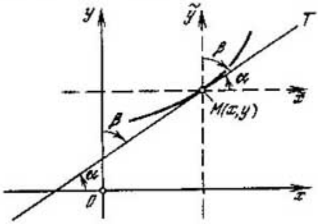

Fig. 104

Recordando la significación geométrica de la derivada se puede dar una interpretación simple de la fórmula (3). En un punto $M(x, y)$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ trazamos la tangente MT a esta gráfica y dos rectas $M\tilde{x}$ y $M\tilde{y}$ paralelas respectivamente a los ejes de coordenadas Ox y Oy (fig. 104). Designando por α y β los ángulos formados por la tangente MT y las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy, tendremos

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\angle TM\tilde{x}) = y'_x$$

y

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\angle TM\tilde{y}) = x'_y.$$

Puesto que $\alpha + \beta = \pi/2$, resulta

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = y'_x \cdot x'_y = 1,$$

lo que es equivalente a la fórmula (2).

EJEMPLO. Sea $y = x + x^3$. Tenemos $y'_x = 1 + 3x^2$ y, por consiguiente,

$$x'_y = \frac{1}{1 + 3x^2}.$$

§ 6. Derivada de una función implícita

Examinemos algunos ejemplos de derivación de **funciones implícitas**.

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la función y $(y > 0)$ definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Resolviendo esta ecuación respecto a y y tomando el signo más según los datos del problema, tendremos nuestra función en forma explícita:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Su derivación no representa ahora ninguna dificultad.

Sin embargo, en ciertos casos es imposible resolver la ecuación dada respecto a y por medio de transformaciones elementales y nos vemos obligados a considerar a y como una función implícita de x. Por eso indicamos otro procedimiento para calcular la derivada de una función y implícita. Suponiendo que y está reemplazada en la ecuación dada por su expresión explícita, obtendremos la identidad

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\equiv 1,$$

siendo aquí y función de x. Es evidente que si dos funciones son idénticamente iguales entre sí, sus derivadas serán también iguales. Por eso al tomar las derivadas de los primero y segundo miembros de la identidad precedente y aplicando la regla de derivación de una función compuesta (§ 4) tendremos

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,$$

de donde

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

EJEMPLO 2. Sea y una función implícita de x, positiva o negativa, definida por la ecuación

$$y^2=2px.$$

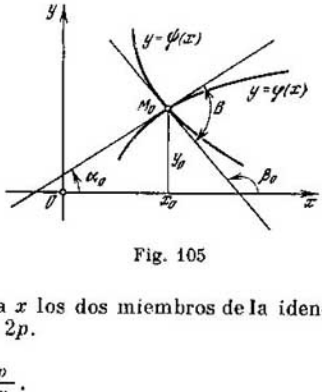

Fig. 105

Suponiendo que y es reemplazada por la expresión explícita correspondiente y derivando respecto a x los dos miembros de la identidad obtenida, tendremos $2yy'=2p$.

De aquí

$$y'=\frac{p}{y}.$$

OBSERVACIÓN. Si dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ no son idénticamente iguales y lo son solamente para cierto valor de x_0 del argumento

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0),$$

esto no significa, en general, que $\varphi'(x_0)=\psi'(x_0)$. Esto se ve claramente en la fig. 105, donde

$$\varphi'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha_0 \quad \text{y} \quad \psi'(x_0)=\operatorname{tg}\beta_0.$$

De este modo, *en general no se puede derivar una igualdad miembro a miembro.*

§ 7. Derivada de una función logarítmica

Sea

$$y = \log_a x,$$

donde $x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Hallemos la derivada de esta función aplicando el procedimiento general descrito al comienzo del § 2.

Demos al argumento x (x está dado) un incremento $\Delta x \neq 0$ tal, que $x + \Delta x > 0$. En este caso la función y recibirá un incremento Δy y tendremos $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$; por consiguiente,

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$$

o, puesto que la diferencia de logaritmos es igual al logaritmo del cociente,

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Al dividir los dos miembros de la última igualdad por Δx, obtendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Considerando aquí que $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ $(\alpha > -1)$, hallamos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\alpha} \log_a (1 + \alpha),$$

o, en virtud de la propiedad conocida del logaritmo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a (1 + \alpha)^{1/\alpha}.$$

Sea $\Delta x \to 0$, en este caso es evidente que $\alpha \to 0$ (como el producto de un infinitésimo Δx por una constante $\frac{1}{x}$). Por eso

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\alpha \to 0} [\log_a (1 + \alpha)^{1/\alpha}].$$

La función $F(\alpha) = (1 + \alpha)^{1/\alpha}$ es evidentemente continua para $\alpha \neq 0$. Como la función logarítmica es también continua y

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$$

(§ 12 del cap. VII), los signos $\lim\limits_{\alpha \to 0}$ y $\log_a$ pueden cambiar de lugar (§ 2 del cap. VIII)[1]):

$$\lim_{\alpha \to 0} [\log_a (1 + \alpha)^{1/\alpha}] = \log_a [\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha}] = \log_a e.$$

[1]) Suponiendo $F(0) = e$ predeterminamos la continuidad de la función $F(\alpha) = (1 + \alpha)^{1/\alpha}$ cuando $\alpha = 0$.

Por consiguiente

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

De este modo tenemos la fórmula

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e. \tag{1}$$

Utilizando la relación conocida (véase el § 13 del cap. VII) $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, la fórmula (1) puede ser escrita así:

$$(\log_a x') = \frac{1}{x \ln a}. \tag{1'}$$

En particular, considerando aquí que $a = e$ y recordando que $\ln e = 1$ obtendremos

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{2}$$

es decir, *la **derivada del logaritmo natural** de una variable independiente es igual a la magnitud inversa de esta variable independiente.*

Otro caso particular importante se obtiene para $a = 10$:

$$(\log x)' = \frac{M}{x},$$

donde $M = \log e = 0{,}43429$ es el módulo de conversión.

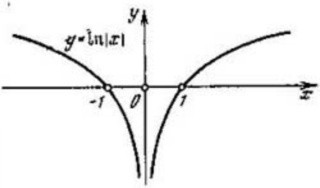

Fig. 106

La función logarítmica $y = \ln x$ está definida solamente para $x > 0$. Para las aplicaciones es cómodo examinar la función

$$y = \ln |x|$$

que tiene sentido tanto para x positiva como negativa, es decir, está definida para $x \neq 0$ (fig. 106). Para calcular su derivada escribiremos esta función con ayuda de dos igualdades

$$y = \ln x \text{ para } x > 0 \quad \text{e} \quad y = \ln(-x) \text{ para } x < 0.$$

De aquí obtenemos

$$y' = \frac{1}{x} \text{ para } x > 0$$

e

$$y' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \text{ para } x < 0.$$

Por consiguiente,

$$y' = \frac{1}{x} \text{ para } x \neq 0, \text{ es decir, } (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

§ 8. Nociones sobre la derivada logarítmica

Sea

$$y = \ln z, \text{ donde } z = \varphi(x).$$

En este caso, aplicando la fórmula de derivación de una función compuesta, obtendremos

$$y'_x = (\ln z)'_x = (\ln z)'_z z'_x, \quad \text{o} \quad y'_x = \frac{1}{z} z'_x.$$

De este modo, tenemos

$$(\ln z)'_x = \frac{z'}{z}.$$

La derivada del logaritmo de una función se llama *derivada logarítmica* de esta función.

EJEMPLO. Hallar la derivada de la función $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$.
Aplicando la última fórmula, tenemos

$$y' = \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} = \frac{2x+4}{x^2+4x+5}.$$

§ 9. Derivada de una función exponencial

Sea

$$y = a^x, \quad \text{donde } a > 0.$$

Entonces

$$\ln y = x \ln a.$$

Derivando ambos miembros con respecto a x, tendremos [1]

$$\frac{1}{y} y' = \ln a,$$

de donde

$$y' = y \ln a,$$

y, finalmente,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{1}$$

De este modo ***la derivada de una función exponencial*** *es igual al producto de esta función por el logaritmo natural de la base.*

EJEMPLO. Hallar la derivada de la función $y = 2^x$.
Aplicando la fórmula (1), tenemos

$$(2^x)' = 2^x \ln 2.$$

En particular, tomando en la fórmula (1) $a = e$, obtendremos

$$(e^x)' = e^x,$$

---

[1] La existencia de y' resulta de la derivabilidad de la función logarítmica (véanse los §§ 7 y 5).

es decir, *la derivada de la función exponencial e^x es igual a la misma función*. En este sentido e^x es una función muy simple del análisis matemático.

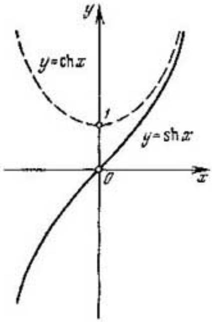

Fig. 107

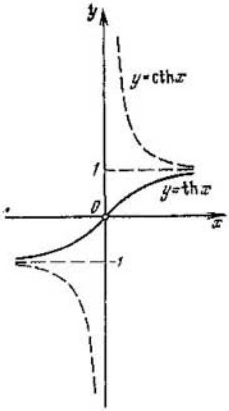

Fig. 108

En las aplicaciones se encuentran frecuentemente *funciones hiperbólicas* definidas formalmente por las igualdades

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2}$$

(fig. 107) y

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{3}$$

(fig. 108). Mediante las fórmulas (2) obtenemos la **relación fundamental**

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

En razón de las fórmulas (2) y (3) hallamos directamente las derivadas de las funciones hiperbólicas

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

§ 10. Derivada de una función potencial

Examinemos una función potencial

$$y = x^{\alpha} \qquad (x > 0), \tag{1}$$

donde α es un número real arbitrario.

Aplicando logaritmos a la igualdad (1), obtendremos

$$\ln y = \alpha \ln x. \qquad (2)$$

De aquí

$$y = e^{\alpha \ln x}.$$

Por eso, en virtud del teorema sobre la derivada de una función compuesta (§ 4), la función potencial y es derivable.

Derivando la igualdad (2) con respecto a la variable x tendremos

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

De aquí,

$$y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

De este modo obtenemos una **regla general** de derivación de la función potencial

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (2)$$

es decir, *la derivada de la potencia de una variable independiente es igual al exponente de la potencia multiplicado por la base elevada a una potencia disminuida en una unidad.*

Si la función potencial (1) tiene sentido para $x \leqslant 0$, la fórmula (2) será también justa para $x \leqslant 0$.

§ 11. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Las funciones inversas a las trigonométricas se llaman *funciones trigonométricas inversas o funciones circulares inversas* (Arcsen x, Arccos x, Arctg x, Arcctg x, etc.).

Los valores principales de las funciones trigonométricas inversas se obtienen como resultado de la inversión de las funciones trigonométricas derivables (con derivada distinta de cero en el dominio correspondiente) y, por consiguiente, en virtud del teorema sobre la derivada de la función inversa (§ 5) son también **derivables**. Hallemos sus derivadas.

I. Derivada del arcsen x. Sea

$$y = \operatorname{arcsen} x, \qquad (1)$$

donde $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$ (véase el § 9 del cap. VI). La función inversa tiene la forma

$$x = \operatorname{sen} y, \qquad (2)$$

con todo eso $x'_y = \cos y \neq 0$, si $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Aplicando la regla de derivación de una función inversa (§ 5), obtendremos

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}. \qquad (3)$$

Como $\cos y > 0$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces, teniendo en cuenta la igualdad (2), obtenemos

$$\cos y = +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0, \quad -1 < x < 1.$$

Por consiguiente, en virtud de la (3) nos queda

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

es decir

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

De la fórmula (4) se deduce que la curva (1) tiene para $x = \pm 1$ tangentes verticales.

II. Derivada del arccos x. Sea

$$y = \arccos x,$$

en este caso

$$x = \cos y,$$

además, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

La aplicación de la regla de derivación de la función inversa (§ 5) da

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}.$$

Puesto que $\operatorname{sen} y > 0$ para $0 < y < \pi$, entonces

$$\operatorname{sen} y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0 \quad (-1 < x < 1).$$

Por eso

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De este modo,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5}$$

OBSERVACIÓN La fórmula (5) puede ser obtenida también por la relación

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \pi/2.$$

III. Derivada del arctg x. Sea

$$y = \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x < +\infty, -\pi/2 < y < \pi/2)$$

y, por consiguiente, $x = \operatorname{tg} y$.

Tenemos (véase el § 3 del cap. VI)

$$y'_x \quad \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De este modo,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

IV. Derivada del arcctg x. Sea

$$y = \operatorname{arcctg} x \quad (-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi),$$

entonces, $x = \operatorname{ctg} y$.

Tenemos (véase el § 3 del cap. VII)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},$$

es decir,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

EJEMPLO.

$$\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 0).$$

§ 12. Derivada arbitraria definida paramétricamente

Es, a veces, cómodo expresar la dependencia entre las variables x e y por dos ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

donde t es una variable auxiliar (parámetro). Este procedimiento se utiliza muy frecuentemente en mecánica, donde el parámetro t designa generalmente el tiempo y las ecuaciones (1) son *ecuaciones paramétricas de la trayectoria* de un punto $M(x, y)$ en movimiento.

Hablando en general las ecuaciones (1) definen y como una función compuesta de x. Efectivamente, después de resolver (si es posible) la primera ecuación del sistema (1) respecto al parámetro t tendremos

$$t = \theta(x),$$

donde θ es la función inversa de la función φ. De aquí, eliminando el parámetro t de las ecuaciones (1), obtendremos

$$y = \psi(\theta(x)). \tag{2}$$

Aplicando la fórmula (2) es fácil calcular la derivada y'_x como derivada de una función compuesta.

Sin embargo, en la práctica, la eliminación del parámetro t resulta frecuentemente difícil y, a veces, imposible. Por eso daremos una regla para hallar la derivada y'_x sin eliminar el parámetro.

TEOREMA. *Si una función y del argumento x está dada en forma paramétrica* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, donde las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son derivables y $\varphi'(t) \neq 0$, *la derivada de esta función es*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN En la sucesión de igualdades

$$y = \psi(t), \quad t = \theta(x),$$

donde $t = \theta(t)$ es la función inversa de $x = \varphi(t)$, examinaremos el parámetro t como un argumento intermedio. En este caso, según la regla de derivación de una función compuesta (§ 4), tenemos

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x. \tag{4}$$

Aplicando ahora la regla de derivación de la función inversa (§ 5), obtendremos

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{5}$$

Por consiguiente, de las fórmulas (4) y (5) se deduce

$$y'_x = y'_t : x'_t$$

lo que se quería demostrar.

OBSERVACIÓN. Utilizando las designaciones de Leibniz, la fórmula (3) puede obtener la forma de una igualdad evidente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Esto subraya una vez más la comodidad de las designaciones de Leibniz.

EJEMPLO Sea

$$x = t^2, \quad y = t^3. \tag{6}$$

Tenemos $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$. Por consiguiente,

$$y'_x = y'_t : x'_t = 3t^2 : 2t = \frac{3}{2} t$$

La validez de la última fórmula puede ser verificada directamente eliminando el parámetro t de las igualdades (6).

§ 13. Enumeración de las derivadas fundamentales

Todas las reglas y fórmulas de derivación de funciones de una variable independiente x, que acabamos de establecer, se reúnen en la tabla siguiente:

I. $c' = 0$.

II. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$.

III. $(cu)' = cu'$.

IV. $(uv)' = uv' + vu'$.

V. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

VI. $y'_x = y'_z \cdot z'_x$.

VII. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

VIII. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x' = 1$.

IX. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$

X. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$

XI. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x.$

XII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$

XIII. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

XIV. $(a^x)' = a^x \ln a,\ (e^x)' = e^x.$

XV. $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

XVI. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

XVII. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

XVIII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

§ 14. Noción sobre derivadas sucesivas

La derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ se llama *derivada primera* y representa cierta función nueva. Puede occurrir que esta función tenga su propia derivada. En este caso la derivada de la derivada primera se llama *derivada de segundo orden* o *derivada segunda* y se connota $f''(x)$. Así,

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

La derivada de la derivada segunda, si ella existe, se denomina *derivada tercera* y se connota $f'''(x)$, es decir,

$$f'''(x) = [f''(x)]',$$

etc.

Para la designación de las derivadas sucesivas se utilizan cifras romanas.

EJEMPLO Sea $y = \operatorname{sen} x$. En este caso, las derivadas sucesivas son:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\operatorname{sen} x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{\mathrm{IV}} = \operatorname{sen} x, \ldots$$

§ 15. Sentido físico de la derivada segunda

Como hemos visto, la derivada primera permite determinar la velocidad del movimiento. Mostremos que para calcular la aceleración hace falta utilizar la derivada segunda.

Sea $x = f(t)$ una ecuación que expresa la ley de movimiento de un punto M a lo largo del eje Ox. Supongamos que la velocidad del punto M sea v en el instante de tiempo t y $v + \Delta v$ en el instante $t + \Delta t$.

De este modo, Δv es la variación de la velocidad del punto durante el intervalo de tiempo Δt. La relación

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

se llama *aceleración media* del movimiento rectilíneo en el intervalo de tiempo Δt. El límite de esta relación cuando $\Delta t \to 0$, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t),$$

se llama *aceleración del punto M* en el instante dado t. Designando la aceleración con la letra j se puede escribir $j = v'(t)$. Pero $v = f'(t)$. Por consiguiente,

$$v'(t) = [f'(t)]' = f''(t).$$

Entonces tenemos

$$j = f''(t),$$

es decir, *la aceleración de un movimiento rectilíneo de un punto es igual a la derivada segunda del camino* [1] *recorrido respecto al tiempo.*

EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes: **1.** a) $y = 3x^2 - x + 5$; b) $f(x) = 1/x^2$. ¿A qué son iguales $f'(1)$, $f'(-10)$? **2.** $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **3.** $y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2}$. **4.** $y = \frac{ax+b}{a+b}$. **5.** $y = x^2(2x-1)$. **6.** $y = (x+1)\sqrt{x}$. **7.** $y = x^2 \operatorname{sen} x$. **8.** $y = 1/(1+x^2)$. **9.** $y = \frac{2x}{1-x^2}$. **10.** $y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$. **11.** $y = \operatorname{sen}^2 x$. **12.** $y = \operatorname{sen} x^2$. **13.** $y = \cos^3 \frac{x}{2}$. **14.** $y = \cos \frac{x^3}{2}$. **15.** $y = \sqrt{1+x^2}$. **16.** $y = \ln \ln x$. **17.** $y = \ln^2 x$. **18.** $y = \ln x^2$. **19.** $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. **20.** $y = x^n + n^x$. **21.** $y = e^{-x^2}$. **22.** $y = e^{x/2}(x^2 - 4x + 8)$. **23.** $y = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$. **24.** $x = \arccos \frac{1}{x}$. **25.** $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. **26.** $y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2$. **27.** $f(x) = x + \operatorname{arcctg} x$. **28.** $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. **29.** $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x$. **30.** $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

Hallar las derivadas de las funciones implícitas derivables $y = y(x)$ definidas por las ecuaciones:

31. $x^2 + y^2 - xy = 1$. **32.** $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. **33.** a) $y = x + \ln y$; b) hallar y' en el punto $M(1, 1)$, si $\frac{x}{y} + 2xy = 3$.

34. Hallar las derivadas y'_x de las funciones dadas en forma paramétrica: a) $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$; b) $x = \omega t$, $y = te^{\alpha t}$; c) $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \operatorname{sen} t$ para $t = 0$.

Hallar las derivadas segundas de las funciones siguientes:

35. a) $y = e^{-x^2}$; b) $y = x + \operatorname{sen} 2x$. **36.** $y = \ln x$. **37.** $y = x^2 e^{-x}$.

38. Hallar $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$, si $f(x) = \cos 3x$.

39. a) Escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $M(2, 8)$; b) escribir la ecuación de la tangente a la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = \pi$; c) escribir la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2x$ en el punto $(8, 4)$.

---

[1] Más exactamente: *de la abscisa del punto en movimiento.*

40. Escribir la ecuación de la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en el punto $M(x_1, y_1)$.

41. Escribir la ecuación de la tangente a la elipse $x = 10\cos t$, $y = 6 \operatorname{sen} t$ en el punto correspondiente a $t = \pi/3$.

42. Llámase normal a una curva dada en su punto $M(x_1, y_1)$ a la perpendicular a la tangente de esta línea en el punto de tangencia M.

Escribir las ecuaciones de las normales a las curvas siguientes en los puntos dados:

a) $y = \operatorname{tg} x$ en el punto $O(0, 0)$;

b) $y^2 = 2x$ en el punto $M(8, 4)$;

c) $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$.

43. ¿Con qué velocidad aumentará el área de un círculo en el momento cuando su radio $R = 10$ m, si el radio del círculo crece a una velocidad de 2 m/s?

44. Una persona de $h = 175$ cm de altura se aleja con una velocidad de 1,5 m/s de una farola situada a una altura $H = 5$ m. ¿Con qué velocidad crecerá la longitud de su sombra?

45. La ley del movimiento de un punto es $x = x_0 + \alpha t + \frac{\beta}{2} t^2$. Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento.

46. Conociendo la ecuación del movimiento de un punto $x = t - \operatorname{sen} t$ se pide determinar la velocidad y la aceleración de este punto.

Capítulo XI

Aplicaciones de las derivadas

§ 1. Teorema del incremento finito de una función y sus corolarios

TEOREMA DE LAGRANGE SOBRE EL INCREMENTO FINITO DE UNA FUNCION. *El incremento finito de una función derivable es igual al incremento correspondiente del argumento multiplicado por el valor de su derivada en un punto intermedio, es decir, si $f(x)$ es una función derivable sobre un intervalo $\langle a, b\rangle$ y x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ son cualesquiera valores pertenecientes a este intervalo, entonces*

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \tag{1}$$

donde $x_1 < \xi < x_2$.

DEMOSTRACION. Trazamos la secante AB por los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2 f(x_2))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 109). Deplazamos esta secante paralelamente a la posición inicial hasta que se

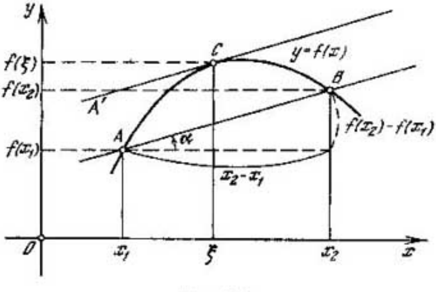

Fig. 109

convierta en la tangente $A'CB'$ a la gráfica de nuestra función en cierto punto $C(\xi, f(\xi))$[1], donde $x_1 < \xi < x_2$. De acuerdo con nuestra construcción el coeficiente angular de la secante AB es igual al de la tangente $A'CB'$, por eso

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

[1]) La existencia de esta posición se admite aquí sin demostración.

De aquí

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

lo que se quería demostrar[1]).

COROLARIO 1. *Si la derivada de una función arbitraria es igual a cero en un intervalo dado, la función es constante sobre este intervalo.*

Efectivamente, si por ejemplo,

$$f'(x) = 0 \quad \text{para } a < x < b,$$

entonces, tomando en la fórmula (1) $x_1 = x_0$, donde x_0 es cierto valor dado de (a, b), y $x_2 = x$, donde x es un valor cualquiera de este intervalo, tendremos

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi) = 0.$$

De aquí

$$f(x) = f(x_0) = \text{const, si } a < x < b.$$

COROLARIO 2. *Si dos funciones tienen sus derivadas iguales en un intervalo, estas funciones difieren entre sí, en el intervalo examinado, a lo sumo en un sumando constante.*

Efectivamente, si

$$f_1'(x) = f_2'(x)$$

para $x \in \langle a, b \rangle$, sobre este intervalo tenemos

$$[f_1(x) - f_2(x)]' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0.$$

Por consiguiente, en virtud del corolario 1 la función $f_1(x) - f_2(x)$ es constante para $a < x < b$, es decir,

$$f_1(x) - f_2(x) = C$$

para todos los valores de x pertenecientes al intervalo $\langle a, b \rangle$.

EJEMPLO. Como se sabe, para todo valor $-\infty < x < +\infty$ tenemos

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad (-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arcctg} x) = C,$$

donde C es una constante. Considerando que en la última identidad $x = 1$, obtendremos

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = C, \quad \text{es decir} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

De este modo

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

[1]) Se puede demostrar que el teorema de Lagrange sigue siendo válido, si la función es continua sobre un segmento $[a, b]$ y es derivable en el interior de este segmento (véase, por ejemplo, *N. Sájarnikov* «Matemáticas superiores», cap. II, § 5 (en ruso)).

TEOREMA SOBRE LAS RAÍCES DE UNA DERIVADA (teorema de Rolle). *El intervalo entre dos raíces consecutivas de una función derivable contiene siempre por lo menos una raíz de su derivada.*

DEMOSTRACIÓN Efectivamente, si $f(x)$ es una función derivable y

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad (x_1 < x_2),$$

según la fórmula (1), tenemos

$$(x_2 - x_1) f'(\xi) = 0,$$

o, puesto que $x_2 \neq x_1$

$$f'(\xi) = 0, \quad \text{donde } x_1 < \xi < x_2.$$

§ 2. Crecimiento y decrecimiento de una función de una variable

DEFINICIÓN. *Se dice que una función $f(x)$ es* ***creciente*** *en un intervalo $\langle a, b\rangle$, si a cualquier valor mayor del argumento x en este intervalo le corresponde un valor mayor de la función $f(x)$*; en otras pala-

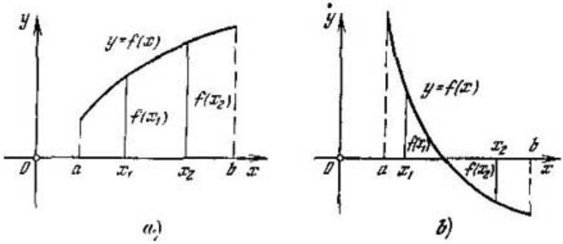

Fig. 110

bras, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $\langle a, b\rangle$, si para cualesquiera valores de x_1 y x_2 de este intervalo (fig. 110, a), de la desigualdad

$$x_2 > x_1$$

se deduce la desigualdad

$$f(x_2) > f(x_1).$$

De modo análogo se dice que $f(x)$ ***es decreciente*** *en un intervalo $\langle a, b\rangle$, si a un valor mayor de argumento x de este intervalo le corresponde un valor menor de la función*; en otras palabras, la función $f(x)$ es decreciente (fig. 110, b), si de la desigualdad

$$x_2 > x_1$$

se deduce la desigualdad

$$f(x_2) < f(x_1).$$

TEOREMA 1. CONDICIÓN NECESARIA DE CRECIMIENTO (DECRECIMIENTO) DE UNA FUNCIÓN.

1) *Si una función derivable es creciente en un intervalo, su derivada no es negativa en este intervalo.*

2) *Si una función derivable es decreciente en un intervalo, su derivada no es positiva en este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN 1) Sea $f(x)$ una función derivable, creciente en un intervalo $\langle a, b\rangle$. Por definición de la derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

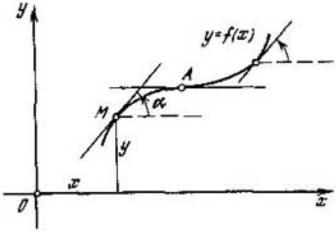

Fig. 111

Si los valores x y $x + \Delta x$ pertenecen al intervalo $\langle a, b\rangle$, entonces, en virtud del crecimiento de la función $f(x)$, el signo de su incremento $f(x + \Delta x) - f(x)$, donde $\Delta x \neq 0$ coincide con el signo de incremento Δx del argumento x. Por consiguiente, si Δx es suficientemente pequeño en valor absoluto, tenemos

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Pasando al límite en la última desigualdad cuando $\Delta x \to 0$ y teniendo en cuenta que el límite de una función positiva no puede evidentemente ser negativo, obtendremos (§ 3 del cap. VII)

$$f'(x) \geqslant 0.$$

2) La demostración de la segunda parte del teorema es análoga a la de la primera.

OBSERVACIÓN. Geométricamente, la afirmación del teorema consiste en que las tangentes a la gráfica de una función derivable y creciente forman con la dirección positiva del eje Ox ángulos **agudos** α ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) o en algunos puntos A son paralelas al eje Ox (fig. 111).

Para la gráfica de una función derivable y decreciente todas las tangentes forman ángulos **obtusos** con la dirección positiva del eje Ox o son paralelas a éste.

TEOREMA 2. CONDICIÓN SUFICIENTE DE CRECIMIENTO (DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN.

1) *Si la derivada de una función es positiva en el interior de un intervalo, esta función es creciente en este intervalo.*

2) *Si la derivada de una función es negativa en el interior de un intervalo, esta función es decreciente en este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea, por ejemplo, $f(x)$ una función derivable tal, que

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad a < x < b.$$

Para cualesquiera valores $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ pertenecientes al intervalo $\langle a, b \rangle$, según el teorema del incremento finito de una función, tenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

donde ξ es un valor intermedio entre x_1 y x_2 y, por consiguiente, se encuentra en el interior del intervalo $\langle a, b \rangle$. Puesto que $x_2 - x_1 > 0$, y $f'(\xi) > 0$, de aquí obtenemos

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{ó} \quad f(x_2) > f(x_1).$$

La función $f(x)$ es creciente en el intervalo $\langle a, b \rangle$.

2) La demostración de la segunda parte del teorema es completamente análoga a la de la primera.

La función creciente (o decreciente) se llama *monótona*. Los intervalos, en los cuales la función dada crece o decrece, se denominan *intervalos de monotonía* de esta función.

EJEMPLO. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Hallamos su derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

La derivada se anula en los valores $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Estos valores dividen el eje Ox en tres intervalos:

$$(-\infty, -1], \ [-1, 1], \ [1, +\infty),$$

tales que en el interior de cada uno de ellos la derivada $f'(x)$ no cambia de signo. Es evidente que la derivada $f'(x)$ es positiva en el interior de los intervalos primero y tercero y negativa en el segundo intervalo. De esto uno puede cerciorarse fácilmente si toma puntos pertenecientes a los intervalos correspondientes. Por consiguiente, la función $f(x)$ crece en el primer intervalo, decrece en el segundo y vuelve a crecer en el tercero (fig. 112).

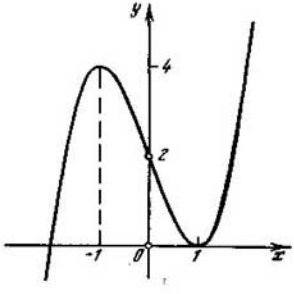

Fig. 112

§ 3. Noción sobre la regla de L'Hospital

Examinemos la relación

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

donde las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ están definidas y son derivables en el entorno U_a del punto a, con la probable exclusión del propio punto a. Puede ocurrir que cuando $x \to a$ ambas funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tiendan a 0 ó a ∞, es decir, estas funciones son simultáneamente **infinitesimales** o **infinitas** cuando $x \to a$. Entonces, se dice que en el punto a la función $f(x)$ posee una indeterminación del tipo

$$\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}. \tag{1}$$

En este caso, utilizando las derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$ se puede deducir una regla simple para hallar el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$, es decir, indicar un procedimiento para **salvar la indeterminación** del tipo (1). Esta regla está generalmente ligada al hombre del matemático francés L'Hospital quien la publicó por primera vez.

TEOREMA. *El límite de la relación de dos funciones infinitesimales o infinitas es igual al límite de la relación de sus derivadas (finita o infinita), si esta última existe (en el sentido indicado).*

DEMOSTRACIÓN. Efectuaremos la demostración sólo para la indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ y supondremos, para simplificar, que las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son continuas en el punto a junto con sus derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$, y que $\psi'(x) \neq 0$. La demostración para el caso $\frac{\infty}{\infty}$ es mucho más complicada (véase, por ejemplo, «Curso de análisis matemático», t. I de *S. Nikolski* (en ruso)).

Entonces, sea

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 \tag{2}$$

y

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = \psi(a) = 0. \tag{2'}$$

La diferencia $\varphi(x) - \varphi(a)$ puede ser considerada como el incremento de la función $\varphi(x)$ en el punto a, que corresponde al incremento del argumento $\Delta x = x - a$. Por eso

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a), \tag{3}$$

y de modo análogo,

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a} = \psi'(a) \neq 0. \tag{3'}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (2) y (2') para $x \neq a$, obtendremos

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a}}.$$

De aquí, pasando al límite cuando $x \to a$ y utilizando las fórmulas (3) y (3'), tendremos

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \tag{4}$$

Pero hemos supuesto que las derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$ son continuas cuando $x \to a$ y que $\psi'(a) \neq 0$, por eso,

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi'(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \tag{5}$$

Comparando las fórmulas (4) y (5), obtendremos la *regla de L'Hospital*

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \tag{6}$$

OBSERVACIÓN Prestemos atención al hecho de que en el segundo miembro de la fórmula (6) se toma la **relación de las derivadas** y no la derivada del cociente.

EJEMPLO 1. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\operatorname{sen} x}$.

Aquí, cuando $x = 0$ el numerador y el denominador de la fracción son iguales a cero, es decir, cuando $x \to 0$ tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hospital (6), obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Cuando $x \to +\infty$ tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando dos veces la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 6.$$

De este modo, cuando $x \to +\infty$ la función exponencial crece con mayor rapidez que la función de potencia x^2.

Las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ antes mencionadas, no son únicas. Por ejemplo, si

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

y si $\varphi(x) \to 0$ y $\psi(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, la función $f(x)$ cuando $x \to a$ tiene una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Otro ejemplo nos lo da la función

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

donde $\varphi(x) \to +\infty$ y $\psi(x) \to +\infty$ cuando $x \to a$. Aquí cuando $x \to a$ se obtiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Son también posibles otros tipos de indeterminaciones. Para resolver estas indeterminaciones, se trata de reducirlas, con ayuda de transformaciones idénticas, a una de las dos tipos principales $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Estas últimas se calculan generalmente aplicando la regla de L'Hospital.

EJEMPLO 3. Hallar $\lim\limits_{x\to+0} x \ln x$.

Aquí tenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Escribiendo esta expresión en forma

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. De aquí, aplicando la regla de L'Hospital, hallamos

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0.$$

EJEMPLO 4. Hallar $\lim\limits_{x\to0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

Esta expresión es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Aplicando la fórmula $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, tendremos

$$\lim_{x\to0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}.$$

La indeterminación así obtenida es del tipo $\frac{0}{0}$, por eso utilizamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to0} \frac{x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = -\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x} = -\frac{0}{1+1} = 0.$$

El último resultado ha sido obtenido con ayuda del conocido límite $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (véase el § 11 del cap. VII). Aquí, durante la determinación del límite ha sido razonable, como en muchos otros casos, combinar la regla de L'Hospital con procedimientos elementales.

Para la función

$$f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$$

en los casos:

$$\varphi(x) \to 0 \quad \text{y} \quad \psi(x) \to 0 \text{ cuando } x \to a$$
$$\varphi(x) \to \infty \quad \text{y} \quad \psi(x) \to 0 \text{ cuando } x \to a$$
$$\varphi(x) \to 1 \quad \text{y} \quad \psi(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a$$

obtenemos, respectivamente, indeterminaciones de los tipos 0^0, ∞^0, 1^∞. Aquí es preferible aplicar logaritmos a la función $f(x)$.

EJEMPLO 5. Hallar

$$A = \lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}. \tag{7}$$

La igualdad (7) es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando el logaritmo de (7) y utilizando la continuidad de la función logarítmica, hallamos

$$\ln A = \ln \left[\lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \right] =$$
$$= \lim_{x \to \pi/2} \left[\ln (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}\right] = \lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{sen} x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Aplicando la regla de L'Hospital a la indeterminación obtenida del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, tendremos

$$\ln A = \lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \right) = \lim_{x \to \pi/2} (-\operatorname{sen} x \cos x) = 0;$$

de donde $A = 1$.

§ 4. Fórmula de Taylor para un polinomio

Sea dado el polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \tag{1}$$

se requiere desarrollarlo en las potencias del binomio $x - x_0$, donde x_0 es cierto número. Este problema puede ser resuelto elementalmente, utilizando la identidad $x \equiv x_0 + (x - x_0)$. Sin embargo, se puede encontrar un procedimiento más simple. Sea

$$P(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + \ldots A_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

el desarrollo buscado, cuyos coeficientes A_0, A_1, A_2, ..., A_n deben ser hallados. Tomando $x = x_0$ en la identidad (2), obtendremos $P(x_0) = A_0 + 0$, de donde

$$A_0 = P(x_0). \tag{3}$$

Diferenciando la identidad (2), tendremos

$$P'(x) = A_1 + 2A_2 (x - x_0) + \ldots + nA_n (x - x_0)^{(n-1)}.$$

y haciendo $x = x_0$, nos queda

$$A_1 = P'(x_0).$$

Después de la segunda diferenciación hallamos

$$P''(x) = 2!\,A_2 + \ldots + n(n-1)\,A_n(x-x_0)^{(n-2)}$$

y para $x = x_0$, tenemos $P''(x_0) = 2!\,A_2$, es decir,

$$A_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}. \tag{4}$$

Para determinar los restantes coeficientes del desarrollo (2) se puede utilizar el mismo procedimiento. Es evidente que tiene lugar la fórmula general

$$A_k = \frac{P^k(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

donde, por definición, se tiene que $P^{(0)}(x) = P(x)$ y $0! = 1$. La fórmula (5) puede ser rigurosamente demostrada mediante el procedimiento de inducción matemática.

Introduciendo los coeficientes (5) en el desarrollo (2) se obtiene la *fórmula de Taylor* para un polinomio

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

o, más brevemente,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{6}$$

Notemos que es fácil convencerse de que los coeficientes dominantes de los desarrollos (1) y (2) coinciden, es decir, $A_n = a_n$. Por eso es justa la igualdad

$$\frac{1}{n!}P^{(n)}(x_0) = a_n.$$

Si se toma $x_0 = 0$, el segundo miembro de la igualdad (6) será idénticamente igual al segundo miembro del polinomio (1). Por eso son justas las igualdades

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

EJEMPLO. Desarrollar el polinomio $P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$ según las potencias del binomio $x + 1$.

Aquí $x_0 = -1$. Tenemos

$$P'(x) = -2 + 6x - 12x^2, \quad P''(x) = 6 - 24x, \quad P'''(x) = -24$$

y

$$P(-1) = 10, \quad P'(-1) = -20, \quad P''(-1) = 30, \quad P'''(-1) = -24.$$

De este modo, $P(x) = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3$.

§ 5. Binomio de Newton

Examinemos la función

$$f(x) = (a + x)^n, \tag{1}$$

donde n es un número natural. Tomando $x_0 = 0$ y utilizando la fórmula de Taylor (6) del § 4, obtendremos

$$(a + x)^n = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n, \tag{2}$$

donde

$$A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Ya que de la (1) obtenemos

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots[n-(k-1)](a+x)^{n-k},$$

entonces $f(0) = a^n$ y

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots[n-(k-1)]\,a^{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

De este modo, $A_0 = a^n$ y

$$A_k = \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\,a^{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Los números A_k se llaman *coeficientes binominales* y se designan convencionalmente del modo siguiente:

$$A_k = C_n^k, \tag{4}$$

dondo C_n^k se llama número de combinaciones de n elementos tomados de k (el sentido combinatorio de los números C_n^k será explicado más adelante, véase el § 10 del cap. XXV).

Y bien, partiendo de la igualdad (2), obtenemos la *fórmula de binomio de Newton*

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n. \tag{5}$$

En particular, para $a = 1$ nos queda

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \tag{5'}$$

§ 6. Fórmula de Taylor para una función

Supongamos que la función $f(x)$ tiene una derivada continua $f^{(N)}(x)$[1] de orden N en un intervalo (a, b) y $x_0 \in (a, b)$. Utilizando los resultados obtenidos en el párrafo anterior construimos el poli-

[1] De aquí, según el sentido de la operación de derivación, obtenemos que en el intervalo (a, b) existen las derivadas continuas $f(x) = f^{(0)}(x), f'(x), \ldots, f^{(N-1)}(x)$.

nomio de Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{1}$$

de potencia n, donde $n \leqslant N$.

El polinomio $P_n(x)$ puede ser considerado como una **aproximación** de la función dada. Designando con $R_n(x)$ el error correspondiente (llamando *término residual*), tendremos

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \tag{2}$$

Mostremos que cuando $x \to x_0$ el término residual $R_n(x)$ es un infinitésimo **de un orden superior** a n (*teorema de Peano*). Efectivamente, estudiemos el límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}. \tag{3}$$

Es evidente que aquí tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando sucesivamente n veces la regla de L'Hospital (§ 3) y teniendo en cuenta la continuidad de la derivada $f^{(n)}(x)$, hallamos

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \left[f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right]}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - \left[f''(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}\right]}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - [f^{(n)}(x_0)]}{n(n-1)\ldots 1} = 0.$$

Por consiguiente,

$$R_n(x) = o[(x-x_0)^n]. \tag{4}$$

De este modo obtenemos la *fórmula local de Taylor*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o[(x-x_0)^n]\ ^{1)}. \tag{5}$$

---

[1]) En el caso general la fórmula (5) posee interés práctico, si x pertenece a un entorno suficientemente pequeño U_{x_0} del punto x_0.

En un caso particular, cuando $a < 0 < b$ y $x_0 = 0$, tendremos la llamada *fórmula local de Maclaurin*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{6}$$

EJEMPLO. Aproximar la función $f(x) = \text{sen } x$ en un entorno del punto $x_0 = 0$ con un polinomio de Taylor $P_3(x)$ de tercer grado.

Tenemos $f(x) = \text{sen } x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\text{sen } x$, $f'''(x) = -\cos x$. De aquí $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$. Aplicando la fórmula (6), obtenemos

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3). \tag{7}$$

La fórmula (7) se utiliza frecuentemente para calcular senos de ángulos pequeños de x; aquí hay que tener en cuenta que x está expresado en radianes.

Considerando que $x - x_0 = h$, $x = x_0 + h$ y teniendo en cuenta que

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$

la fórmula (5) puede ser escrita así:

$$\Delta f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^n). \tag{8}$$

§ 7. Extremo de una función de una variable

DEFINICIÓN *Se dice que una función $f(x)$ tiene un* ***máximo*** $f(x_1)$ *para un valor x_1 del argumento x, si en un entorno del punto x_1* (posiblemente muy pequeño) *se cumple la desigualdad* (fig. 113)

$$f(x_1) > f(x) \quad (x \neq x_1).$$

Análogamente, se dice que una función $f(x)$ tiene un ***mínimo*** $f(x_2)$ *para un valor x_2 del argumento x, si en un entorno del punto x_2 se cumple la desigualdad* (fig. 113)

$$f(x_2) < f(x) \quad (x \neq x_2).$$

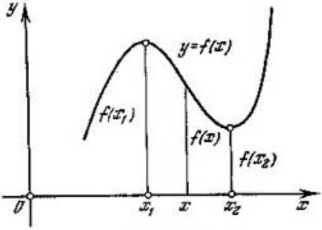

Fig. 113

El máximo o el mínimo de una función se llama *extremo de la función*, mientas que los valores del argumento para los cuales la función pasa por sus extremos se llaman *puntos de extremo de la función* (respectivamente: *puntos de máximo* o *puntos de mínimo de la función*).

De la definición se deduce que el extremo de una función posee en general, un **carácter local**, es decir, expresa el valor mayor o menor de la función respecto a sus **valores vecinos.** Por eso, la presencia de un extremo de una función para un cierto valor del argumento no depende, en absoluto, del comportamiento de la función lejos de este valor. Desde este punto de vista, está claro que un mínimo de una función puede ser mayor que un máximo, lo mismo que una hondonada en las montañas puede encontrarse a mayor altura sobre el nivel del mar que una pequeña cima.

Sea $f(x)$ una función definida sobre un segmento $[a, b]$ y con un extremo en el punto $x_0 \in [a, b]$. Si x_0 es un punto interior del segmento, la diferencia

$$f(x) - f(x_0) \quad (x \neq x_0)$$

conserva su signo en cierto **entorno bilateral** $x_0 - h < x < x_0 + h$ $(x \neq x_0)$ del punto x_0. Semejante extremo se llama *bilateral*. Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ tiene un máximo bilateral para $x_0 = 0$ porque $f(x) < f(x_0) = 1$ para $-1 < x < 1$, $x \neq 0$. Si x_0 es un punto final del segmento $[a, b]$, por ejemplo, $x_0 = a$, entonces $f(x) - f(x_0)$ conserva su signo solamente en cierto entorno **unilateral** $a = x_0 < x < x_0 + h$ del punto x_0. Semejante extremo se llama *unilateral*. Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ tiene un mínimo unilateral para $x_0 = -1$ y para $x_0 = 1$.

En adelante con el vocablo extremo designaremos el extremo bilateral, es decir, supondremos que para un punto del extremeo x_0 de una función dada $f(x)$, existe cierto entorno $0 < |x - x_0| < h$ del punto x_0, en el cual la diferencia $f(x) - f(x_0)$ conserva el signo.

1. Condición necesaria para la existencia de un extremo en una función.

TEOREMA. *En el punto de extremo (bilateral) de una función diferenciable su derivada es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para mayor claridad, que x_0 es un punto de mínimo de la función $f(x)$. Por consiguiente,

$$f(x_0 + \Delta x_0) > f(x_0),$$

si $\Delta x_0 \neq 0$ es suficientemente pequeño en valor absoluto. De aquí,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} > 0, \quad \text{si } \Delta x_0 > 0$$

y

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} < 0, \quad \text{si } \Delta x_0 < 0.$$

Pasando en estas desigualdades al límite cuando $\Delta x_0 \to 0$ para la derivada en el punto x_0 igual a

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0},$$

obtendremos, respectivamente,

$$f'(x_0) \geqslant 0, \text{ si } \Delta x_0 > 0, \quad \text{y } f'(x_0) \leqslant 0, \text{ si } \Delta x_0 < 0.$$

Como el valor de la derivada $f'(x_0)$ no debe depender del modo con el cual Δx_0 tiende a cero, resulta que

$$f'(x_0) = 0. \tag{1}$$

El teorema queda demostrado.

Interpretación geométrica. La condición (1) significa geométricamente que en el punto de extremo de una función diferenciable $y = f(x)$ la tangente a su gráfica es paralela al eje Ox (fig. 114, *a*).

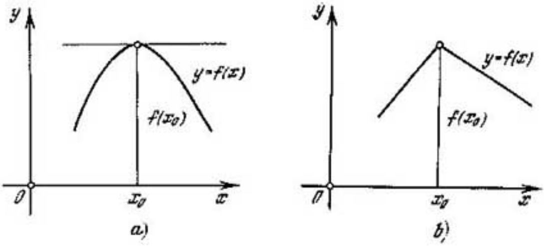

Fig. 114

COROLARIO. *Una función continua puede tener un extre mo solamente en los puntos donde la derivada de la función es igual a cero o no existe.*

Efectivamente, si la función $f(x)$ admite en el punto de extremo x_0 una derivada $f'(x_0)$, esta derivada será igual a cero, según el teorema demostrado: $f'(x_0) = 0$.

El hecho de que en el punto de extremo de una función continua puede no existir derivada, lo muestra el ejemplo de una función cuya gráfica tiene forma de una «línea quebrada» (fig. 114, *b*).

Llámanse **valores críticos** del argumento x a los valores en los cuales la derivada $f'(x)$ de una función dada $f(x)$ es igual a cero o no existe (por ejemplo, deviene al infinito).

2. Condiciones suficientes para la existencia de un extremo de una función.

El hecho de que $f'(x_0) = 0$ no significa todavía que la función $f(x)$ tiene un extremo en el punto $x = x_0$.

Efectivamente, sea $f(x) = x^3$. En este caso $f'(x) = 3x^2$ y, por consiguiente, $f'(0) = 0$. Sin embargo, $f(0)$ no es un extremo de la función dada porque la diferencia $f(x) - f(0)$ cambia de signo cuando cambia el signo del argumento x (véase la fig. 57).

Entonces, la función $f(x)$ no pasa por un extremo para todo valor crítico del argumento x. Por eso, junto con la condición necesaria daremos las condiciones suficientes para la existencia de un extremo de una función.

TEOREMA 1 (primera regla). *Si una función derivable $f(x)$ es tal, que para un valor x_0 de su argumento x la derivada $f'(x)$ es igual a cero y cambia su signo al pasar por este valor*[1], *el número $f(x_0)$ es un extremo de la función $f(x)$* y

1) *la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = x_0$, si su derivada $f'(x)$ es primero positiva y después, negativa;*

2) *la función $f(x)$ tiene un mínimo en $x = x_0$, si su derivada $f'(x)$ es primero negativa y después positiva.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea $f'(x_0) = 0$, al mismo tiempo

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x_0 - \varepsilon < x < x_0$$

y

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x_0 < x < x_0 + \varepsilon,$$

donde ε es un número positivo suficientemente pequeño.

De aquí, en virtud del teorema 2 del § 2 se deduce que la función $f(x)$ crece en el segmento $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ y decrece en el segmento $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Por consiguiente, en un entorno inmediato de x tenemos

$$f(x_0) > f(x), \quad \text{si } x < x_0,$$

y también

$$f(x_0) > f(x), \quad \text{si } x > x_0.$$

En otras parablas cuando $x = x_0$ la función $f(x)$ tiene un **máximo.**

2) En forma análoga se demuestra la segunda parte del teorema.

OBSERVACIÓN Se puede demostrar que el teorema permanece válido, si en el punto crítico x_0 la derivada $f'(x_0)$ no existe, y la función $f(x)$ es continua en $x = x_0$.

TEOREMA 1'. *Si la derivada $f'(x)$ de una función derivable $f(x)$ se anula en $x = x_0$, pero no cambia el signo al pasar por este valor, entonces la función $f(x)$ no tiene extremo para $x = x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si, por ejemplo, $f'(x_0) = 0$ y

$$f'(x) > 0 \text{ para } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \quad x \neq x_0,$$

---

[1]) Decimos que una función $F(x)$ cambia de signo pasando por un valor x_0, si existe un ε positivo suficientemente pequeño y tal, que

$$F(x) < 0 \quad \text{para} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0,$$
$$F(x) > 0 \quad \text{para} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon,$$

o

$$F(x) > 0 \quad \text{para} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0,$$
$$F(x) < 0 \quad \text{para} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon.$$

la función $f(x)$ crece tanto en el segmento $[x_0 - \varepsilon, x_0]$, como en el segmento $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Por consiguiente, la función no tiene máximo ni mínimo en $x = x_0$.

Utilizando estos teoremas para establecer si una función derivable $f(x)$ pasa por un extremo, se hallan primeramente los valores críticos del agrumento de esta función, es decir, los valores de x_0 para los cuales

$$f'(x_0) = 0$$

y después, eligiendo para cada uno de estos valores x_0 un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tan pequeño que no contenga otros valores críticos (si esto es posible), se verifica la naturaleza de este valor por la tabla siguiente:

$f'(x_0-h)$	$f'(x_0+h)$	Conclusión
+	+	No hay extremo
+	−	Máximo
−	+	Mínimo
−	−	No hay extremo

donde la variable h recorre el intervalo

$$0 < h < \varepsilon.$$

EJEMPLO. Inverstigar si la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ tiene puntos extremos.

SOLUCIÓN. Hallamos la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

Igualando a cero la derivada y resolviendo la ecuación cuadrática correspondiente, obtenemos las raíces de la derivada: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. De aquí

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3).$$

Inverstigamos cómo varía el signo de la derivada $f'(x)$ en el entorno del valor $x = 1$.

Para todo número h positivo y suficientemente pequeño tenemos

x	$f'(x)$
$1-h$	+
$1+h$	−

Por consiguiente, la función $f(x)$ tiene en $x = 1$ un máximo igual a $f(1) = 9$. De modo análogo obtenemos para $x = 3$

x	$f'(x)$
$3-h$	−
$3+h$	+

Por eso la función $f(x)$ tiene en $x = 3$ un mínimo igual a $f(3) = 5$.

La gráfica de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ está representada en la fig. 115.

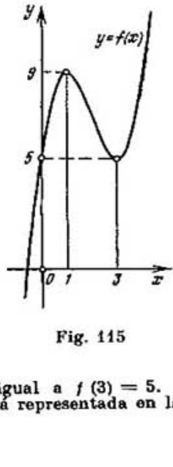

Fig. 115

TEOREMA 2 (segunda regla). *Si para una función derivable $f(x)$ en un punto x_0 su derivada primera $f'(x)$ es igual a cero, su derivada segunda $f''(x)$ existe y es distinta de cero, es decir, si*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0,$$

la función $f(x)$ tiene en este punto un extremo, a saber: 1) si $f''(x_0) > 0$, $f(x_0)$ es un ***mínimo de la función*** *$f(x)$, y 2) si $f''(x_0) < 0$, $f(x_0)$ es un* ***máximo de la función*** *$f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos primero que $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$. Sea $x = x_0 + \Delta x_0$ un punto vecino de x_0. Puesto que la derivada segunda $f''(x)$ es la derivada de la derivada primera $f'(x)$, tenemos

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x_0) - f'(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

(aquí utilizamos el hecho de que $f'(x_0) = 0$). De este modo, la magnitud variable $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ tiende al límite $f''(x_0) \neq 0$, lo que significa que a partir de un cierto instante esta magnitud tiene el signo de su límite (lema del § 6 del cap. VII), es decir, en nuestro caso el signo «+». Por eso

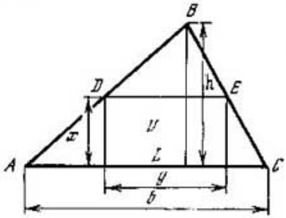

Fig. 116

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \text{ para } 0 < |x - x_0| < \varepsilon,$$

donde ε es un número positivo suficientemente pequeño. De aquí obtenemos que el numerador y el denominador de la fracción $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ tienen signos iguales y entonces

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x_0 - \varepsilon < x < x_0$$

y

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x_0 < x < x_0 + \varepsilon.$$

Vemos que la derivada $f'(x)$ negativa antes del punto x_0 se veulve positiva después de pasar por este punto. Según el teorema 1, el número $f(x_0)$ es un **mínimo de la función** $f(x)$.

2) En forma análoga se demuestra que si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, el número $f(x_0)$ es un ***máximo de la funcion*** $f(x)$.

La teoría sobre el extremo de funciones tiene numerosas aplicaciones prácticas.

PROBLEMA. Sea dado un triángulo ABC cuya base es $AC = b$ y la altura es $BL = h$ (fig. 116). Hallar el rectángulo del área máxima que puede ser inscrito en este triángulo.

Designamos la altura KL del rectángulo buscado por x y la base DE por y (fig. 116). En este caso su área será

$$U = xy.$$

Las variables x y y no son independientes, ellas están ligadas por una cierta relación. Efectivamente, de la semejanza de los triángulos DBE y ABC, y teniendo en cuenta que sus alturas BK y BL son proporcionales a las bases DE y AC, tenemos

$$\frac{BK}{BL} = \frac{DE}{AC},$$

o, puesto que $BK = h - x$, $DE = y$, $BL = h$, $AC = b$, resulta

$$\frac{h-x}{h} = \frac{y}{b},$$

de donde

$$y = \frac{b}{h}(h - x).$$

Excluyendo y de la expresión de U, hallamos

$$U = \frac{b}{h}(h - x)\,x = \frac{b}{h}(hx - x^2). \tag{2}$$

Buscamos el máximo de esta función. Diferenciando, hallamos

$$U' = \frac{b}{h}(h - 2x)$$

Igualando la derivada U' a cero, hallamos

$$h - 2x = 0 \quad ó \quad x = \frac{h}{2}.$$

Es fácil ver que este valor de x es realmente el máximo de la función U. Efectivamente, al calcular la derivada segunda tenemos

$$U'' = -\frac{2b}{h} < 0.$$

Por consiguiente, para $x = \frac{h}{2}$ el área U tiene un máximo y de la fórmula (2) obtenemos

$$U_{\text{máx}} = \frac{bh}{4}.$$

De este modo, el área del mayor rectángulo inscrito en un triángulo es igual a la mitad del área de este triángulo.

§ 8. Concavidad y convexidad de la gráfica de una función. Puntos de inflexión

DEFINICIÓN *La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ se llama* ***cóncava hacia arriba***[1]) *(o* ***convexa hacia abajo***[2])) *en el intervalo $\langle a, b\rangle$, si la parte correspondiente de la gráfica*

$$y = f(x) \quad (x \in \langle a, b\rangle) \tag{1}$$

está situada por encima de la tangente que pasa por cualquier punto suyo $M(x, f(x))$ (fig. 117, a).

De modo análogo, la gráfica de una función derivable $y = f(x)$ se llama ***convexa hacia arriba*** *(o* ***cóncava hacia abajo****) en el intervalo*

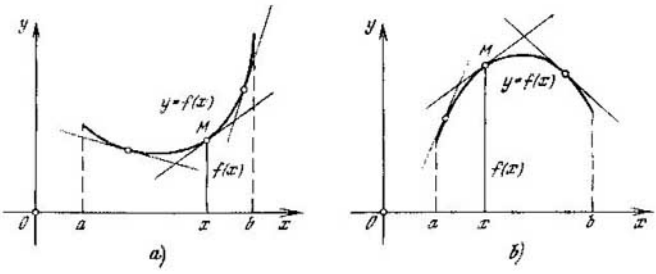

Fig. 117

$\langle a, b\rangle$, si la parte correspondiente de la curva (1) está situada por debajo de la tangente que pasa por cualquier punto suyo $M(x, f(x))$ (fig. 117, b).

Condición suficiente para que la gráfica de una función sea cóncava (convexa).

TEOREMA 1). *Si para una función dos veces derivable $y = f(x)$ su derivada segunda $f''(x)$ es positiva en el interior del intervalo $\langle a, b\rangle$, la gráfica de esta función es cóncava hacia arriba en este intervalo.*

2) *Si la derivada segunda $f''(x)$ es negativa en el interior del intervalo $\langle a, b\rangle$, la gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN 1) Sea $f''(x) > 0$ para $a < x < b$, y sea x_0 un punto cualquiera perteneciente al intervalo $\langle a, b\rangle$. Comparemos en el punto x la ordenada y de la curva $y = f(x)$ con la ordenada $\overline{y}$ de su tangente M_0N trazada en el punto $M_0(x_0, f(x_0))$ (fig. 118).

---

[1]) Es decir, en la dirección positiva del eje Oy.

[2]) Es decir, en la dirección negativa del eje Oy.

Puesto que el coeficiente angular de la tangente M_0N es igual a $f'(x_0)$, entonces (véase el § 3 del cap. III)

$$\overline{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

De aquí,

$$\delta = y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Utilizando el teorema de Lagrange (§ 1), tendremos

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi),$$

donde $\xi \in (x_0, x)$.

Por eso de la fórmula (2) obtenemos

$$\delta = (x - x_0)[f'(\xi) - f'(x_0)]. \tag{3}$$

Como $f''(x) = [f'(x)]' > 0$, la derivada $f'(x)$ es una función creciente.

Sea $x < x_0$; entonces es evidente que $\xi < x_0$ y, por consiguiente, en virtud del crecimiento de $f'(x)$, tenemos $f'(\xi) < f'(x_0)$. De la fórmula (3) se deduce que $\delta > 0$.

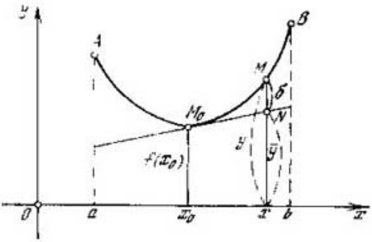

Fig. 118

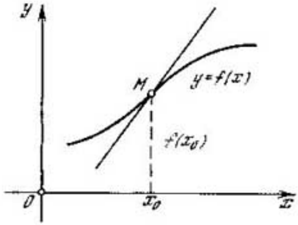

Fig. 119

Si ahora $x > x_0$, entonces $\xi > x_0$ y por eso $f'(\xi) > f'(x_0)$. De la fórmula (3) nuevamente deducimos que $\delta > 0$.

De este modo, para $x \neq x_0$ tenemos

$$\delta = y - \overline{y} > 0, \quad \text{es decir, } y > \overline{y}. \tag{4}$$

De aquí se deduce que cuando $a < x < b$, la curva $y = f(x)$ está situada por encima de sus tangentes y en este caso la gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $\langle a, b \rangle$.

2) Mediante un procedimiento análogo se demuestra que si $f''(x) < 0$ para $a < x < b$, la gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava **hacia abajo** sobre el intervalo $\langle a, b \rangle$.

DEFINICIÓN. *Llámase* ***punto de inflexión*** *de la gráfica de una función derivable $y = f(x)$, al punto donde una curva cóncava se vuelve convexa, o viceversa (fig. 119).*

TEOREMA *Si la derivada segunda $f''(x)$ de una función $y = f(x)$ se anula en el punto x_0 y, al pasar por este punto cambia su signo, el punto $M(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la derivada segunda $f''(x)$ se anula en el punto M y cambia su signo; por ejemplo, se vuelve negativa. En este caso a la izquierda del punto M la derivada segunda de la función $f(x)$ es positiva y, por lo tanto, para $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ la concavidad de la gráfica de la función está dirigida hacia arriba; a la derecha del punto M la derivada segunda $f''(x)$ es negativa y por eso para $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ la gráfica de la función $y = f(x)$ es convexa hacia arriba. De este modo en el punto M la curva $y = f(x)$ cambia la concavidad por la convexidad y por eso el punto M es un punto de inflexión de esta curva.

OBSERVACIÓN. La derivada segunda $f''(x_0)$ de la función $y = f(x)$ puede también no existir en el punto de inflexión x_0; por ejemplo, haciéndose infinita.

EJEMPLO. Sea dada la *curva de Gauss* $y = e^{-x^2}$.

Tenemos

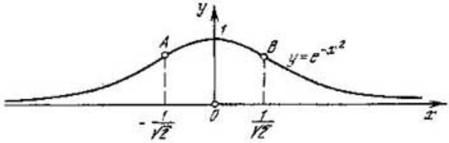

Fig. 120

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

y

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}.$$

La derivada segunda y'' se anula, si $x^2 - \frac{1}{2} = 0$, de donde

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El cambio de signo de la derivada segunda se caracteriza por la tabla siguiente:

x	$-\infty < x < -1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2} < x < +\infty$
y''	$+$	$-$	$+$

Por consiguiente, los puntos $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ son los puntos de inflexión de la curva dada (fig. 120).

§ 9. Resolución aproximada de ecuaciones

Examinemos la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

donde la función $f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $\langle a, b \rangle$. El valor $\xi \in \langle a, b \rangle$ que satisface la ecuación (1), es decir tal, que $f(\xi) = 0$, se llama *raíz* de esta ecuación (o *cero* de la función $f(x)$).

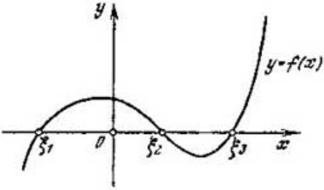

Fig. 121

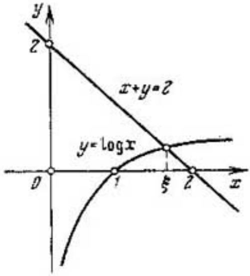

Fig. 122

Geométricamente las raíces de la ecuación (1) son abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje Ox (fig. 121).

Para la resolución geométrica de la ecuación (1) es a veces cómodo reemplazarla por una ecuación equivalente

$$\varphi(x) = \psi(x). \tag{2}$$

Las raíces de la ecuación (1) se determinan en este caso como las **abscisas de los puntos de intersección** de las curvas $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$.

EJEMPLO 1. Resolver gráficamente la ecuación

$$x + \log x = 2. \tag{3}$$

Es evidente que tenemos $\log x = 2 - x$. De aquí, la raíz de la ecuación (3) es la abscisa del punto de intersección de la curva logarítmica $y = \log x$ y la recta $y = 2 - x$ (fig. 122).

Al trazar estas curvas sobre un papel milimetrado, hallamos la raíz aproximada de la ecuación (3): $\xi \approx 1,77$.

Geométricamente es intuitivo el siguiente teorema: *si una función continua $f(x)$ toma en los extremos de un segmento $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b \rangle$*[1]

[1] La escritura $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b \rangle$ significa que el segmento $[\alpha, \beta]$ está contenido en el intervalo $\langle a, b \rangle$.

valores de signos opuestos, es decir $f(\alpha) f(\beta) < 0$, *entonces existe en el interior del segmento* $[\alpha, \beta]$ *por lo menos un cero de la función* $f(x)$ (es decir, existe obligatoriamente una raíz de la ecuación $f(x) = 0$).

Esta raíz será **única**, si la derivada $f'(x)$ no cambia su signo en (α, β) (en vista de que la función $f(x)$ es monótona).

Suponiendo que la función $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es continua sobre $\langle a, b\rangle$, posee una raíz única ξ en el interior del segmento $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b\rangle$ y que la condición $f(\alpha) f(\beta) < 0$ se cumple, indicaremos unos procedimientos sencillos para hallar el valor aproximado de esta raíz.

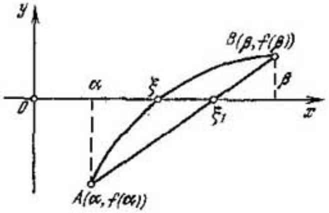

Fig. 123

A. Método de la división en mitades. Sea dada una función $f(x)$ continua en $[\alpha, \beta]$, y sea $f(\alpha) f(\beta) < 0$. Dividimos el segmento $[\alpha, \beta]$ en dos partes iguales y sea γ la mitad de este segmento. Si $f(\gamma) = 0$, entonces γ es la raíz incógnita. Si $f(\gamma) \neq 0$, designemos por $[\alpha_1, \beta_1]$ aquella mitad $[\alpha, \gamma]$ o $[\gamma, \beta]$ en los extremos de la cual la función $f(x)$ tiene signos opuestos. Luego aplicamos de nuevo el método de la división en dos partes iguales, etc. Finalmente hallaremos la raíz exacta de la ecuación $f(x) = 0$ y obtendremos la sucesión de segmentos

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \ldots,$$

en el interior de los cuales se encuentra la raíz buscada ξ.

Como la longitud del n-ésimo segmento $[\alpha_n, \beta_n]$, igual a $\frac{\beta-\alpha}{2^n}$, tiende a 0 cuando $n \to \infty$, entonces repitiendo este procedimiento un número de veces suficientemente grande y considerando que $\xi \approx \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$ se puede determinar la raíz buscada ξ con cualquier precisión deseada.

B. Método de cuerdas. El método de la división en mitades puede ser precisado sustituyendo el arco $\widehat{AB}$ de la curva $y = f(x) (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ por su cuerda $\overline{AB}$ que pasa por los puntos terminales $A(\alpha, f(\alpha))$ y $B(\beta, f(\beta))$ y tomando como valor aproximado de la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ la abscisa ξ_1 del punto de intersección de la cuerda $\overline{AB}$ con el eje Ox (fig. 123).

Si $f(\alpha) f(\beta) < 0$, esto es equivalente a tomar como valor aproximado de la raíz ξ el punto ξ_1 que divide el segmento $[\alpha, \beta]$ en la relación $|f(\alpha)| : |f(\beta)|$ (*método de partes proporcionales*).

La ecuación de la cuerda $\overline{AB}$ es (véase el § 4 del cap. III)

$$y-f(\alpha)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha). \tag{4}$$

Tomando $y=0$ en la ecuación (4) hallamos el punto de intersección $x=\xi_1$ de la cuerda $\overline{AB}$ con el eje Ox (fig. 123):

$$\xi_1=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}(\beta-\alpha). \tag{5}$$

El número ξ_1 se toma como la primera aproximación de la raíz ξ. Si $f(\xi_1)\neq 0$, se puede aplicar la fórmula (5) a aquel segmento $[\alpha, \xi_1]$ o $[\xi_1, \beta]$ en los extremos del cual la función $f(x)$ toma valores de signos contrarios, etc.

EJEMPLO 2. Empleando el método de cuerdas se pide hallar la raíz de la ecuación

$$f(x)\equiv x^3+x-12=0. \tag{6}$$

Para determinar la raíz aproximada de la ecuación (6) se pueden trazar las gráficas de funciones $y=x^3$ e $y=12-x$. Por medio de una estimación aproximada constatamos que la raíz buscada, es decir, la abscisa del punto de intersección de las gráficas, se encuentra en el intervalo (2, 3). Efectivamente

$$f(2)=8+2-12=-2 \quad \text{y} \quad f(3)=27+3-12=+18.$$

Por eso se puede suponer que $\alpha=2$ y $\beta=3$.

Aplicando la fórmula (5), obtendremos el valor aproximado de la raíz:

$$\xi_1=2-\frac{-2}{18+2}(3-2)=2{,}1.$$

Notemos que

$$f(\xi_1)=9{,}261+2{,}1-12=-0{,}639.$$

Por eso, para precisar el valor de ξ_1 es conveniente aplicar la fórmula (5) al segmento [2,1; 3].

C. Método de las tangentes. Reemplacemos ahora el arco $\widehat{AB}$ de la curva $y=f(x)$ por la tangente AC trazada por el punto $A(\alpha, f(\alpha))$ (fig. 124). Como el coeficiente angular de la tangente AC es igual a $f'(\alpha)$, su ecuación se escribirá así:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha). \tag{7}$$

De aquí, considerando que $y=0$ hallamos el valor aproximado de la raíz ξ:

$$\bar{\xi}_1=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \tag{8}$$

(*fórmula de Newton*).

Notemos que si en nuestra gráfica trazamos una tangente en el punto B $[\beta, f(\beta)]$ (fig. 124), el punto de intersección $\bar{\xi}_1'$ de esta tangente con el eje Ox dará una aproximación mala de la raíz ξ. Conveniente aquí observar la siguiente regla: *si la derivada segunda $f''(x)$ de la función conserva su signo en el intervalo (α, β), la tangente*

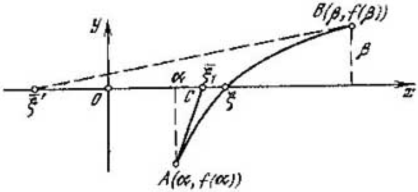

Fig. 124

debe ser trazada en aquel punto terminal del arco $\widehat{AB}$, donde el signo de la función coincide con el signo de la derivada segunda.

EJEMPLO 3. Determinar, aplicando el método de las tangentes, la raíz de la ecuación (6) situada en el intervalo (2, 3).

Aquí $f''(x) = 6x > 0$ para $2 \leqslant x \leqslant 3$, además, $f(3) = +18$. Por eso se considera que en la fórmula (3) $\alpha = 3$. Puesto que $f'(x) = 3x^2 + 1$ y $f'(3) = 28$, tenemos

$$\bar{\xi}_1 = 3 - \frac{18}{28} = 2{,}36$$

Notemos para controlar, que

$$f(\bar{\xi}_1) = 13{,}14 + 2{,}36 - 12 = +3{,}35.$$

Como en nuestro caso $\xi_1 < \xi < \bar{\xi}_1$, donde $\xi_1 = 2{,}10$ y $\bar{\xi}_1 = 2{,}36$ puede considerarse que

$$\xi \approx \frac{1}{2}(\xi_1 + \bar{\xi}_1) = \frac{1}{2}(2{,}10 + 2{,}36) = 2{,}23.$$

Aquí

$$f(2{,}23) = 11{,}09 + 2{,}23 - 12 = 1{,}32.$$

Para precisar el valor de la raíz pueden aplicarse los métodos de las cuerdas y de las tangentes al segmento $[2{,}10; 2{,}23]$, etc.

§ 10. Construcción de gráficas de funciones

Hemos mostrado en párrafos precedentes que con ayuda de las primeras y segundas derivadas se estudian las propiedades generales de las funciones. Utilizando los resultados de este estudio puede obtenerse una idea clara de la naturaleza de la función y, en particular, construir el trazado matemáticamente correcto de su gráfica.

La investigación de una función $y = f(x)$ (que consideraremos elemental) en los casos más simples es conveniente efectuarla de acuerdo con el esquema siguiente.

1) Al analizar las propiedades de una función $f(x)$, determinamos su **dominio de existencia**; supongamos, para simplificar, que éste será un intervalo $\langle a, b\rangle$. Es también útil establecer la simetría de la gráfica (si la función es par o impar, periódica o no, etc.).

2) Hallamos los **puntos de discontinuidad** de la función. Investigamos también el comportamiento de la función cuando $x \to a$ y $x \to b$, donde a y b son los puntos de frontera del dominio de existencia de la función.

3) Resolviendo la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

determinamos las raíces (ceros) de la función. Establecemos el signo de la función en diferentes dominios, teniendo en cuenta que una función elemental puede cambiar su signo solamente al pasar por el cero o por un punto de discontinuidad.

4) Resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 0, \tag{2}$$

hallamos los **valores críticos del argumento para la función** $f(x)$. Estudiando después el signo de la derivada $f'(x)$ en cada uno de los intervalos comprendidos entre dos valores críticos consecutivos, determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y establecemos la naturaleza de estos valores críticos.

5) Resolviendo la ecuación

$$f''(x) = 0, \tag{3}$$

determinamos los **valores críticos del argumento para la derivada** $f'(x)$. Luego hallamos el signo de la derivada $f''(x)$ en cada uno de los intervalos comprendidos entre dos valores críticos consecutivos del argumento para la derivada $f'(x)$, establecemos los intervalos de convexidad y concavidad hacia las y positivas de la gráfica de la función $f(x)$ y hallamos los puntos de inflexión.

En los casos más complicados, se deben investigar también los puntos en los cuales las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen.

Es posible que para resolver las ecuaciones (1), (2) y (3) haga falta recurrir a los métodos aproximados (véase el § 9).

Conformando, para concluir, una tabla de los valores que la función toma en sus **puntos característicos** (puntos extremos del dominio de existencia de la función, puntos de discontinuidad, puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas, puntos de extremo, puntos de inflexión, etc.) y teniendo en cuenta los resultados del estudio efectuado más arriba, representamos gráficamente esta función.

A veces es suficiente un estudio incompleto de la función.

EJEMPLO. Trazar la gráfica de la función $y = x + \sqrt{1-x}$.

Investiguemos la función según el esquema arriba indicado.

1) La función está definida, si $0 \leqslant 1 - x < +\infty$. De aquí, su dominio de existencia será: $-\infty < x \leqslant 1$.

2) La función no tiene puntos de discontinuidad, y

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1} y = y(1) = 1.$$

3) Resolviendo la ecuación $x + \sqrt{1-x} = 0$, obtenemos la raíz de la función

$$x_0 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62.$$

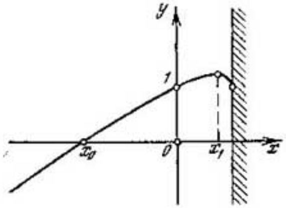

Fig. 125

En este caso $y < 0$, si $-\infty < x < x_0$ e $y > 0$, si $x_0 < x \leqslant 1$.

4) Hallamos la derivada

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Igualándola a cero obtenemos un punto crítico $x_1 = \frac{3}{4}$. Además, es evidente que y' se convierte en ∞ cuando $x = 1$. Por eso, $x_2 = 1$ también será un punto crítico.

Los intervalos de monotonía de la función son $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ y es fácil convencerse, estudiando el signo de la derivada, de que la función crece en el primer intervalo y decrece en el segundo. Por consiguiente, x_1 es el punto máximo de la función. En el punto x_2 la función tiene, evidentemente, un mínimo de frontera.

5) Hallamos la derivada segunda

$$y'' = -\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}.$$

Puesto que la derivada segunda es negativa por doquier, la gráfica de la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

Agrupamos en una tabla los resultados de nuestros estudios. La gráfica modelo de la función se muestra en la fig. 125.

x	y	y'	y''	Conclusión
$-\infty$ $x_0 \approx -1{,}62$ 0	$-\infty$ 0 1	$+$	$-$	La función crece
$y_1 = 0{,}75$	$1{,}25$	0		La función pasa por un máximo
....	...	$-$		La función decrece
1	1	$-\infty$		

EJERCICIOS

1. Hallar el incremento de la función $f(x) = x^3$ en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 2$ y verificar el teorema del incremento finito de la función.

2. Comprobar el teorema sobre las raíces de la derivada para la función

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

en los segmentos $[1, 2]$ y $[2, 3]$.

Determinar los intervalos de monotonía de las funciones siguientes:

3. $f(x) = x^2 - 4x - 1$. 4. $f(x) = 3x - x^3$. 5. $f(x) = xe^{-x}$.

Hallar los límites de las funciones:

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{\ln(1+x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$. Deducir una fórmula para la rectificación aproximada de los arcos pequeños:

$$x \approx \frac{1}{3}(2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x).$$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$. 10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{1{,}01^x}$.

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[100]{x}}$. 12. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

13. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x \operatorname{arcsen} \frac{2}{x}\right)$. 14. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ 16. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{x}{1-x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

Calcular los extremos de las funciones:

18. $y = x(a-x)$ $(a > 0)$. 19. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$.

20. $y = \frac{2x}{1+x^2}$. 21. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

22. $y = xe^{-2x}$.

23. Inscribir un rectángulo de área máxima en un semicírculo de radio a.

24. En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, inscribir un rectángulo de área máxima de lados paralelos a los ejes de elipse.

25. En una esfera de radio a inscribir un cono de volumen máximo.

26. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja de lado a hecha de una hoja cuadrada de papel para que su volumen sea máximo?

27. Determinar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^2 - x^3$.

Construir las gráficas de las funciones:

28. $y = 3x - x^3$. 29. $y = x^2 (2-x)^2$.

30. $y=\frac{x^2}{1+x^2}$. 31. $y=x+\frac{1}{x}$. 32. $y=\frac{x}{1+x}$.

33. $y=\frac{8}{4-x^2}$. 34. $y=x\sqrt{1-x}$.

35. $y=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. 36. $y=\operatorname{sen} x+\cos x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

37. $y=x\ln x$ [1]. 38. $y=xe^{-x}$ [1].

39. $y=x-\operatorname{arctg} x$.

[1]) Véase la indicación en el apartado «Respuestas».

Capítulo XII

Diferencial

§ 1. Noción sobre la diferencial de una función

Sea dada una función **derivable (diferenciable)**

$$y = f(x).$$

El incremento Δy de la función y constituye una característica importante de la variación de esta función sobre un segmento finito dado $[a, b]$. Pero la determinación directa del incremento de la función es a veces difícil de lograr. En este caso, se procede generalmente del modo siguiente: el segmento $[a, b]$ se divide en un número finito de segmentos suficientemente pequeños $[x, x + \Delta x]$ y se considera aproximadamente que sobre cada uno de estos segmentos el incremento de la función tiene lugar según la ley de proporcionalidad directa (por ejemplo, un elemento pequeño de una línea curva se considera como rectilíneo; un movimiento no uniforme de un punto durante un intervalo de tiempo pequeño se considera como un movimiento uniforme, etc., donde la "pequeñez" se entiende en el sentido conocido). En otras palabras se supone que sobre un segmento suficientemente pequeño $[x, x + \Delta x]$ tiene lugar la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx k\Delta x,$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad que no depende de Δx, pero depende, en general, de x. Si se halla en este caso que con una elección conveniente del coeficiente de proporcionalidad la diferencia $\Delta y - k\Delta x$ será un infinitésimo de un orden superior respecto a Δx, es decir, la magnitud

$$\frac{\Delta y - k\,\Delta x}{\Delta x} = \alpha \tag{1}$$

será un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$, entonces la magnitud

$$dy = k\Delta x$$

se llama *diferencial de la función* y en el punto x (aquí la letra d es el símbolo de la diferencial). En este caso, como se deduce de la relación (1), es justa la igualdad

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{2}$$

donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

En otras palabras (véase el § 8 del cap. VII),

$$\Delta y = dy + o\,(\Delta x).$$

DEFINICION. *Llámase* ***diferencial de una función*** *a una magnitud proporcional al incremento de la variable independiente y que se diferencia del incremento de esta función por una función infinitesimal de orden superior en comparación con el incremento de la variable independiente.*

El sumando $k\Delta x$ en la fórmula (2) se llama frecuentemente *parte lineal principal* del incremento de la función (o *término lineal principal del incremento*). Por eso se puede decir que *la diferencial de una función es la parte lineal principal del incremento infinitesimal de esa función.*

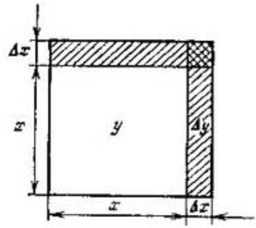

Fig. 126

EJEMPLO 1. Sea $y = x^2$ una función que expresa el área de un cuadrado de lado x (fig. 126). Si se le otorga al lado x un incremento Δx, su valor nuevo será $x + \Delta x$ y, por consiguiente, el área y del cuadrado obtendrá el incremento

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2, \quad \text{o bien}$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

El primer sumando del segundo miembro de la última igualdad es evidentemente la parte lineal principal del incremento de la función para $\Delta x \to 0$. Por eso

$$dy = 2x\Delta x$$

En la fig. 126 el incremento Δy de la función y está representado por la superficie de toda la parte rayada, mientras que la diferencial dy de la función se representa con la superficie de la parte rayada menos el área del cuadrado pequeño que se encuentra en el ángulo superior derecho del cuadrado grande.

TEOREMA SOBRE LA UNICIDAD DE LA DIFERENCIAL. *Una función dada puede tener una sola diferencial.*

DEMOSTRACION. Efectivamente, supongamos que una función $y = f(x)$ tenga dos diferenciales: $dy = k\Delta x$ y $d_1y = k_1\Delta x$. En virtud de la definición de la diferencial, tenemos

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha\Delta x \quad \text{y} \quad \Delta y = k_1\Delta x + \alpha_1\Delta x,$$

donde α y α_1 son infinitésimos cuando $\Delta x \to 0$, de donde

$$k\Delta x + \alpha\Delta x = k_1\Delta x + \alpha_1\Delta x$$

y, por consiguiente, cuando $\Delta x \neq 0$ tenemos $k - k_1 = \alpha_1 - \alpha$.

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, en la última igualdad obtenemos

$$k - k_1 = 0,$$

es decir, $k = k_1$. De este modo las diferenciales dy y d_1y coinciden. El teorema queda demostrado.

De la definición de diferencial se deduce inmediatamente que *la diferencial de una función difiere del incremento de esta función en una magnitud infinitesimal de orden superior en comparación con el incremento de la variable independiente.* Esta circunstancia se aplica frecuentemente para los cálculos aproximados.

EJEMPLO 2. Sea dada la función $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$. Hallar Δy y dy para $x = 1$ y compararlos entre sí en tres casos: a) $\Delta x = 1$; *b*) $\Delta x = 0{,}1$; c) $\Delta x = 0{,}01$.

Tenemos $\Delta y = [(x + \Delta x)^3 - (x - \Delta x)^2 + 2\,(x + \Delta x) + 3] - (x^3 - x^2 + 2x + 3)$.

Efectuando las operaciones algebraicas necesarias, obtendremos

$$\Delta y = (3x^2 - 2x + 2)\cdot\Delta x + (3x - 1)\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

El primer sumando del segundo miembro de la última igualdad expresa evidentemente la parte lineal principal del incremento de la función. Por consiguiente,

$$dy = (3x^2 - 2x + 2)\cdot\Delta x.$$

Tomando $x = 1$ obtendremos la tabla siguiente:

Δx	Δy	dy	$\dfrac{dy}{\Delta y}$ (en %)
1	6	3	50
0,1	0,321	0,3	93
0,01	0,030201	0,03	99

Esta tabla muestra claramente que la parte de la diferencial dy en el incremento Δy tiende al 100% cuando $\Delta x \to 0$.

§ 2. Relación entre la diferencial y la derivada de una función. Diferencial de una variable independiente

TEOREMA 1. *Si una función posee diferencial, esta función tiene también derivada.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sea dada la función $y = f(x)$ y sea

$$dy = k\Delta x$$

la diferencial de esta función. Como se sabe, el incremento Δy de la función puede escribirse así

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha\Delta x,$$

donde α es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$. De aquí $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \alpha$ y, por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

es decir, la derivada y' existe y es igual a la magnitud de k.

COROLARIO. *La diferencial de una función es igual al producto de la derivada de esta función por el incremento de la variable independiente*, es decir,

$$dy = y' \Delta x. \tag{1}$$

TEOREMA 2. *Si una función posee derivada, ella tiene también diferencial.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene la derivada

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

De aquí $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, donde α es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$ y, por consiguiente,

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x. \tag{2}$$

El primer sumando $y' \Delta x$ de la suma (2) es evidentemente la parte lineal principal del incremento Δy, o sea, es la diferencial de la función y. De este modo, la función posee la diferencial

$$dy = y' \Delta x.$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Ahora está claro por qué una función de una variable independiente que tiene una derivada se llama *derivable* o *diferenciable*.

Hasta ahora hemos utilizado el concepto de diferencial de una función. Introduzcamos el concepto de *diferencial de la variable independiente*.

DEFINICIÓN. *Se entiende por* ***diferencial de la variable independiente*** *la diferencial de una función idéntica a la variable independiente*, es decir, la diferencial de la función $y = x$.

Puesto que

$$y' = 1 \quad \text{para} \quad y = x, \tag{3}$$

entonces, según la fórmula (1), tenemos

$$dx = \Delta x,$$

es decir, *la diferencial de una variable independiente es igual al incremento de esta última.*

Utilizando esta propiedad se puede escribir la fórmula (1) en la forma simétrica siguiente

$$dy = y'\,dx. \tag{4}$$

Así pues, *la diferencial de una función es igual al producto de la derivada de esta función por la diferencial de la variable independiente.*

Dividiendo ambos miembros de la última fórmula por dx, obtendremos

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

En otras palabras: *la derivada de una función es igual a la relación de la diferencial de esta función por la diferencial de la variable independiente.*

Hasta el presente, la notación $\frac{dy}{dx}$ ha tenido un carácter simbólico; ahora podemos considerar esta expresión como una fracción ordinaria, donde dy es el numerador y dx el denominador.

§ 3. Interpretación geométrica de la diferencial

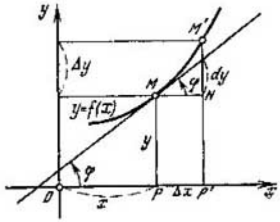

Fig. 127

Aclaremos el significado geométrico de la diferencial. Examinemos la gráfica de una función $y = f(x)$.

Sean $M(x, y)$ y $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ dos puntos de la curva dada (fig. 127). Trazamos por el punto M la tangente MT a la gráfica de la función (aquí T es el punto de intersección de la tangente con $M'N \parallel Oy$) y examinamos el triángulo ΔMTN de catetos $MN = \Delta x$ y NT ($MN \parallel Ox$, $NT \parallel Oy$). Si se designa con φ el ángulo formado por la tangente MT y la dirección positiva del eje Ox, tendremos

$$NT = \Delta x \operatorname{tg} \varphi.$$

Pero de la interpretación geométrica de la derivada resulta que $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = y'$. Por eso,

$$NT = y'\Delta x = dy.$$

De este modo, tenemos el teorema siguiente:

La diferencial de una función $y = f(x)$ en punto x dado ***es igual al incremento de la ordenada de la tangente*** *a la gráfica de la función en este punto, cuando el incremento de x es Δx.*

OBSERVACIÓN. Señalemos que, en general, el incremento de la función $\Delta y = NM'$ (fig. 127) no es igual a la diferencial $dy = NT$ de esta función. En particular: 1) si la gráfica de la función presenta su concavidad hacia arriba, entonces

$$\Delta y > dy;$$

2) si la gráfica de la función presenta su concavidad hacia abajo,

$$\Delta y < dy.$$

§ 4. Interpretación física de la diferencial

Sea conocida la ley del movimiento de un punto M a lo largo del eje Ox:

$$x = f(t),$$

donde x es la distancia entre el punto M y el origen O y t es el tiempo. Se supone que el punto M se desplaza en un mismo sentido. Durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt el punto M ocupará la posición M' después de recorrer un camino igual a

$$\Delta x = f(t + dt) - f(t).$$

Esto es el **incremento verdadero del camino** recorrido.

Según la fórmula (4) del § 3, la diferencial del camino dx es igual a

$$dx = x'_t dt.$$

Pero x'_t, que representa la derivada de la distancia respecto al tiempo, es la velocidad de movimiento v en el instante de tiempo t; por eso

$$dx = v\,dt.$$

De este modo, *la diferencial del camino es igual al incremento ficticio de éste, y que será obtenido si se supone que a partir del instante de tiempo dado el punto efectúa un movimiento uniforme conservando la velocidad adquirida.*

Por ejemplo, si el velocímetro de un automóvil indica 60 km/h, el conductor que estima que en 1 minuto el recorrido del vehículo será igual a 1 kilómetro, en realidad no calcula el incremento del camino recorrido en 1 minuto (que puede ser no igual a 1 kilómetro a causa del movimiento no uniforme), sino que la **diferencial del camino.**

§ 5. Cálculo aproximado de incrementos pequeños de una función

Si Δx es pequeño en valor absoluto, el incremento de la función derivable $f(x)$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

difiere de su diferencial

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x$$

en una magnitud infinitamente pequeña respecto a Δx. De aquí tenemos la igualdad aproximada

$$f(x+\Delta x)- \quad (x) \approx f'(x)\,\Delta x, \tag{1}$$

o sea,

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\,\Delta x. \tag{1'}$$

Estas igualdades son muy útiles para cálculos aproximados. Notemos que la fórmula (1') es el término lineal de la fórmula de Taylor (§ 6 del cap. XI).

EJEMPLO 1. Hallar $\sqrt[3]{1,1}$. Considerando que en la fórmula (1') $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x=1$, $\Delta x=0,1$, tendremos $\sqrt[3]{1,1}=\sqrt[3]{1}+0,1\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=1+0,1\cdot\frac{1}{3}=1,033$.

Mediante las tablas, hallamos $\sqrt[3]{1,1}=1,032$.

Examinemos otro problema, de importancia para los cálculos aproximados.

PROBLEMA Para una función dada

$$y=f(x)$$

el error absoluto límite de su argumento x es igual a Δ_x, es decir,

$$|\Delta x| \leqslant \Delta_x.$$

¿Cuáles son los errores absoluto Δ_y y relativo δ_y límites de la función y?

Según la fórmula (1) tenemos

$$|\Delta y| \approx |y'|\,|\Delta x|;$$

por consiguiente, cuando $y' \neq 0$ se puede considerar

$$\Delta_y=|y'|\,\Delta_x \tag{2}$$

y

$$\delta_y=\frac{\Delta y}{|y|}=|(\ln y)'|\,\Delta_x.$$

EJEMPLO 2. Un ángulo $x=60°$ está definido con una exactitud de hasta $1°$. ¿Cómo incidirá esto en el cálculo del seno de este ángulo?

Aquí $\Delta_x=\text{arc }1°=\pi/180\approx 1/57$. Por eso, el error para $y=\operatorname{sen} x$ según la fórmula (2), donde $y'=\cos x$, puede alcanzar un valor $\Delta_y=\cos 60°\cdot\Delta_x\approx\frac{1}{114}\approx 0,01$.

§ 6. Equivalencia del incremento y de la diferencial de una función

Introduzcamos el concepto de funciones infinitesimales *equivalentes* o *asintóticamente iguales.*

DEFINICION. *Dos funciones infinitesimales* $\alpha = \alpha(x)$ *y* $\beta = \beta(x)$ *se denominan* ***equivalentes*** *cuando* $x \to a$, *si el límite de cociente es igual a la unidad, es decir, cuando*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Para designar la equivalencia de los infinitésimos α y β se utiliza el símbolo de equivalencia $\sim$, es decir, se escribe $\alpha \sim \beta$.

Por e emplo,

$$\operatorname{sen} \alpha \sim \alpha$$

cuando $\alpha \to 0$, porque

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1.$$

Remarquemos que *si dos infinitésimos* α *y* β *son equivalentes, su diferencia es un infinitésimo de orden superior respecto a cada uno de ellos.*

Efectivamente, si $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$, tenemos

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to 0,$$

es decir, $\alpha - \beta$ es de un orden superior que β (§ 8 del cap. VII). Se puede desarrollar un razonamiento análogo para α.

Inversamente, *si la diferencia de dos infinitésimos* α *y* β *es otro infinitésimo de orden superior respecto a cada uno de ellos, los infinitésimos* α *y* β *son equivalentes.*

En efecto, suponiendo, por ejemplo, que

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to 0$$

obtenemos $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$ y, por consiguiente, $\alpha \sim \beta$.

En particular, *quitando (o adicionando) de un infinitésimo otro infinitésimo de orden superior, obtenemos un infinitésimo equivalente al primero.*

Por ejemplo, cuando $x \to 0$, tenemos

$$(x + 1000\, x^2) \sim x.$$

Señalemos una propiedad importante de los infinitésimos equivalentes.

TEOREMA 1. *Al calcular el límite de la razón de dos infinitésimos éstos se pueden reemplazar por infinitésimos equivalentes a ellos (suponiendo que el límite de la razón, finito o infinito, existe).*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sean $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ y $\beta(x) \sim \sim \beta_1(x)$ cuando $x \to a$. Tenemos

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}. \tag{1}$$

Pasando al límite en la identidad (1) obtendremos

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} =$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

EJEMPLO. Puesto que $\operatorname{sen} x \sim x$ cuando $x \to 0$ (§ 11 del cap. VII), tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+5x^2}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

TEOREMA 2. *Un incremento infinitamente pequeño de una función es equivalente a la diferencial de esta función para todos los valores de la variable independiente en los cuales la derivada de la función es finita y distinta de cero.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si la función $y = f(x)$ es derivable, aplicando la fórmula (2) del § 2, obtendremos

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x, \tag{2}$$

donde α es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$.

Puesto que según los datos del teorema cuando $\Delta x \neq 0$ tenemos $dy = y' \Delta x \neq 0$, entonces

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha}{y'}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

es decir, los infinitésimos Δy y dy son equivalentes cuando $\Delta x \to 0$.

EJEMPLO. Sea dada la función $f(x) = (1+x)^\alpha$. Tenemos

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) = (1+x)^\alpha - 1$$

y

$$df(0) = f'(0)(x-0) = \alpha x.$$

Por eso

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \text{ cuando } x \to 0.$$

OBSERVACIÓN En general, si una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$, entonces cuando $x \to 0$ tenemos

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) \sim f'(0)\,x. \tag{3}$$

De la fórmula (3) en particular, cuando $x \to 0$, obtenemos
a) $\operatorname{sen} x \sim x$;
b) $a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$;
c) $\ln(1 + x) \sim x$.

§ 7. Propiedades de la diferencial

Examinemos ahora algunas propiedades de la diferencial, análogas a las de la derivada.

En las enunciaciones que siguen supondremos sin especificar cada vez que todas las funciones examinadas tienen derivadas, es decir, son derivables.

I. Diferencial de una constante. *La diferencial de una constante es igual a cero.*

Considerando que en la fórmula (4) del § 2 $y = c$ e $y' = 0$, obtendremos

$$dc = 0.$$

II. Diferencial de una suma. *La diferencial de la suma algebraica de funciones derivables es igual a la suma algebraica de las diferenciales de estas funciones.*

Efectivamente, si u, v y w son funciones derivables de una variable independiente x, tendremos, por ejemplo,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Multiplicando los dos miembros por dx obtendremos

$$(u + v - w)'\,dx = u'dx + v'dx - w'dx,$$

de donde, en virtud de la fórmula (4) del § 2, deducimos

$$d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

III. *Si dos funciones derivables se diferencian en un sumando constante, sus diferenciales son iguales.*

Tenemos

$$d(u + c) = du + dc.$$

Considerando aquí c constante y, por consiguiente, $dc = 0$, obtendremos

$$d(u + c) = du.$$

IV. *Se puede sacar un factor constante del signo de diferencial.*

Efectivamente, si c es constante,

$$(cu)' = cu'.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por dx obtendremos

$$(cu)'dx = c\,(u'dx),$$

o sea,

$$d\,(cu) = cdu.$$

V. Diferencial de un producto. *La diferencial del producto de dos factores es igual a la suma del producto del primer factor por la diferencial del segundo y del producto del segundo factor por la diferencial del primero.*

Efectivamente, si u y v son funciones derivables de x, tenemos

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Multiplicando los dos miembros por dx, obtendremos

$$(uv)'dx = u\,(v'dx) + v\,(u'dx),$$

o sea

$$d\,(uv) = udv + vdu.$$

VI. Diferencial de un cociente. *La diferencial de una fracción (de un cociente) es también igual a una fracción cuyo numerador es el producto del denominador de la fracción por la diferencial del numerador menos el producto del numerador por la diferencial del denominador y cuyo denominador es el cuadrado del denominador de la fracción.*

Tenemos

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Multiplicando los dos miembros por dx obtendremos

$$\left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v\,(u'\,dx) - u\,(v'\,dx)}{v^2}.$$

De aquí,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

VII. Diferencial de una función compuesta. *La diferencial de una función compleja (función de funciones) es igual al producto de la derivada de esta función respecto al argumento intermedio por la diferencial de este argumento intermedio (las dos funciones son derivables).*

Sea $y = f\,[\varphi\,(x)]$. Supongamos que $\varphi\,(x) = u$ y, por consiguiente, $y = f\,(u)$. Si $f\,(u)$ y $\varphi\,(x)$ son funciones derivables, entonces, según el teorema sobre la derivada de una función compuesta, se puede escribir

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Al multiplicar los dos miembros de la igualdad por la diferencial dx de la variable independiente x, obtendremos

$$y'_x\,dx = y'_u\,(y'_x dx). \tag{1}$$

Pero $y'_x\,dx = dy$ y $u'_x dx = du$; por consiguiente, la igualdad (1) puede ser escrita así:

$$du = y'_u du. \tag{2}$$

OBSERVACIÓN. Por su forma, la fórmula (2) coincide con la fórmula (4) del § 2, pero entre ellas hay una diferencia esencial: en la fórmula (4) x es una variable independiente y, por consiguiente, $dx = \Delta x$, mientras que en la fórmula (2) u es función de la variable independiente x y por eso, en general, $du \neq \Delta u$.

De la fórmula (2) se deduce el teorema siguiente.

VIII. Independencia de la forma de la diferencial con respecto a la elección de la variable independiente. *La diferencial de una función es igual al producto de la derivada de esta función por la diferencial del argumento, no importa si este argumento es una variable independiente o una función diferenciable de otra variable independiente.*

A partir de las fórmulas de derivadas (§ 12 del cap. X) obtenemos la correspondiente tabla de diferenciales, donde u es una función derivable arbitraria.

Tabla de funciones diferenciales

I. $du^n = nu^{n-1}\,du.$

II. $da^u = a^u \ln a\,du \quad (a > 0),\ de^u = e^u\,du.$

III. $d(\log_a u) = \dfrac{du}{u \ln a}\ (a > 0,\ a \neq 1),\ d(\ln u) = \dfrac{du}{u}.$

IV. $d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du.$

V. $d(\cos u) = -\operatorname{sen} u\,du.$

VI. $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}.$

VII. $d(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\operatorname{sen}^2 u}.$

VIII. $d(\operatorname{arcsen} u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

IX. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

X. $d(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{1+u^2}.$

XI. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{1+u^2}.$

XII. $df(u) = f'(u)\,du.$

§ 8. Diferenciales de orden superior

Sea x una variable independiente e $y = f(x)$ una función derivable. Según la fórmula (4) del § 2 tenemos

$$df(x) = f'(x)\,dx, \tag{1}$$

de este modo, la diferencial de la función $f(x)$ es función de dos argumentos: x y dx.

En adelante supondremos que dx es la diferencial de la variable independiente x y tiene un valor arbitrario, pero **fijo**, independiente de x, y que es el mismo para todas las funciones examinadas.

Si dx es fija, $df(x)$ es una función de x proporcional a la derivada $f'(x)$, con coeficiente de proporcionalidad igual a dx. Puede ocurrir que esta función posea también una diferencial[1]); en este caso, esta última se llama *diferencial segunda* (o *diferencial de segundo orden*) de la función $f(x)$, y la diferencial definida por la fórmula (1), lleva el nombre de *diferencial de primer orden* (o *diferencial primera*).

DEFINICION Llámase ***diferencial segunda*** (***o diferencial de segundo orden***) *$d^2 f(x)$ de una función $f(x)$ a la diferencial de la diferencial primera de esta función*, es decir

$$d^2f(x) = d[df(x)]. \tag{2}$$

De modo análogo, llámase *diferencial tercera* (o *diferencial de tercer orden*) $d^3 f(x)$ de una función $f(x)$, a la diferencial de la diferencial segunda de esta función, es decir,

$$d^3f(x) = d[d^2f(x)].$$

Así se definen sucesivamente las *diferenciales de órdenes superiores*.

Deduzcamos ahora una fórmula para la diferencial segunda de una función $f(x)$ de la variable independiente x, suponiendo que esta función es dos veces derivable, es decir, posee segunda derivada. Puesto que

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

la fórmula (2) nos da

$$d^2f(x) = d[f'(x)\,dx]. \tag{3}$$

Si x es una variable independiente, entonces dx es igual a Δx y no depende evidentemente de x, es decir, dx desempeña respecto a la variable x el papel de una constante. Por eso, en la fórmula (3) se saca el factor dx del signo de diferenciación y se obtiene

$$d^2f(x) = dx \cdot d[f'(x)].$$

Puesto que $f'(x)$ es de nuevo una función de x, de la fórmula (1) se deduce

$$d[f'(x)] = [f'(x)]'dx = f''(x)\,dx.$$

De aquí se halla definitivamente

$$d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2, \quad \text{donde } dx^2 = (dx)^2. \tag{4}$$

---

[1]) Para esto es suficiente que exista la derivada segunda $f''(x)$.

De este modo obtenemos el teorema.

La diferencial segunda de una función dada es igual al producto de la derivada segunda de esta función por el cuadrado de la diferencial de la variable independiente.

Señalemos que en el caso general la fórmula (4) no puede ser aplicada si x no es una variable independiente, porque dx no puede considerarse aquí como un factor independiente de x.

Si se toma $f(x) = y$, la fórmula (4) se puede escribir así: $d^2y = y''dx^2$; de donde tenemos

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

es decir, *la derivada segunda de una función dada es igual a la relación entre la diferencial segunda de esta función y el cuadrado de la diferencial de la variable independiente.*

Si x es una variable independiente, entonces tenemos por analogía con la fórmula (4),

$$d^3f(x) = f'''(x)\,dx^3, \quad d^4f(x) = f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx^4,$$

etc.

Introduciendo ahora en las fórmulas (4) y (5)

$$f(x) \equiv x.$$

En este caso $f'(x) = 1$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, . . . Por consiguiente,

$$d^2x = 0,\ d^3x = 0,\ \ldots$$

Obtenemos el teorema.

Las diferenciales de orden superior de una variable independiente son iguales a cero.

EJERCICIOS

Hallar la diferencial dy de las funciones siguientes, si:

1. $y = 3x^2$. **2.** $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$. **3.** $y = \dfrac{x}{1-x^2}$. **4.** $y = \sqrt{1-x^2}$. **5.** $y = \ln x$. **6.** $y = x^2$, donde $x = 2 - t + t^2$.

7. Sea $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 6$. Hallar y comparar Δy y dy si: a) $x = 1$, $\Delta x = 1$; b) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

8. La arista de un cubo es $x = 10$ m. ¿Cuál será el incremento del volumen de este cubo, si su arista se aumenta en $\Delta x = 0{,}1$ m?

Hallar las soluciones exacta y aproximada.

9. Reemplazando el incremento de una función por su diferencial se pide calcular aproximadamente:

a) $\sqrt[3]{0{,}95}$; b) $\cos 60°20'$; c) $\operatorname{arctg} 1{,}02$.

10. ¿Cuál será el error límite absoluto de la función $y = \operatorname{tg} x$, si $x = 60° \pm 1°$?

11. Hallar dy y d^2y, si $y = e^{-x^2}$.

Capítulo XIII

Integral indefinida

§ 1. Función primitiva. Integral indefinida

El problema fundamental del cálculo diferencial consiste en hallar la diferencial o la derivada de una función dada. El cálculo integral resuelve el **problema inverso:** a partir de la diferencial dada y, por consiguiente, de la derivada de una función incógnita $F(x)$ es necesario hallar esta función. En otras palabras, teniendo la expresión

$$dF(x) = f(x)\,dx \tag{1}$$

o, respectivamente,

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

donde $f(x)$ es una función conocida, hace falta hallar la función $F(x)$. Supondremos, para simplificar, que la igualdad (1) se cumple sobre un cierto intervalo finito o infinito.

La función buscada $F(x)$ se llama en este caso **función primitiva** de la función $f(x)$. De este modo, podemos dar la siguiente definición de la función primitiva.

DEFINICIÓN. *Llámase* ***función primitiva*** *de una función dada $f(x)$ en un intervalo dado, a una función $F(x)$ cuya derivada es igual a $f(x)$ o cuya diferencial es igual a $f(x)\,dx$ en el intervalo considerado.*

Por ejemplo, una de las funciones primitivas para la función $3x^2$ será x^3, porque $(x^3)' = 3x^2$. La función primitiva no es única, puesto que $(x^3+1)' = 3x^2$, $(x^3-5)' = 3x^2$, etc., por eso las funciones x^3+1, x^3-5, etc., son también primitivas de la función $3x^2$. Por consiguiente, la función dada tiene un **conjunto infinito** de funciones primitivas.

En nuestro ejemplo, cada dos primitivas se diferencian entre sí por un cierto sumando constante. Mostremos que esto tendrá lugar también en el caso general.

TEOREMA. *Dos primitivas distintas de una misma función definida en un cierto intervalo, se diferencian entre sí en este intervalo en un sumando constante.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente sea $f(x)$ una función definida sobre un intervalo $\langle a, b\rangle$, y sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ sus primitivas, es decir,

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F_2'(x) = f(x).$$

De aquí,

$$F_1'(x) = F_2'(x).$$

Pero, si dos funciones poseen derivadas idénticas, ellas se diferencian entre sí en un sumando constante (§ 1 del cap. XI, el corolario 2 del teorema sobre el incremento finito de una función). Por consiguiente,

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

donde C es una magnitud constante, lo que debíamos demostrar.

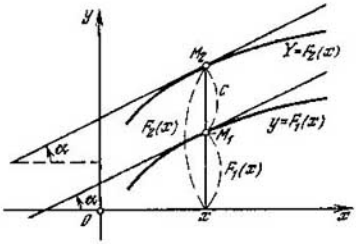

Fig. 128

Interpretación geométrica. Si

$$y = F_1(x) \quad \text{e} \quad Y = F_2(x)$$

son primitivas de una misma función $f(x)$, las tangentes a sus gráficas en puntos de abscisa común x son paralelas: $\operatorname{tg} \alpha = F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ (fig. 128). En tal caso, la distancia entre estas curvas tomada a lo largo del eje Oy, permanece constante:

$$F_2(x) - F_1(x) = C,$$

es decir, estas curvas son, en cierto sentido, «paralelas».

COROLARIO. *Agregando a cualquier primitiva $F(x)$ para la función dada $f(x)$, definida en un intervalo $\langle a, b\rangle$, todas las constantes posibles C, obtendremos todas las primitivas para la función $f(x)$.*

Efectivamente, por una parte, si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces la función $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria, debido a que la derivada de una constante es nula, ella es también primitiva de la función $f(x)$, porque

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x).$$

Por otra parte, acabamos de demostrar que toda primitiva de la función $f(x)$ puede ser obtenida agregando a $F(x)$ un sumando constante elegido C.

Por consiguiente, la fórmula

$$F(x) + C, \tag{2}$$

donde $-\infty < C < +\infty$, y $F(x)$ es una primitiva cualquiera de la función $f(x)$ que agota todo el conjunto de las primitivas de la función $f(x)$.

En adelante supondremos, si no acordamos lo contrario, que la función considerada $f(x)$ está definida y es continua sobre un intervalo acotado o infinito $\langle a, b\rangle$.

Introduzcamos ahora una noción fundamental del cálculo integral, la de integral indefinida.

DEFINICIÓN. *Llámase* **integral indefinida** *de la función* $f(x)$ *o de la expresión diferencial* $f(x)\,dx$, *y se connota con el símbolo*

$$\int f(x)\,dx,$$

la expresión general de todas las primitivas de la función continua $f(x)$.

En este caso, la función $f(x)$ se denomina *función subintegral* y la expresión $f(x)\,dx$ se llama *expresión subintegral*.

Recordando la definición de la función primitiva se puede decir que la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ representa sobre un intervalo dado **una función de forma general** cuya diferencial es igual a la expresión subintegral $f(x)\,dx$ y, por consiguiente, una función cuya derivada respecto a la variable x es igual a la función subintegral $f(x)$ en todos los puntos del intervalo examinado.

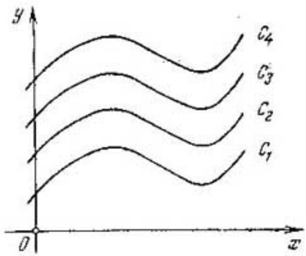

Fig. 129

Sea $F(x)$ una primitiva perfectamente determinada de una función $f(x)$. Como hemos visto, cualquier otra primitiva de esta función es de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante. De acuerdo con la definición de integral indefinida, se puede escribir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{3}$$

donde $F'(x) = f(x)$ y la constante C puede tomar cualquier valor y, por eso, se llama *constante arbitraria*.

EJEMPLO. Como hemos visto, una de las primitivas de la función $3x^2$ es la función x^3. Por eso

$$\int 3x^2dx = x^3 + C.$$

Una integral indefinida geométricamente

$$y = F(x) + C$$

representa una familia de curvas «paralelas» (fig. 129).

De la definición de integral indefinida se deduce que si tenemos una *ecuación diferencial* (es decir, una ecuación que contiene diferenciales) (más detalladamente véase el cap. XIX) de tipo

$$dy = f(x)\,dx,$$

donde la función $f(x)$ es continua sobre un intervalo (a, b), la solución general de esta ecuación para $a < x < b$ es dada por la fórmula

$$y = \int f(x)\,dx.$$

§ 2. Propiedades principales de la integral indefinida

A partir de la fórmula (3) del párrafo precedente, deduzcamos las propiedades principales de la integral indefinida.

I. *La diferencial de una integral indefinida es igual a la expresión subintegral y la derivada de una integral indefinida es igual a la función subintegral.*

Esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de la integral indefinida.

De este modo, tenemos

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \tag{1}$$

y

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$$

II. *La integral indefinida de la diferencial de una función continua derivable es igual a esta función, con precisión de hasta un sumando constante.*

Efectivamente, sea

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)\,dx,$$

donde $\varphi'(x)$ es una función continua. La función $\varphi(x)$ es evidentemente una primitiva de la función $\varphi'(x)$. Por eso tenemos

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \tag{2}$$

OBSERVACIÓN En las fórmulas (1) y (2) los signos d y $\int$ que siguen uno tras otro en cualquier orden, se neutralizan (si no se tiene en cuenta el sumando constante). En este sentido, *la diferenciación y la integración son operaciones matemáticas contrarias.*

III. *Se puede sacar un factor constante no nulo del signo de la integral indefinida*, es decir, si la constante $A \neq 0$,

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx. \tag{3}$$

Efectivamente, sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. En virtud de la fórmula (3) del § 1 tenemos

$$A\int f(x)\,dx = A[F(x) + C] = AF(x) + C_1, \tag{4}$$

donde $C_1 = AC$; C y C_1 son constantes arbitrarias para $A \neq 0$. Pero $AF(x)$ es una primitiva de la función $Af(x)$ porque

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Por eso, de la fórmula (4) se obtiene la fórmula requerida (3).

OBSERVACIÓN. **Para $A = 0$ la fórmula (3) no es válida, puesto que su primer miembro es una constante arbitraria y su segundo miembro es idénticamente igual a cero.**

IV. *La integral indefinida de una suma algebraica de un número finito de funciones continuas, es igual a la suma algebraica de integrales indefinidas de estas funciones*, es decir, si, por ejemplo, las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son continuas sobre un intervalo (a, b), entonces

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx \tag{5}$$

para $x \in (a, b)$.

Efectivamente, sean $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$ las primitivas respectivas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $H'(x) = h(x)$ para $x \in (a, b)$. En virtud de la fórmula (3) del § 1 tenemos

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx = [F(x) + C_1] + \\ + [G(x) + C_2] - [H(x) + C_3] = [F(x) + G(x) - H(x)] + C, \tag{6}$$

donde C_1, C_2, C_3 son constantes arbitrarias y $C = C_1 + C_2 - C_3$ es, evidentemente, una constante arbitraria. Pero la función $F(x) + G(x) - H(x)$ es una primitiva de la función $f(x) + g(x) - h(x)$ porque

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = \\ = f(x) + g(x) - h(x).$$

Por consiguiente,

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = F(x) + G(x) - H(x) + C. \tag{7}$$

De las fórmulas (6) y (7) se deduce la igualdad (5).

§ 3. Tabla de las integrales indefinidas más simples

Aprovechando el hecho de que la integración es una operación inversa de la diferenciación, no es difícil obtener una tabla de las integrales más simples. Para eso partiremos de la fórmula (3) del § 1, la cual parafraseamos ahora del modo siguiente: si

$$dF(x) = f(x)\,dx,$$

entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Tratando las fórmulas de diferenciación dadas, obtenemos

I. Como $d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m\,dx$, entonces $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ $(m \neq -1)$.

II. " $d(\ln|x|) = \frac{dx}{x}$, " $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (para $x < 0$ y para $x > 0$).

III. " $d(e^x) = e^x\,dx$, " $\int e^x\,dx = e^x + C$.

IV. " $d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x\,dx$ " $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

V. " $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\,dx$, " $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.

VI. " $d(-\cos x) = \operatorname{sen} x\,dx$, " $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.

VII. " $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$, " $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

VIII. " $d(-\operatorname{ctg} x) = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, " $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

IX. Como $\left.\begin{aligned} d(\operatorname{arcsen} x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ d(-\arccos x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\}$ entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C_1$.

X. " $\left.\begin{aligned} d(\operatorname{arctg} x) &= \frac{dx}{1+x^2}, \\ d(-\operatorname{arcctg} x) &= \frac{dx}{1+x^2}, \end{aligned}\right\}$ " $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$.

Para hacer la tabla más completa agregamos dos fórmulas más, cuya validez puede ser verificada por la diferenciación:

XI. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C;\quad \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$, donde la constante $\alpha \neq 0$ (véase el § 7).

Puesto que (véase el § 9 del cap. X) $d\,(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x\, dx$ y $d\,(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x\, dx$, tenemos otras dos fórmulas útiles.

XIII. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$. **XIV.** $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

Las integrales que contiene esta tabla las llamaremos *tabuladas* y es preciso recordarlas bien.

EJEMPLO 1. $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$.

EJEMPLO 2. $\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

§ 4. Independencia del tipo de una integral indefinida, respecto a la elección del argumento

En la tabla de integrales principales (tabuladas) se supuso que x es una variable independiente. Sin embargo, esta tabla conserva completamente su valor, si se entiende por x toda función continuamente diferenciable de una variable independiente.

En efecto, sean: x, una variable independiente; $f(x)$, una función continua en un intervalo dado, y $F(x)$, su primitiva, es decir, $F'(x) = f(x)$. Tenemos

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Supongamos ahora que

$$u = \varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función continuamente diferenciable [1]) y examinemos la integral

$$\int f(u)\, du = \int f(u)\, u'\, dx. \tag{2}$$

En tal caso, *la función compuesta*

$$F(u) = F(\varphi(x)) \tag{3}$$

es primitiva de la función subintegral de la integral (2). Efectivamente, en virtud de la independencia de la diferencial primera respecto a la elección de la variable independiente, obtenemos

$$dF(u) = F'(u)\, du = f(u)\, du \tag{4}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{d}{dx}[F(u)] = \frac{dF(u)}{du}\frac{du}{dx} = f(u)\, u'. \tag{4'}$$

[1]) Es decir, se supone que la derivada $\varphi'(x)$ es continua.

Por eso

$$\int f(u)\,du = F(u) + C, \tag{5}$$

donde $F'(u) = f(u)$.

De este modo, de la validez de la fórmula (1) se deduce la validez de la fórmula (5); en este caso la última fórmula se obtiene a partir de la precedente por una sustitución formal de x por u. Partiendo de esta propiedad, obtenemos *la tabla generalizada de las integrales más simples*

$$\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1), \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \text{ etc.},$$

donde u es una función cualquiera continuamente derivable de una variable independiente. Esta tabla es el resultado de la inversión de las fórmulas generalizadas de diferenciación (§ 7 del cap. XII).

Eligiendo de diferentes modos la función u, se puede alargar considerablemente la tabla de las integrales más simples.

EJEMPLO. De la fórmula 1 se deduce que

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C. \tag{6}$$

Reemplazando aquí x por sen x se obtiene

$$\int \operatorname{sen} x\, d(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C, \quad \text{es decir} \quad \int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C.$$

Luego sustituyendo en la fórmula (6), por ejemplo, la función $\ln x$ en lugar de x, tenemos

$$\int \ln x\, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C \quad \text{o} \quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C,$$

etc.

Aquí se hace más comprensible la importancia de saber reducir la expresión diferencial dada $f(x)\,dx$ a la forma de

$$f(x)\,dx = g(u)\,du,$$

donde u es una función de x y g es una función más fácil de integrar que f.

Señalemos una serie de transformaciones de la diferencial, que serán útiles más adelante:

1) $dx = d(x+b)$, donde b es una constante;

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, donde la constante $a \neq 0$;

3) $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ $(a \neq 0)$;

4) $x\,dx = \frac{1}{2} d(x^2)$;

5) $\operatorname{sen} x\,dx = -d(\cos x)$;

6) $\cos x\,dx = d(\operatorname{sen} x)$.

En general

$$\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x).$$

Utilizando estas transformaciones de diferenciales calculemos algunas integrales indefinidas.

EJEMPLO 1.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0).$$

EJEMPLO 2

$$\int \sqrt{x-2}\,dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

EJEMPLO 3.

$$\int \operatorname{sen} 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \operatorname{sen} 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

EJEMPLO 4.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

EJEMPLO 5.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

EJEMPLO 6.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

EJEMPLO 7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

EJEMPLO 8

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mp\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \mp\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= \mp\operatorname{arcsen}\frac{1}{x} + C = -\operatorname{arcsen}\frac{1}{|x|} + C, \text{ donde } |x| > 1.$$

EJEMPLO 9.

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

§ 5. Noción sobre los métodos principales de integración

Para calcular una integral dada se debe, si es posible, reducirla por un procedimiento u otro a una integral tabulada, para hallar así el resultado buscado. En nuestro curso estudiaremos solamente los procedimientos de integración que se utilizan más frecuentemente y mostraremos su aplicación mediante ejemplos simples.

Los procedimientos de integración más importantes son: 1) *integración por descomposición*; 2) *integración por sustitución*; 3) *integración por partes*.

1. Integración por descomposición. Sea $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; en este caso, en virtud de la propiedad IV del § 2 tenemos

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Si es posible, los sumandos $f_1(x)$ y $f_2(x)$ se eligen de tal modo que sus integrales se calculen directamente.

EJEMPLO 1.

$$\int (1-\sqrt{x})^2\,dx = \int (1-2\sqrt{x}+x)\,dx = \int dx - \int 2\sqrt{x}\,dx + \int x\,dx =$$
$$= \int dx - 2\int x^{1/2}\,dx + \int x\,dx = x - 2\,\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} +$$
$$+ C = x - \frac{4}{3}\,x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

OBSERVACION. No es necesario poner después de cada sumando una constante arbitraria porque su suma es también una constante arbitraria que escribimos al final.

EJEMPLO 2

$$\int \frac{x^4-6x^3-8x^2+9x-5}{x^2}\,dx = \int \left(x^2-6x-8+\frac{9}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx =$$
$$= \int x^2\,dx - 6\int x\,dx - 8\int dx + 9\int \frac{dx}{x} - 5\int x^{-2}\,dx = \frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} -$$
$$-8x + 9\ln|x| - 5\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 8x + 9\ln|x| + \frac{5}{x} + C.$$

EJEMPLO 3.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

EJEMPLO 4. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, entonces

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) =$$
$$= \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

EJEMPLO 5. $\int \operatorname{sen} x \cos 3x \, dx$.

Puesto que $\operatorname{sen} x \cos 3x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$, tenemos

$$\int \operatorname{sen} x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{sen} 4x \, d(4x) -$$
$$- \frac{1}{4} \int \operatorname{sen} 2x \, d(2x) = -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

2. Integración por sustitución (método de introducción de una nueva variable).

Sean: $f(x)$, una función continua sobre un intervalo (a, b), y $x = \varphi(t)$ una función continuamente derivable sobre un intervalo (α, β), además la función φ aplica el intervalo (α, β) en el intervalo (a, b).

Debido a que la integral indefinida es independiente de la elección del argumento (§ 4) y teniendo en cuenta que $dx = \varphi'(t) \, dt$, obtenemos *la fórmula de cambio de variable en una integral indefinida*

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt. \tag{1}$$

La integral del segundo miembro de la igualdad (1) puede ser más simple que la del primer miembro de esta igualdad, o incluso pertenecer a las tabuladas.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 6. $\int x \sqrt{x-5} \, dx$.

Para eliminar la raíz, hacemos $\sqrt{x-5} = t$. De aquí, $x = t^2 + 5$ y, por consiguiente, $dx = 2t \, dt$.

Efectuando la sustitución, se obtiene, sucesivamente,

$$\int x \sqrt{x-5} \, dx = \int (t^2+5) \, t \cdot 2t \, dt = \int (2t^4 + 10t^2) \, dt = 2 \int t^4 \, dt + 10 \int t^2 dt =$$
$$= 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 10 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5} (x-5)^{5/2} + \frac{10}{3} (x-5)^{3/2} + C.$$

EJEMPLO 7. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \ (a > 0)$.

Aquí es cómodo aplicar una sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} t$, de donde $dx = a \cos t \, dt$. Por consiguiente,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} \cdot a \cos t \, dt = a^2 \int \cos^2 t \, dt =$$
$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{4} \int \cos 2t \, d(2t) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2t + C.$$

Volviendo a la variable x, tendremos

$$\operatorname{sen} t = \frac{x}{a} \quad \text{y} \quad t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$$

Luego,

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2-x^2}.$$

Por eso obtendremos definitivamente

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C. \tag{2}$$

A veces es útil aplicar la fórmula (1) escribiéndola de derecha a izquierda:

$$\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx = \int f[\varphi(x)]\, d\varphi(x), \tag{3}$$

o

$$\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt,$$

donde

$$t = \varphi(x).$$

En la práctica es deseable no introducir una nueva variable t, limitándose a aplicar la fórmula (1). Los ejemplos más simples de este tipo han sido examinados en el § 4. Aquí examinaremos algunos ejemplos más.

EJEMPLO 8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx.$

Tomando $t = 1 + \operatorname{ctg} x$, $dt = -\dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, tendremos

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\int (1+\operatorname{ctg} x)^{1/3} d(1+\operatorname{ctg} x) =$$
$$= -\int t^{1/3}\, dt = -\frac{3}{4} t^{4/3} + C = -\frac{3}{4} (1+\operatorname{ctg} x)^{4/3} + C.$$

EJEMPLO 9. $\displaystyle\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) \frac{dx}{x}.$

Puesto que $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$, tenemos

$$\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) \frac{dx}{x} = \int \ln x\, d(\ln x) + \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln|\ln x| + C.$$

EJEMPLO 10.

$$\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

(véase la fórmula XI del § 3).

3. Integración por partes. Sean u y v dos funciones de x continuamente derivables. De acuerdo con la fórmula de la diferencial de un producto (la V del § 7 del cap. XII) tenemos

$$d(uv) = u\,dv + v\,du;$$

de donde

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Integrando obtendremos

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du,$$

o definitivamente

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (4)$$

Esto es *la fórmula de integración por partes.*

La fórmula deducida muestra que la integral $\int u\,dv$ se reduce a la integral $\int v\,du$ que puede resultar más simple que la integral inicial o incluso pertenecer a las tabuladas.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 11. $\int \ln x\,dx.$

Haciendo aquí $u = \ln x$ y $dv = dx$, obtendremos $du = d\ln x = \frac{dx}{x}$ y $v = x$.

Por consiguiente, en virtud de la fórmula (4), tendremos

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

EJEMPLO 12. $\int x\cos x\,dx.$

Tomando $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$, tenemos $du = dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$. Aplicando la fórmula de integración por partes (4), obtendremos

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

En la práctica se puede aprender a emplear la fórmula (4) sin escribir aparte las expresiones para las funciones u y v.

EJEMPLO 13.

$$\int x\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\,d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \int (x^2+1)\,d\operatorname{arctg} x\right] =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int (x^2+1)\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C.$$

§ 6. Integración de fracciones racionales con denominadores de segundo grado

Se trata de calcular las integrales de tipo

$$\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\,dx, \tag{1}$$

donde $P(x)$ es un polinomio entero y a, b, c son constantes, $a \neq 0$. Al dividir el numerador $P(x)$ por el denominador ax^2+bx+c obtenemos un polinomio $Q(x)$ como cociente y un binomio lineal $mx+n$ como resto (porque el grado del resto es inferior al grado del divisor), de donde

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = Q(x) + \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}.$$

La integral del polinomio $Q(x)$ se calcula inmediatamente; por eso mostraremos cómo se calculan las integrales de tipo

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Deduzcamos primeramente dos integrales fundamentales.

I. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a \neq 0),$

es decir,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a \neq 0). \tag{2}$$

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad (a \neq 0).$

Tenemos

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

De aquí,

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

Entonces (comparar con el § 3 del cap. XI),

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a\neq 0). \tag{3}$$

Los resultados (2) y (3) se deben guardar en la memoria. Agregamos a las integrales I y II la integral

III. $\int \frac{x\,dx}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2\pm a^2)}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2|+C.$

EJEMPLO 1.

$$\int\frac{dx}{2x^2+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+C.$$

EJEMPLO 2. $\int\frac{dx}{x^2-5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$

El procedimiento principal para calcular la integral (1) es el siguiente: el trinomio de segundo grado ax^2+bx+c se completa hasta que haya un cuadrado perfecto[1]). Luego, si el coeficiente $m=0$, la integral (1) se reduce a la integral I ó a la integral II. Si $m\neq 0$, la integral (1) se reduce a las integrales I y III ó a las integrales II y III. Con unos ejemplos mostraremos de qué modo hay que hacerlo.

EJEMPLO 3.

$$\int\frac{dx}{x^2-10x+16}=\int\frac{dx}{(x^2-2\cdot 5x+25)+(16-25)}=$$
$$=\int\frac{d(x-5)}{(x-5)^2-3^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right|+C.$$

EJEMPLO 4.

$$\int\frac{dx}{x^2+3x+4}=\int\frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+\left(4-\frac{9}{4}\right)}=$$
$$=\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C.$$

EJEMPLO 5. $I=\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1}=\int\frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$. Hacemos $x+\frac{1}{2}=t$, de donde $x=t-\frac{1}{2}$ y $dx=dt$.

[1]) Suponemos que el trinomio de segundo grado no es un cuadrado perfecto.

Por consiguiente,

$$I=\int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right) dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

EJEMPLO 6. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$.

Al dividir x^4 por x^2+1, tenemos $\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$, de donde

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\int x^2\,dx-\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C.$$

OBSERVACIÓN. Si el trinomio de segundo grado ax^2+bx+c posee raíces reales y diferentes x_1 y x_2, entonces, como se demuestra en los cursos de análisis más detallados, para calcular la integral (1) se puede descomponer la función subintegral en fracciones simples:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\equiv\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}, \tag{4}$$

donde A y B son coeficientes indefinidos. Los números A y B se calculan mediante una reducción de la identidad (4) a un tipo entero e igualando los coeficientes de mismas potencias de x en la igualdad obtenida.

EJEMPLO 7. Hallar $I=\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}\,dx$.

Igualando el denominador a cero, obtenemos la ecuación $x^2+5x-6=0$; hallamos sus raíces: $x_1=1$ y $x_2=-6$. De acuerdo con la fórmula (4) tenemos

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}. \tag{5}$$

De aquí, al liberarse del denominador y teniendo en cuenta que

$$x^2+5x-6=(x-1)(x-6)$$

obtendremos $x+2\equiv A(x+6)+B(x-1)$, o

$$x+2\equiv(A+B)x+(6A-B). \tag{6}$$

Igualando entre sí los coeficientes de iguales potencias de x en el primero y el segundo miembros de la última igualdad tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1, \\ 6A-B=2. \end{array}\right\}$$

Por consiguiente, $A=\frac{3}{7}$, $B=\frac{4}{7}$.

Notemos que los coeficientes A y B pueden determinarse de modo muy simple a partir de la identidad (6), considerando primeramente que $x=1$ de donde $3=A\cdot 7$ y $A=\frac{3}{7}$, y luego, considerando que $x=-6$, esto nos da $-4=B(-7)$ y $B=\frac{4}{7}$.

Por medio del desarrollo (5) obtenemos

$$I=\frac{3}{7}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{d(x+6)}{x+6}=$$
$$=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C=\frac{1}{7}\ln\{|x-1|^3(x+6)^4\}+C.$$

§ 7. Integración de irracionalidades simples

1. Si la expresión subintegral contiene solamente una irracionalidad **lineal** $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a\neq 0)$, es útil efectuar la sustitución

$$t=\sqrt[n]{ax+b}.$$

EJEMPLO 1. Hallar $I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Consideramos que $t=\sqrt[3]{x+1}$, de donde $x=t^3-1$ y $dx=3t^2\,dt$.

Tenemos

$$I=\int\frac{(t^3-1)\cdot 3t^2\,dt}{t}=3\int(t^4-t)\,dt=\frac{3}{5}t^5-\frac{3}{2}t^2+C=$$
$$=\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+C.$$

2. La integral de una irracionalidad **cuadrática** simple

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

con ayuda del complemento del trinomio del segundo grado ax^2+ $+bx+c$ hasta un cuadrado perfecto, se reduce a una de las dos integrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha\pm x^2}}$$

cuyos cálculos se dan más abajo.

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \quad (\alpha \neq 0)$.

Aplicamos aquí *la sustitución de Euler*

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - x,$$

donde t es una nueva variable. Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad tendremos $x^2 + \alpha = t^2 - 2tx + x^2$, o sea,

$$\alpha = t^2 - 2tx.$$

Diferenciando los dos miembros de la última igualdad obtendremos $0 = 2t\,dt - 2x\,dt - 2t\,dx$, o sea,

$$t\,dx = (t - x)\,dt.$$

De aquí

$$\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{dt}{t}.$$

De este modo, tenemos

$$\int \frac{dt}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Por último expresando t en función de x, hallamos definitivamente la integral tabulada XII (§ 3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C \quad (\alpha \neq 0). \tag{1}$$

Hace falta guardar en la memoria esta fórmula.

EJEMPLO 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Aplicando la fórmula (1) tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}.$$

Considerando aquí $x-3=t$, obtendremos sucesivamente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln(t + \sqrt{t^2+4}) + C.$$

Puesto que $t = x-3$, tendremos definitivamente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \ln[x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}] + C =$$

$$= \ln(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}) + C.$$

II. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

EJEMPLO 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C =$$

$$= \operatorname{arcsen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

§ 8. Integración de funciones trigonométricas

Para las aplicaciones es importante saber calcular las integrales

$$I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx,$$

donde m y n son números enteros no negativos.

Aquí hay dos casos:

1) por lo menos uno de exponentes m o n es un número impar;
2) los dos exponentes m y n son números pares.

En el primer caso la integral I se calcula inmediatamente.

EJEMPLO 1. Hallar $I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$.

Consideramos sucesivamente

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, (\operatorname{sen} x \, dx) = -\int (1-\cos^2 x) \cos^2 x \, d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^2 x \, d(\cos x) + \int \cos^4 x \, d(\cos x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

En el segundo caso, para calcular la integral I se utilizan las fórmulas del argumento doble:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

EJEMPLO 2. Hallar $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

Tenemos

$$I = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \, (1+\cos 2x) \, dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} \, dx + \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x \, d(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x \, dx + \frac{1}{16}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3} =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.$$

En la teoría de series de Fourier (el § 17 del cap. XXI) tienen mucha importancia las integrales

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx, \quad \int \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx.$$

Ellas se calculan a partir de las fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

EJEMPLO.

$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x)\, dx = \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C.$$

§ 9. Integración de algunas funciones trascendentes

La integral

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio, se calcula por el método de integración por partes que se aplica el número de veces necesario.

EJEMPLO.

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int x^2\, d(e^{2x}) = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\, dx = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int x\, d(e^{2x}) =$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.$$

Por un procedimiento análogo se calculan las integrales de tipo

$$\int P(x) \operatorname{sen} ax\, dx \quad \text{y} \quad \int (P(x) \cos ax\, dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio.

§ 10. Teorema de Cauchy. Noción sobre las integrales "incalculables"

Hasta aquí hemos sabido hallar para ciertas funciones continuas $f(x)$ sus integrales indefinidas

$$\int (f(x)\, dx.$$

Se puede preguntar, si es siempre así, es decir, 1) si toda función continua $f(x)$ posee una integral indefinida y 2) si esa integral existe, mediante qué procedimiento se puede hallarla.

De respuesta a la primera parte de esta pregunta sirve el teorema de Cauchy que es el teorema fundamental del cálculo integral.

TEOREMA DE CAUCHY. *Toda función continua tiene su primitiva.*

En otras palabras, *para cada función $f(x)$ continua en un intervalo (a, b), existe una función $F(x)$ cuya derivada en el intervalo (a, b) es exactamente igual a la función dada $f(x)$, es decir,*

$$F'(x) = f(x).$$

Por eso existe una integral indefinida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

La demostración de este teorema, debido a su complejidad, no se incluye en esta obra.

Con esto el teorema no responde a la segunda parte de nuestra pregunta: si se da una función continua $f(x)$, de qué modo se puede hallar su integral indefinida. El teorema de Gauchy no afirma que la primitiva de una función dada puede ser realmente hallada con ayuda de un número finito de operaciones conocidas y que la respuesta puede ser expresada por funciones elementales (algebraicas, exponenciales, trigonométricas, etc.). Además existen funciones elementales continuas cuyas integrales no son funciones elementales. Tales integrales se llaman frecuentemente **«incalculables»**, entendiendo por esto que ellas no pueden ser expresadas con ayuda de un número finito de funciones elementales.

Por ejemplo, se puede demostrar que las integrales

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

y muchas otras no se reducen a una combinación finita de funciones elementales y, por consiguiente, son «incalculables» en nuestra acepción de la palabra.

EJERCICIOS

Consultando la tabla de integrales simples se pide hallar las integrales indefinidas siguientes:

1. $\int (x^2 - 3x + 1)\,dx.$ 2. $\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx.$

3. $\int \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{x^2 \sqrt[3]{x}}\,dx.$ 4. $\int (a^x + b^x)^2\,dx.$

5. $\int (\operatorname{sen} 3x + \cos 5x)\,dx.$ 6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}.$

INDICACIÓN. Aplicar la identidad: $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+2}$. 8. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

10. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$. 11. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

12. $\int \frac{x\, dx}{1+x^2}$. 13. $\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$.

Aplicando el procedimiento de descomposición se pide hallar las integrales:

14. $\int \frac{x^2}{1-x}\, dx$. 15. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$. 16. $\int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx$.

17. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\, dx$. 18. $\int \frac{dx}{4-x^2}$.

19. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$. 20. $\int \cos^2 5x\, dx$.

21. $\int \operatorname{sen} x \cos 7x\, dx$. 22. $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$.

Aplicando las sustituciones indicadas se pide hallar las integrales siguientes:

23. $\int x \sqrt{x-1}\, dx \quad (\sqrt{x-1}=t)$. 24. $\frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad (\sqrt{x}=t)$.

25. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \quad (x=\operatorname{sen} t)$.

26. $\int \frac{dx}{1+2e^x} \quad (e^x=t)$.

Aplicando el procedimiento de integración por partes se pide calcular las integrales:

27. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. 28. $\int x \ln x\, dx$. 29. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

30. $\int xe^x\, dx$. 31. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$. 32. $\int x^2 e^x\, dx$.

Hallar las integrales de las fracciones racionales siguientes:

33. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$. 34. $\int \frac{dx}{5x^2-2}$. 35. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

36. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$. 37. $\int \frac{dx}{x^2-3x+1}$.

38. $\int \frac{dx}{x^2+8x-9}$. 39. $\int \frac{3x+5}{x^2+8x+15}\, dx$.

40. $\int \frac{x^3}{x^2+4x+5}\, dx$.

Hallar las integrales de las funciones irracionales

41. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$. 42. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$. 43. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$. 45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$. 46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

Hallar las integrales de funciones trigonométricas:

48. $\int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx$. 49. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$.

50. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$. 51. $\int \cos^4 x\,dx$.

52. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+\alpha)\,dx$. 53. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

INDICACIÓN. Aplicar la fórmula $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$.

Hallar las integrales de funciones transcendentes:

54. $\int x^2 e^{-x}\,dx$. 55. $\int (x^2+2x+3)\,e^x\,dx$.

56. $\int (x-1)\operatorname{sen} 2x\,dx$. 57. $\int e^{-2x}\cos 3x\,dx$.

58. $\int x \operatorname{arcctg} x\,dx$. 59. $\int \ln^2 x\,dx$. 60. $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

Capítulo XIV

Integral definida

§ 1. Noción sobre integral definida

Sean $f(x)$ una función continua en un segmento dado $[a, b]$, donde $a < b$ o $a > b$ y $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ (véase el § 1 del cap. XIII), es decir, $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$.

DEFINICIÓN. *Por* ***integral definida***

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

de una función dada $f(x)$ continua en un segmento dado $[a, b]$ se entiende el incremento correspondiente de la primitiva de esta función, es decir

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

(fórmula de Newton — Leibniz).

Además, se considera que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

para toda función $f(x)$ definida en el punto a (a es arbitrario). De este modo, la fórmula (2) es también justa para $a = b$.

En la expresión (1) los números a y b se denominan *límites de integración*, *inferior* y *superior*, respectivamente; $[a, b]$ se llama *intervalo de integración*, y $f(x)$, *función subintegral*. La fórmula (2) puede ser expresada en forma de una **regla**: *la integral definida es igual a la diferencia de los valores que toma la primitiva de la función subintegral en los límites de integración superior e inferior*. Al introducir para la diferencia la notación

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

donde la línea vertical se llama *interpolación*, la fórmula (2) puede ser escrita así

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \tag{3}$$

hace falta recordar que para descifrar la interpolación se pone primeramente el **límite superior** y luego el **inferior**.

EJEMPLO. Calcular la integral de x^2 entre 2 y 4.

Ya que la una de primitivas de x^2 es $\frac{1}{3}x^3$, la fórmula (3) nos da

$$\int_2^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

Notemos que el resultado será el mismo, si se utiliza otra primitiva de x^2, por ejemplo, $\frac{x^3}{3} + 1$ ó $\frac{x^3}{3} - 2$, etc. Este fenómeno es de carácter general.

TEOREMA. *La integral definida de una función continua no depende de la elección de la primitiva para la función subintegral.*

DEMOSTRACION. Sean $F(x)$ y $F_1(x)$ dos primitivas diferentes de la función subintegral $f(x)$ de la integral (1) continua en un intervalo $[a, b]$. En virtud del teorema fundamental para la integral indefinida (§ 1 del cap. XIII) tenemos

$$F_1(x) = F(x) + C,$$

donde C es una magnitud constante. De aquí,

$$F_1(x)\,|_a^b = F_1(b) - F_1(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] =$$
$$= F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b = \int_a^b f(x)\,dx,$$

lo que se debía demostrar.

COROLARIO.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int (f(x)\,dx\,|_a^b, \tag{4}$$

donde se entiende por $\int f(x)\,dx$ *una de las primitivas de la función* $f(x)$.

La fórmula (4) establece la relación entre la integral definida y la integral indefinida correspondiente. Señalemos una diferencia formal que existe entre ellas: la integral definida es un **número**, mientras que la integral indefinida es una **función**.

Según el teorema de Cauchy (véase el § 10 del cap. XIII) toda función continua sobre un segmento posee una primitiva, de donde se deduce el teorema siguiente:

TEOREMA. *Para toda función continua en un segmento* $[a, b]$ *existe una integral definida correspondiente.*

OBSERVACIÓN. Sea $y' = f(x)$, es decir,

$$dy = f(x)\,dx. \tag{5}$$

La integración de la igualdad (5) dentro de los límites de a hasta b nos da

$$y(b) - y(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Esta última fórmula se aplica frecuentemente en la práctica.

El estudio de integrales indefinidas y definidas, así como de sus aplicaciones, es el objeto del *cálculo integral.*

§ 2. Integral definida con su límite superior variable

Sea $f(x)$ una función continua sobre un segmento $[a, b]$. Examinemos la integral

$$\int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

donde $t \in [a, x] \subset [a, b]$ (para evitar toda confusión hemos designado la variable de integración por otra letra).

Si $F(x)$ es una **primitiva** de la función $f(x)$, es decir,

$$F'(x) = f(x),$$

según la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a). \tag{2}$$

De aquí

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x) - [F(a)]' = f(x) - 0 = f(x).$$

Por consiguiente, la derivada de una integral definida con el límite superior variable respecto a este último es igual al valor de la función subintegral para este límite:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{3}$$

De este modo, la integral

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4}$$

es una **primitiva** de la función subintegral $f(x)$. Notemos que de la fórmula (2) se deduce que $\Phi(a) = 0$, es decir, $\Phi(x)$ es **aquella de las primitivas de la función** $f(x)$ **que se anula cuando** $x = a$.

EJEMPLO. Tenemos

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt=\sqrt{1+x^2}.$$

Examinemos ahora una integral definida con el límite inferior variable

$$\int_x^b f(t)\,dt,$$

donde $x\in[a, b]$.

De acuerdo con la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^b f(x)\,dx\right]=\frac{d}{dx}[F(b)-F(x)]=[F(b)]'-F'(x)=-f(x).$$

De este modo, *la derivada de una integral definida con el límite inferior variable respecto a este último es igual al valor de la función subintegral para este límite, tomado con el signo opuesto.*

OBSERVACIÓN. Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces, en virtud de la relación que existe entre la integral indefinida y la función primitiva (§ 1 del cap. XIII), tendremos

$$\int f(x)\;dx = C+\int_a^x f(t)\,dt$$

para $a\leqslant x\leqslant b$, donde C es una constante arbitraria.

§ 3. Interpretación geométrica de la integral definida

Examinemos el área $S(x)$ [1] de un trapecio curvilíneo variable (fig. 130) que está limitado por arriba por una curva continua $Y =$

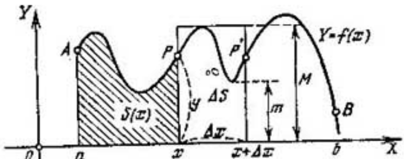

Fig. 130

$= f(X)$ $(a\leqslant X\leqslant b,\ f(X)\geqslant 0)$, por abajo por el eje OX $(Y = 0)$, a la izquierda por una vertical fija $X = a$ y a la derecha por una vertical móvil $X = x$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.

[1]) Sobre la noción de área véase la nota para el teorema del § 9.

Se puede imaginar que una inundación se produce a lo largo del eje OX de tal modo que el frente de agua se desplaza de izquierda a derecha

Consideremos que x obtiene un incremento Δx (para mayor certeza supongamos que $\Delta x > 0$). En este caso el área variará en una magnitud ΔS (fig. 130) que representa el área de la banda limitada por el arco $\widehat{PP'}$ de la curva, el eje OX y dos verticales $X = x$ y $X = x + \Delta x$. Hagamos

$$m = \min_{x \leqslant X \leqslant x+\Delta x} f(X)$$

y

$$M = \max_{x \leqslant X \leqslant x+\Delta x} f(X).$$

Comparando el área ΔS con las áreas de los rectángulos que tienen Δx como base común y m y M como alturas, tendremos

$$m\,\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M\,\Delta x\ ^{1)}, \tag{1}$$

de donde

$$m \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant M. \tag{2}$$

Supongamos ahora que $\Delta x \to +0$. En este caso, en virtud de la continuidad de la función $f(X)$, tenemos

$$m \to f(x) \quad \text{y} \quad M \to f(x), \tag{3}$$

de donde, de acuerdo con el teorema sobre el límite de una varible intermedia (§ 8 del cap. VII), obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Análogamente, para $\Delta x \to -0$ tendremos

$$\lim_{x \to -0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Por consiguiente, existe un límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} = f(x). \tag{4}$$

De este modo, *la derivada del área de un trapecio curvilíneo variable es igual para todo valor del argumento* $X = x$ *a su ordenada de frontera* $y = f(x)$ **(teorema de Newton-Leibniz)**

---

[1]) Aquí la igualdad no se excluye, porque la función $f(X)$ puede ser constante.

Mediante la fórmula (4) obtenemos

$$dS = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Sea S el área total del trapecio curvilíneo (fig. 130) limitada por la curva $Y = f(X)$, el eje OX y dos verticales $X = a$ y $X = b$. Integrando la igualdad (5) dentro de los límites a y b y teniendo en cuenta que $S(a) = 0$, tendremos mediante la fórmula (6) del § 1

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

De este modo, la *integral definida* (6) *de una función continua no negativa es igual, para* $a \leqslant b$, *al área del trapecio curvilíneo correspondiente* [1]) **(interpretación geométrica de la integral definida).**

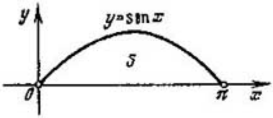

Fig. 131

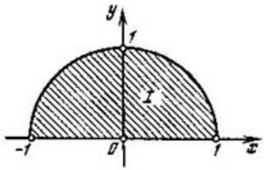

Fig. 132

EJEMPLO 1. Calcular el área S de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ (fig. 131).

Partiendo de la interpretación geométrica de la inegral definida tenemos

$$S = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

(unidades cuadradas correspondientes).

EJEMPLO 2. Aclarar la interpretación geométrica de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \tag{7}$$

y utilizándola, calcular la integral.

Como $y = \sqrt{1-x^2}$ es la ecuación de la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, la integral I representa el área de un semicírculo de radio 1 (fig. 132).

Por eso $I = \pi/2$; este resultado puede ser también obtenido por un cálculo directo de la integral (7).

---

[1]) Para el área del trapecio curvilíneo en el caso de la función $f(x)$ que cambia su signo véase la observación del § 5.

§ 4. Interpretación física de la integral definida

PROBLEMA. Conociendo la velocidad de movimiento rectilíneo $v = v(t)$ de un punto, se pide hallar el camino recorrido por este punto durante un intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant T$.

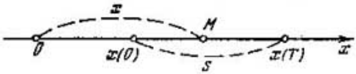

Fig. 133

Suponiendo que la trayectoria del punto es el eje Ox (fig. 133) y $x = x(t)$ es la ecuación del movimiento, tendremos (§ 2 del cap. IX)

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

De aquí

$$dx = v(t)\,dt. \tag{2}$$

Integrando la igualdad (2) dentro de los límites de 0 hasta T, obtendremos el camino recorrido por el punto durante el tiempo T:

$$s = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)\,dt\ ^{1)}. \tag{3}$$

OBSERVACIÓN. De la (3) se deduce la ecuación de movimiento del punto

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt,$$

donde $x_0 = x(0)$.

EJEMPLO. Se considera que un cohete se lanza verticalmente. ¿A qué altura subirá el cohete en 10 s, si su velocidad varía según la ley

$$v = 2 + \frac{1}{(t+1)^2}\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\ ?$$

¿Cuál es la velocidad de vuelo media del cohete durante este intervalo de tiempo?

El camino recorrido por el cohete durante 10 s es igual a

$$s = \int_0^{10} \left[2 + \frac{1}{(t+1)^2}\right] dt = \left(2t - \frac{1}{t+1}\right)\Bigg|_0^{10} = \left(20 - \frac{1}{11}\right) - (0-1) \approx$$

$\approx 21{,}09$ km.

Por eso la velocidad media correspondiente del cohete es igual a

$$v_{\text{med}} = \frac{21{,}09}{10} = 2{,}109 \text{ km/s}.$$

[1]) De un modo más preciso la fórmula (3) da el incremento de la abscisa del punto en movimiento, es decir, *el desplazamiento del punto durante el tiempo T*. El camino recorrido será obtenido en el caso cuando la velocidad $v(t)$ no cambia de signo, es decir, se desplaza siempre en el mismo sentido (véase el § 2 del cap. IX).

§ 5. Propiedades principales de la integral definida

Para establecer las propiedades principales de la integral definida partiremos de la fórmula de Newton — Leibniz (§ 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

donde la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$.

Para más claridad dividamos todas las propiedades de la integral definida en grupos.

A. Propiedades generales.

I. *El valor de la integral definida no depende de la designación de la variable de integración*, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt,$$

donde x, t, son letras cualesquiera.

Esta propiedad se deduce directamente de la fórmula (1).

Se puede establecer la siguiente analogía: los documentos diplomáticos con idéntico contenido escritos en diferentes lenguas son auténticos.

II. *La integral definida que tiene límites de integración idénticos es igual a cero* (en virtud del convenio adoptado).

Notemos que esta proposición corresponde a la fórmula de Newton — Leibniz:

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0.$$

III. *Si se permutan los dos límites de integración de una integral definida, ésta toma el valor opuesto.*

Efectivamente, si permutamos los límites de integración, la fórmula (1) nos da

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

B. Propiedad de aditividad.

IV. *Si el intervalo de integración $[a, b]$ está dividido en un número finito de intervalos parciales, la integral definida tomada sobre el intervalo $[a, b]$ es igual a la suma de integrales definidas tomadas sobre todos los intervalos parciales.*

Efectivamente sea, por ejemplo, $[a, b] = [a, c] \cup [c, b)$, donde $a \leqslant c \leqslant b$. En este caso, considerando que $F'(x) = f(x)$, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] +$$

$$+ [F(b) - F(c)] = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (3) resulta justa también en el caso cuando c se encuentra fuera del segmento $[a, b]$ y la función subintegral $f(x)$ es continua sobre los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$.

C. Propiedades de linealidad.

V. *Se puede sacar un factor constante fuera del signo de la integral definida.*

Efectivamente, sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, y sea A una constante. En este caso, $AF(x)$ es una primitiva de $Af(x)$, porque

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Tenemos

$$\int_a^b Af(x)\,dx = AF(x)\Big|_a^b = AF(b) - AF(a) =$$

$$= A[F(b) - F(a)] = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

VI. *La integral definida de una suma algebraica de un número finito de funciones continuas es igual a la suma algebraica de integrales definidas de estas funciones.*

Efectivamente, examinemos, por ejemplo, la suma algebraica

$$f(x) + g(x) - h(x) \qquad (4)$$

de tres funciones continuas $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, y sean $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, primitivas de estas funciones, es decir,

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x), \quad H'(x) = h(x).$$

En este caso $F(x) + G(x) - H(x)$ es una primitiva de la suma (4), porque

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = f(x) + g(x) - h(x).$$

De aquí tenemos

$$\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx = [F(x)+G(x)-H(x)]|_a^b =$$

$$= [F(b)+G(b)-H(b)]-[F(a)+G(a)-H(a)] =$$
$$= [F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)]-[H(b)-H(a)] =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx.$$

D. Propiedades de monotonía.

VII. *Si la función subintegral de una integral definida es continua no negativa, y el límite de integración superior es mayor o igual al límite inferior, la integral definida es también no negativa.*

Efectivamente, sea $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Puesto que $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, la primitiva $F(x)$ es una función creciente (o más exactamente, una función no decreciente). En tal caso para $b \geqslant a$ tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geqslant 0.$$

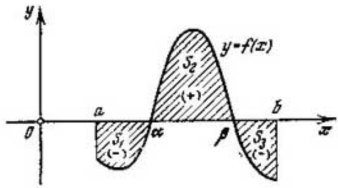

Fig. 134

VIII. *Una desigualdad de funciones continuas puede ser integrada miembro a miembro a condición de que el límite de integración superior sea mayor que el límite inferior.*

Efectivamente, sea $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$. Puesto que $g(x) - f(x) \geqslant 0$, de acuerdo con las propiedades VI y VII para $b > a$ tenemos

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

de aquí,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

OBSERVACIÓN. Sea $f(x)$ una función continua alternativa sobre un segmento $[a, b]$, donde $b > a$. Por ejemplo (fig. 134), $f(x) \leqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant \alpha$, $f(x) > 0$ para $\alpha < x < \beta$ y $f(x) \leqslant 0$ para $\beta \leqslant x \leqslant b$.

Partiendo de la propiedad de aditividad IV, teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la integral (§ 3), tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3 \qquad (5)$$

donde S_1, S_2, S_3 son las áreas de trapecios curvilíneos correspondientes.

De este modo, *para $a < b$, la integral definida representa, en el caso general, la suma algebraica de las áreas de los trapecios curvilíneos correspondientes, donde las áreas de trapecios situados por encima del eje Ox se toman con el signo « + », y las áreas de los trapecios situados por debajo del eje Ox, con el signo «—».*

Si $b < a$, todo es a la inversa.

Notemos que el área de la superficie rayada en la fig. 134 se expresa por la integral

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3 \quad (b > a).$$

§ 6. Teorema del valor medio

TEOREMA *La integral definida de una función continua es igual al producto de la longitud del intervalo de integración por el valor de la función subintegral para un cierto valor intermedio del argumento* [1]).

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente en virtud de la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

donde $F'(x) = f(x)$. Aplicando a la diferencia de las primitivas el teorema del incremento finito de la función (§ 1 del cap. XI), obtendremos

$$F(b) - F(a) = (b - a)\,F'(c) = (b - a)\,f(c),$$

donde $a < c < b$. De aquí,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(c), \qquad (2)$$

donde $a < c < b$.

OBSERVACION. Cuando $f(x) \geqslant 0$ la fórmula (2) puede tener una interpretación geométrica sencilla. Efectivamente, su primer miem-

[1]) Se supone que el límite de integración superior es mayor que el límite inferior.

bro representa el área del trapecio curvilíneo $AabB$, donde AB tiene la ecuación $y = f(x)$, mientras que a y b son las abscisas de los puntos A y B. El segundo miembro de esta fórmula expresa el área de un rectángulo de base $b - a$ y de altura cC igual a $f(c)$ (fig. 135).

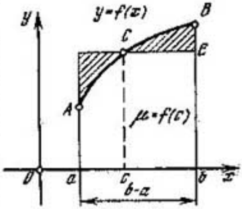

Fig. 135

De este modo, desde el punto de vista geométrico la fórmula (2) significa que se puede siempre hallar sobre el arco AB un punto C de abscisa c comprendido entre a y b tal, que el área del rectángulo correspondiente $aDEb$ de altura cC sea exactamente igual al área del trapecio curvilíneo $aABb$.

Entonces, *el área de un trapecio curvilíneo limitado por una curva continua es igual al área de un rectángulo de la misma «base» y de altura igual a una ordenada media de la línea.*

El número $f(c) = \mu$ se llama *valor medio* de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. De la fórmula (2) se deduce

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3}$$

EJEMPLO 1. La intensidad de una corriente alterna es igual a $i = i_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$, donde $i_0 > 0$ es el valor máximo de la corriente, T es el período y t es el tiempo. Hallar el valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente durante el período T.

De acuerdo con la fórmula (3) tenemos

$$\mu = \overline{i^2} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2\, dt = \frac{i_0^2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi t}{T}\, dt,$$

donde la raya indica una operación de mediación. Como $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, entonces

$$\overline{i^2} = \frac{i_0^2}{2T} \int_0^T \left(1 - \cos \frac{4\pi t}{T}\right) dt = \frac{i_0^2}{2T} \left(t - \frac{T}{4\pi} \operatorname{sen} \frac{4\pi t}{T}\right)\Big|_0^T = \frac{i_0^2}{2}. \tag{4}$$

La raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente se llama *intensidad efectiva de la corriente*, es decir, $i_{ef} = \sqrt{\overline{i^2}}$. De acuerdo con la fórmula (4) obtenemos un resultado importante para la electrotecnia:

$$i_{ef.} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

COROLARIO. Sean $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ y $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ de la fórmula (2) se deduce para $a < b$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{6}$$

EJEMPLO 2. Evaluar la integral $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.

Puesto que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} \leqslant 1$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, en virtud de la fórmula (6) tenemos $\frac{\pi}{4} \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{2}$. Se puede tomar aproximadamente

$$I \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{1}{2}(0{,}79+1{,}57)=1{,}18.$$

El valor exacto de la integral es $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}12$.

§ 7. Integración por partes en la integral definida

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones continuamente derivables [1]) sobre un segmento $[a, b]$.

Tenemos

$$d[u(x)\,v(x)] = v(x)\,du(x) + u(x)\,dv(x).$$

Integrando esta igualdad entre a y b y teniendo en cuenta el hecho de que

$$du(x) = u'(x)\,dx \quad \text{y} \quad dv(x) = v'(x)\,dx,$$

hallamos

$$u(x)\,v(x)\big|_a^b = \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx.$$

De aquí, obtenemos *la fórmula de integración por partes en la integral definida*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{1}$$

Para abreviar la escritura se utiliza

$$u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) = u(x)\,v(x)\big|_a^b.$$

[1]) Es decir, que tienen las derivadas continuas $u'(x)$ y $v'(x)$.

EJEMPLO. Hallar

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx.$$

Suponiendo que $u = x$, $dv = \cos x \, dx = d(\text{sen}\, x)$, obtendremos $du = dx$ $v = \text{sen}\, x$.

Aplicando la fórmula (1) tendremos

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = x \,\text{sen}\, x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen}\, x \, dx =$$

$$= 2\pi \,\text{sen}\, 2\pi - 0 \cdot \text{sen}\, 0 + \cos x \Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 0.$$

§ 8. Cambio de variable en una integral definida

Sea dada una integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad (1)$$

donde $f(x)$ es una función continua en un segmento $[a, b)$. Supongamos que por una razón cualquiera es deseable introducir una nueva variable t ligada con la variable inicial x por la relación

$$x = \varphi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \qquad (2)$$

donde $\varphi(t)$ es una función continuamente derivable en el segmento $[a, b]$. Si en este caso: 1) durante la variación de t desde α hasta β la variable x cambia de a a b, es decir,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \qquad (3)$$

y 2) la función compuesta $f(\varphi(t))$ está definida y es continua en el segmento $[\alpha, \beta]$ [1]), es justa la fórmula

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \qquad (4)$$

Para demostrarlo examinemos la función compuesta

$$F(\varphi(t)),$$

donde $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, es decir

$$F'(x) = f(x).$$

---

[1]) Si los valores de $\varphi(t)$ pertenecen al segmento $[a, b]$, la condición 2. es superflua (véase el teorema 4 sobre la continuidad de una función compuesta (§ 4 del cap. VIII).

Aplicando la regla de diferenciación de una función compuesta obtendremos

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$$

por consiguiente, la función $F(\varphi(t))$ es una primitiva de la función $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

De aquí, en virtud de la fórmula de Newton — Leibniz y teniendo en cuenta la igualdad (3) tendremos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

lo que se debía demostrar.

OBSERVACION. Al calcular una integral definida mediante el cambio de variable, no es necesario volver a la variable inicial, es suficiente introducir los nuevos límites de integración con ayuda de las fórmulas (3).

EJEMPLO. Calcular

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx. \tag{5}$$

Es natural suponer que

$$t = \sqrt{1+x}, \tag{6}$$

de donde $x = t^2 - 1$ y $dx = 2t\,dt$. Los nuevos límites de integración se determinan a partir de la fórmula (6): tomando $x = 0$ tendremos $t = 1$ y considerando que $x = 3$ obtendremos $t = 2$. Por consiguiente,

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx = \int_{1}^{2} (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\int_{1}^{2} (t^4 - t^2)\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2} = 2\left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3}\right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = 7\frac{11}{15}.$$

§ 9. Integral definida como límite de una suma integral

Sea $f(x)$ una función continua sobre un segmento $[a, b]$. Supongamos para fijar la idea que $f(x) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$, donde $a < b$. En este caso su integral definida

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{1}$$

representa geométricamente el área S del trapecio curvilíneo $aABb$ comprendido entre la curva dada $y = f(x)$, el eje Ox $(y = 0)$ y dos verticales $x = a$ y $x = b$ (fig. 136).

Hace más de 2000 años los matemáticos griegos utilizaban para el cálculo aproximado de un área S, el procedimiento siguiente.

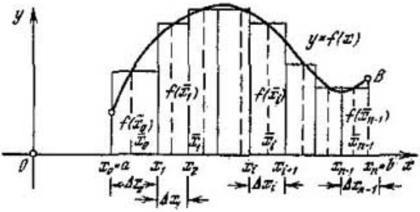

Fig. 136

Una figura S [1]) se divide en un número suficientemente grande de bandas verticales limitadas por perpendiculares al eje Ox trazadas en los puntos

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b \ (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b).$$

Cada una de estas bandas puede ser considerada aproximadamente como un rectángulo de base $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$ y de una altura intermedia $f(\bar{x}_i)$, donde $x_i \leqslant \bar{x}_i \leqslant$ $\leqslant x_{i+1}$. En este caso el área de semejante rectángulo es evidentemente igual a

$$f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

y, por consiguiente, el área de la figura escalonada compuesta de n rectángulos será

$$S_n = f(\bar{x}_0)\,\Delta x_0 + f(\bar{x}_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\bar{x}_{n-1})\,\Delta x_{n-1} \tag{2}$$

o en una forma abreviada

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i, \tag{2'}$$

donde la letra Σ designa el signo de **sumar** y debajo de este signo se escribe el término general (típico) de la suma; además se indica el número de sumandos y se especifica cuáles de ellos componen la suma.

---

[1]) Designamos aquí por la misma letra S el trapecio curvilíneo y su área. La diferencia entre ellos es evidente del contexto.

La (2) ó (2′) se llama *suma integral* para la función $f(x)$ [1]. Puesto que cuando $n \to \infty$ y $\max_i |\Delta x_i| \to 0$ nuestras bandas en el límite se transforman en ordenadas de la gráfica de la función $y = f(x)$, es natural esperar que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Efectivamente es justo el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si una función $f(x)$ es continua sobre un segmento $[a, b]$, el límite de su suma integral S_n cuando $n \to \infty$ y $\max_i |\Delta x_i| \to 0$ es igual a la integral definida correspondiente de esta función*, es decir,

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx^{2)}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Supongamos que $S = \int_a^b f(x)\,dx$. En virtud de la propiedad de aditividad (§ 5 del cap. IV) tenemos

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

De aquí, aplicando el teorema del valor medio (§ 6), tendremos

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{5}$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$ y $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Examinemos la suma integral

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i, \tag{6}$$

donde $\bar{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

---

[1]) La noción de suma integral (2′) se generaliza naturalmente en el caso de una función que cambia el signo.

[2]) En este sentido el signo de integral es una S (signo de suma) estilizada y la designación de toda la integral definida es una notación abreviada de una suma de un número infinitamente grande de términos infinitamente pequeños de tipo $f(x)\,\Delta x = f(x)\,dx$ sobre el segmento $[a, b]$ (de nuestro punto de vista, límite de semejante suma).

Por medio de las fórmulas (5) y (6) obtenemos

$$S-S_n=\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)-f(\bar{x}_i)]\,\Delta x_i, \tag{7}$$

de donde

$$|S-S_n|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)-f(\bar{x}_i)|\,|\Delta x_i|. \tag{8}$$

Si ε es un número positivo arbitrario, entonces para un máx $|\Delta x_i|$ suficientemente pequeño en virtud de la continuidad de la función $f(x)$ están aseguradas las desigualdades

$$|f(\xi_i)-f(\bar{x}_i)|<\varepsilon \tag{9}$$

(propiedades de **continuidad uniforme de la función** $f(x)$, véase, por ejemplo, *S. Nikolski*, Curso de análisis matemático, tomo I, cap. 9). Por eso de las (9) y (8) se deduce:

$$|S-S_n|<\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon\Delta x_i=\varepsilon(b-a), \tag{10}$$

donde $(b-a)$ es la longitud del segmento $[a, b]$.

De la desigualdad (10) por ser ε arbitrario se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S, \tag{11}$$

es decir, la igualdad (3) es justa.

OBSERVACIÓN. Si $y=f(x)\geqslant 0$ en $[a, b]$, **por definición**, el área del trapecio curvilíneo $aABb$ es el número

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n,$$

suponiendo que este límite exista.

COROLARIO. *Si una función $f(x)\geqslant 0$ es continua en un segmento $[a, b]$, el trapecio curvilíneo $\{a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ posee un área finita*, es decir, *es una figura cuadrable.*

§ 10. Noción sobre el cálculo aproximado de integrales definidas

La integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

de una función dada $y=f(x)$, no puede ser siempre calculada de modo preciso. Sin embargo, partiendo de la interpretación geométrica de la integral definida se pueden obtener numerosas fórmulas aproximadas con ayuda de las cuales la integral definida se calcula con la precisión deseable. Examinemos aquí la fórmula más simple, llamada *fórmula de los trapecios.*

Como se sabe (§ 3) la integral (1) es en sí el área (teniendo en cuenta el signo, véase la nota en la pág. 252) del trapecio curvilíneo limitado por la línea $y = f(x)$, el eje Ox y dos ordenadas $x = a$ y $x = b$ (fig. 137).

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales de longitud $h = \frac{b-a}{n}$ *(paso de subdivisión).*

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) las abscisas de los puntos de la división, e $y_0, y_1, \ldots, y_n$, las ordenadas correspondientes de la curva. Tenemos las **fórmulas de cálculo**

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = f(x_i)$$

($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Como resultado de esta construcción nuestro trapecio está dividido en una serie de bandas verticales de igual

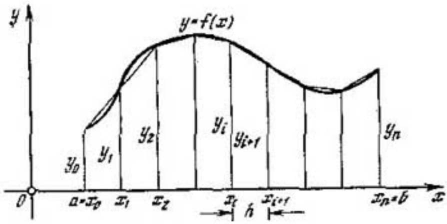

Fig. 137

ancho h, cada una de las cuales puede ser considerada aproximadamente como un trapecio. Al sumar las áreas de estos trapecios tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n),$$

o bien,

$$\int_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \tag{2}$$

(fórmula de los trapecios). La formula (2) puede ser escrita brevemente así

$$\int_a^b y\,dx \approx h \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i y_i, \tag{3}$$

donde $\varepsilon_i = \frac{1}{2}$ para $i=0$ e $i=n$ y $\varepsilon_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

El error

$$R_n = \int_a^b y\,dx - h\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i y_i$$

se llama *término residual* de la fórmula de los trapecios (3). Está demostrado que si la función $y = f(x)$ posee derivada segunda $f''(x)$ continua en el segmento $[a, b]$, entonces

$$|R_n| \leqslant \frac{b-a}{12} M_2 h^2, \quad \text{donde} \quad M_2 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|.$$

EJEMPLO. Calcular aproximadamente $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = I$.

Dividimos el intervalo de integración $[0, 1]$ en diez partes ($n = 10$); por consiguiente, el paso de subdivisión es $h = 0{,}1$.

Las abscisas de los puntos de división x_i ($i = 0, 1, \ldots, 10$) y las ordenadas correspondientes $y_i = \sqrt{1+x_i^2}$ calculadas con ayuda de la tabla de raíces cuadradas se dan en la tabla que sigue. Para comodidad de cálculos las ordenadas y_i están multiplicadas por un factor ε_i tal, que $\varepsilon_i = \frac{1}{2}$ para $i = 0$ e $i = 10$ (señaladas por un asterisco) y $\varepsilon_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, 9$.

i	x_i	$\varepsilon_i y_i$
0	0,0	0,5000 *
1	0,1	1,0050
2	0,2	1,0198
3	0,3	1,0440
4	0,4	1,0770
5	0,5	1,1180
6	0,6	1,1662
7	0,7	1,2207
8	0,8	1,2806
9	0,9	1,3454
10	1,0	0,7071 *
$\sum$		11,4838

Aplicando la fórmula (3) se obtiene $I \approx 0{,}1 \cdot 11{,}4838 \approx 1{,}148$. El valor exacto de la integral es

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1{,}1479.$$

§ 11. Fórmula de Simpson

Obtenemos una fórmula más exacta, si consideraremos parabólico el perfil de la banda curvilínea.

Examinemos una banda vertical (fig. 138) limitada por la curva continua $y = f(x)$, el eje Ox ($y = 0$) y dos verticales $x = -h$ y $x = h$.

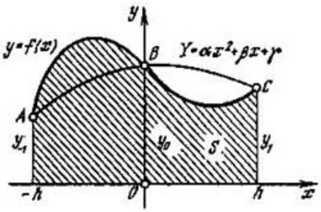

Fig. 138

Si h es pequeño, la curva $y = f(x)$ puede ser aproximadamente reemplazada por una parábola

$$Y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (1)$$

que pasa por los puntos $A(-h, y_{-1})$, $B(0, y_0)$ y $C(h, y_1)$. En este caso

$$\int_{-h}^{h} y\,dx = I$$

será aproximadamente igual a

$$\int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx = \left(\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{2\alpha}{3} h^3 + 2\gamma h. \qquad (2)$$

Considerando en la fórmula (1) sucesivamente que $x = -h$, 0, h, obtenemos

$$y_{-1} = \alpha h^2 - \beta h + \gamma, \quad y_0 = \gamma, \quad y_1 = \alpha h^2 + \beta h + \gamma, \qquad (3)$$

de donde

$$\gamma = y_0, \quad \alpha = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{2h^2}. \qquad (4)$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (2) tendremos

$$\int_{-h}^{h} y\,dx \approx \frac{1}{3} h (y_{-1} - 2y_0 + y_1) + 2y_0 h = \frac{h}{3} (y_{-1} + 4y_0 + y_1) \qquad (5)$$

(fórmula de Simpson).

EJEMPLO. Calcular con ayuda de la fórmula de Simpson

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx.$$

Suponiendo que $h=\frac{\pi}{2}$, tenemos $y_{-1}=0$, $y_0=1$, $y_1=0$. Por consiguiente,

$$I\approx\frac{\pi}{6}(0+4+0)=\frac{2}{3}\pi\approx 2{,}07$$

(el valor exacto es $I=2$).

Utilizando una traslación paralela del sistema de ejes de coordenadas se puede escribir la fórmula de Simpson así

$$\int_a^b y\,dx=\frac{h}{3}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right], \qquad (5')$$

donde $h=\frac{b-a}{2}$.

OBSERVACIÓN. Para aumentar la precisión de cálculo de una integral definida $\int_a^b y\,dx$ se divide el intervalo $[a, b]$ en n intervalos parciales, donde n es un número natural suficientemente grande y a cada uno de ellos se aplica la fórmula de Simpson (5′) considerando que $h=\frac{b-a}{2n}$. En virtud de la propiedad de aditividad la integral definida dada representará aproximadamente la suma de resultados así obtenidos (*fórmula parabólica*).

§ 12. Integrales impropias

Por definición de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

se supone que: 1) el intervalo de integración $[a, b]$ es finito y 2) la función subintegral $f(x)$ está definida y continua en el segmento $[a, b]$. Semejante integral definida se llama *propia* (la palabra «propia» generalmente se omite). Si una de las condiciones 1) ó 2) no se cumple, llamaremos a la expresión (1) *integral definida impropia*. Aclaremos el sentido de esta nueva noción para dos casos muy simples.

1. Sea $f(x)$ una función continua para $a\leqslant x<+\infty$. En este caso según la definición se supone que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Si el límite (2) existe, *la integral impropia que tiene límite de integración infinito*, dispuesto en el primer miembro de la igualdad (2), *es* *convergente* y su valor se determina mediante la fórmula (2); en caso contrario la igualdad (2) pierde su sentido, dicen que la integral impropia en el primer miembro *es divergente* y no le atribuye algún valor numérico.

Geométricamente para una función $f(x)$ no negativa sobre $[a, \infty]$ la integral impropia (2) representa el área de una figura curvilínea limitada por la línea dada $y = f(x)$, el eje Ox y por la vertical $x = a$ (fig. 139).

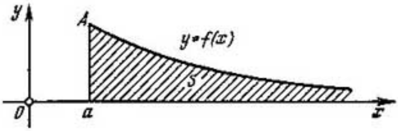

Fig. 139

Sea $F(x)$ una primitiva de la función subintegral $f(x)$. De acuerdo con la fórmula (2) tenemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(a)].$$

Si se introduce la notación condicional

$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b),$$

se obtiene para una integral impropia convergente con límite superior infinito *la fórmula de Newton — Leibniz generalizada*:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a), \tag{3}$$

donde $F'(x) = f(x)$.

EJEMPLO 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

II. Sea $f(x)$ una función continua para $a \leqslant x < b$ y discontinua en el punto $x = b$. La *integral impropia* correspondiente *de la función discontinua* se define en este caso por la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{4}$$

y se llama *convergente* o *divergente* en dependencia de que exista o no el límite en el segundo miembro de la igualdad (4).

Si existe una función $F(x)$ continua en el segmeto $[a, b]$ y tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para} \quad a \leqslant x < b$$

(*primitiva generalizada*), para la integral impropia (4) se verifica la **formula de Newton — Leibniz generalizada:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

EJEMPLO 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2.$$

EJERCICIOS

1. Calcular la integral definida $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$ y dar su interpretación geométrica.

Calcular las integrales definidas:

2. $\int\limits_0^1 x^4\,dx$. 3. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$. 4. $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5. $I = \int\limits_x^y e^{t^2}\,dt$. Hallar: a) $\frac{dI}{dy}$; b) $\frac{dI}{dx}$.

6. Calcular el valor medio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ sobre el segmento $[1; 9]$.

7. Aplicando el procedimiento de integración por partes, calcular las integrales:

a) $\int\limits_0^{2\pi} x \operatorname{sen} 2x\,dx$; b) $\int\limits_0^1 (x-1)\,e^{-x}\,dx$.

8. Al efectuar el cambio de variable indicado, calcular las integrales definidas siguientes:

a) $\int\limits_0^4 \sqrt{4-x^2}\,dx$, $x = 2\operatorname{sen} t$; b) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, $x = t^2$.

9. Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ a) mediante la fórmula de trapecios; b) mediante la fórmula de Simpson dividiendo el intervalo $[0; 1]$ en $n = 10$ partes iguales. Comparar los resultados obtenidos con el valor exacto igual a $\ln 2 \approx 0,69315$.

10. Calcular las integrales impropias siguientes:

$$\text{a)} \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx; \quad \text{b)} \int_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{c)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Capítulo XV

Aplicaciones de la integral definida

§ 1. Area en coordenadas rectangulares

PROBLEMA 1. Calcular el área S de un trapecio curvilíneo $aABb$ acotado por una línea continua dada $y = f(x)$, el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ del eje Ox y por dos verticales $x = a$ y $x = b$, si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 140).

En virtud de la interpretación geométrica de la integral definida tenemos

$$S = \int_a^b y\, dx, \qquad (1)$$

donde $y = f(x)$ es la función dada.

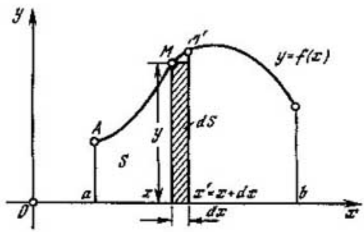

Fig. 140

OBSERVACION. La fórmula (1) puede ser fundamentada de otro modo. Consideremos el área S como una magnitud variable formada por el desplazamiento de la ordenada corriente $xM = y$ de su posición inicial aA a su posición final bB. Dando a la abscisa corriente x un incremento $\Delta x = dx$ obtendremos un **incremento de área** ΔS que representa el área de la banda vertical $xMM'x'$ (fig. 140), encerrada entre las ordenadas x y $x' = x + dx$. La **diferencial del área** dS es la parte lineal principal del incremento ΔS cuando $\Delta x \to 0$ y es evidentemente igual al área del rectángulo de base dx y de altura y [1]; por eso

$$dS = y\, dx \qquad (2)$$

(*elemento del área en coordenadas rectangulares*). Integrando la igualdad (2) dentro de los límites de $x = a$ hasta $x = b$ tendremos la fórmula (1):

$$S = \int_a^b y\, dx.$$

[1]) Se puede demostrar rigurosamente que para una función continua $y = f(x)$ el área $y\, dx$ del rectángulo se diferencia del área de la banda ΔS en un infinitésimo de un orden superior a dx.

El ejemplo que acabamos de examinar ilustra la aplicación del **método de la diferencial** cuya esencia consiste en que, partiendo de razones simples, se determina primeramente la diferencial de la magnitud buscada y luego, después de la integración entre los límites correspondientes, se halla el valor de la propia magnitud buscada. Este método se examina más detalladamente en la teoría de ecuaciones diferenciales (cap. XXII).

En los párrafos que siguen conoceremos con ayuda de unos ejemplos concretos dos métodos principales que se utilizan en la teoría de la integral definida: 1) el método de sumas de integración (véase el § 9 del cap. XIV) y 2) el método de la diferencial.

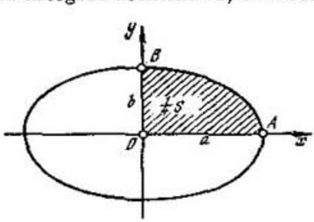

Fig. 141

EJEMPLO 1. Calcular el área S de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

En vista de la simetría se puede calcular el área S de una cuarta parte de la elipse (fig. 141).

De la ecuación de la elipse para el primer cuadrante deducimos

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

de donde, por medio de la fórmula (1), obtenemos

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a y\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Efectuemos la sustitución trigonométrica $x=a\operatorname{sen} t$, $dx=a\cos t\,dt$. Los nuevos límites de integración $t=\alpha$ y $t=\beta$ se determinan a partir de las ecuaciones $0=a\operatorname{sen} t$, $a=a\operatorname{sen} t$. Se puede considerar que $\alpha=0$ y $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Por consiguiente,

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}ab$$

y

$$S=\pi ab.$$

En particular, suponiendo que $a=b$ obtendremos el área del círculo de radio a, $S=\pi a^2$.

OBSERVACIÓN En casos más complicados tratan de representar la figura en forma de una suma o de una diferencia de trapecios curvilíneos.

PROBLEMA 2. Calcular el área de la superficie plana acotada por dos líneas continuas:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x) \quad (y_2 \geqslant y_1)$$

y por dos verticales $x = a$ y $x = b$ (fig. 142).

Supondremos que las funciones $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ son no negativas sobre un segmento $[a, b]$. Esto puede ser siempre alcanzado mediante una traslación paralela del eje Ox.

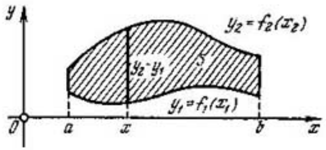

Fig. 142

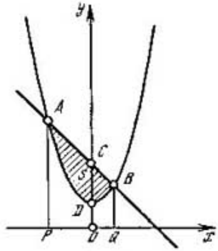

Fig. 143

El área buscada S puede ser considerada como una diferencia de áreas de dos trapecios curvilíneos limitados por las líneas dadas. Por eso

$$S = \int_a^b y_2\, dx - \int_a^b y_1\, dx$$

y, por consiguiente,

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx, \tag{3}$$

donde $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ son las funciones dadas. Notemos que

$$y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$$

representa el «espesor» del área S en el punto x.

EJEMPLO 2. Calcular el área S limitada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $x + y = 3$ (fig. 143).

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la parábola y de la recta:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + 1, \\ x + y &= 3, \end{aligned}\right\}$$

hallamos las abscisas de puntos de intersección: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Suponiendo que $y_2 = 3 - x$ e $y_1 = x^2 + 1$ obtenemos por medio de la fórmula (3)

$$S = \int_{-2}^{1} [(3-x)-(x^2+1)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2-x-x^2)\, dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = 2\,(1+2) - \frac{1}{2}\,(1-4) - \frac{1}{3}\,(1+8) =$$

$$= 6 + \frac{3}{2} - 3 = 4\,\frac{1}{2}\,.$$

La fórmula (1) permite también calcular las áreas de figuras simples en el caso cuando las curvas que las limitan están dadas en forma paramétrica.

EJEMPLO 3 Calcular el área S limitada por el primer arco de cicloide

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a\,(1 - \cos t) \tag{4}$$

y por el eje Ox (fig. 47 del § 4 del cap. V).

Tenemos

$$S = \int_{0}^{2\pi a} y\, dx.$$

Efectuemos en esta integral el cambio de variables al tomar por la variable independiente el parámetro t. De la ecuación (4) obtendremos

$$dx = a\,(1 - \cos t)\, dt,$$

sabiendo que $t = 0$ cuando $x = 0$ y $t = 2\pi$ cuando $x = 2\pi a$. Por consiguiente

$$S = \int_{0}^{2} a\,(1-\cos t)\cdot a\,(1-\cos t)\, dt =$$

$$= a^2 \int_{0}^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt = a^2 \left[(t - 2\operatorname{sen} t)\Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt\right] =$$

$$= a^2 \left[2\pi + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_{0}^{2\pi}\right] = a^2\,(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

De este modo, obtenemos el **teorema de Galileo**: *el área, limitada por un arco de cicloide y su cuerda, es igual al triple del área del círculo generatriz.*

§ 2. El área en coordenadas polares

PROBLEMA. Calcular el área S del sector OAB limitado por una línea continua dada

$$\rho = f\,(\varphi)$$

y dos rayos $\varphi = \alpha$ y $\varphi = \beta$, donde ρ y φ son coordenadas polares (fig. 144).

Para resolver el problema utilicemos el **método de la diferencial.**

Imaginemos que el área S está formada gracias al desplazamiento del radio polar variable $\rho = f(\varphi)$ cuando el ángulo φ ha variado de $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$ (fig. 144). Si el ángulo polar corriente φ obtiene un incremento $d\varphi$, el incremento del área $\Delta S =$ área OMM'. La diferen-

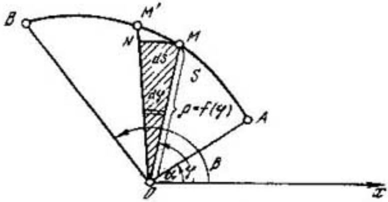

Fig. 144

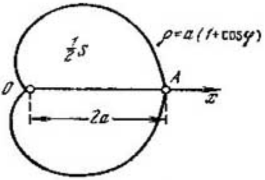

Fig. 145

cial dS representa la parte lineal principal del incremento ΔS cuando $d\varphi \to 0$ y es igual al área del sector circular OMN de radio ρ y de ángulo de centro $d\varphi$ [1]); por eso

$$dS = \frac{1}{2}\widehat{MN}\cdot OM = \frac{1}{2}\rho d\varphi \cdot \rho = \frac{1}{2}\rho^2\, d\varphi \tag{1}$$

(*elemento del área en coordenadas polares*). La integración de la igualdad (1) dentro de los límites de $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$ nos dará el área buscada

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\varphi,$$

donde $\rho = f(\varphi)$ es la función dada.

EJEMPLO. Hallar el área limitada por la cardioide

$$\rho = a(1 + \cos\varphi).$$

Componiendo la tabla de valores, obtendremos:

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2}{3}\pi$	$\pm\frac{5}{6}\pi$	$\pm\pi$
ρ	$2a$	$\approx 1,9$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{a}{2}$	$\approx 0,1\, a$	0

Al construir los puntos de cardioide de acuerdo con los valores de φ y ρ, tomados en nuestra tabla, se puede hacer una idea aproximada acerca de la forma de esta curva (fig. 145).

[1]) Efectivamente, por analogía con la significación física de la diferencial (§ 4 del cap. XII) la diferencial del área dS es igual al incremento ficticio del área S durante el giro del radio polar ρ en un ángulo $d\varphi$ sin cambiar la longitud del radio, de donde está claro que dS es el área del sector circular de radio ρ y del ángulo central $d\varphi$.

Puesto que la cardioide es evidentemente simétrica respecto al eje polar, es suficiente calcular el área de su mitad superior y luego duplicarla. Designando por S toda el área limitada por la cardioide tendremos

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2\,d\varphi.$$

De aquí,

$$S=\int_0^{\pi}\rho^2\,d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\int_0^{\pi}d\varphi+2\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi+\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right),$$

o, ya que

$$\int_0^{\pi}d\varphi=\pi,\qquad \int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi=\operatorname{sen}\varphi\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

finalmente

$$S=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

§ 3. Longitud del arco en coordenadas rectangulares

DEFINICIÓN. *Llámase longitud de un arco AB al límite hacia el cual tiende la longitud de la línea quebrada inscrita en este arco cuando el número de lados de la quebrada aumenta indefinidamente y la longitud del lado más grande tiende a cero.*

Digamos que una curva es *suave*, si ésta es continua y en cada punto tiene una tangente que cambia continuamente su posición de un punto a otro. Es evidente que una curva es suave, si su ecuación puede ser escrita así

$$y=f(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b),\tag{1}$$

donde la función $f(x)$ es continua y posee una derivada $f'(x)$ continua en el segmento $[a, b]$ dado.

TEOREMA. *Toda curva suave (1) posee un arco de longitud finita determinada.*

DEMOSTRACIÓN. Inscribamos en la curva suave dada (1) una línea quebrada $M_0M_1M_2\ldots M_n$ (fig. 146), donde $M_0=A(a, f(a))$ y $M_n=B(b, f(b))$. Proyectando los lados $\overline{M_{i-1}M_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ de la quebrada sobre el eje Ox obtendremos la subdivisión del segmento $[a, b]$ en un sistema de segmentos Δx_i. Sea Δy_i un incremento de la función dada $y = f(x)$ sobre el segmento Δx_i (fig. 146). Según el teorema de Pitágoras tenemos

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Aplicando el teorema de Lagrange sobre el incremento finito de una función (§ 1 del cap. XI) obtendremos $\Delta y_i = \Delta x_i f'(\bar{x}_i)$, donde $\bar{x}_i$ es

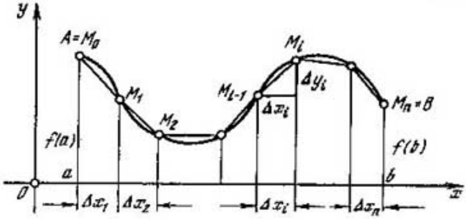

Fig. 146

un punto intermediario del segmento Δx_i [1]. De aquí

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)}\, \Delta x_i.$$

y, por consiguiente, la longitud de toda la quebrada $M_0 M_1 \ldots M_n$ (es decir, su perímetro) es igual a

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)}\, \Delta x_i.$$

Para hallar la longitud l de la curva (1) hace falta pasar al límite en la última expresión suponiendo que $n \to \infty$ y máx $\Delta x_i \to 0$. De este modo

$$l = \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\bar{x}_i)}\, \Delta x_i.$$

Acabamos de obtener el límite de la suma integral para la función continua

$$F(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

(véase el § 9 del cap. XIV). Por eso $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$ o

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{2}$$

donde $y' = f'(x)$.

[1] Geométricamente $\bar{x}_i$ es el punto del segmento Δx_i en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ es paralela a su cuerda $\overline{M_{i-1}M_i}$.

Diferencial del arco en coordenadas rectangulares. Sean $A\ (a, h)$ un punto fijo y $M\ (x, y)$ un punto variable de una curva (fig. 147). La longitud del arco $l = AM$ es en este caso función de la variable x.

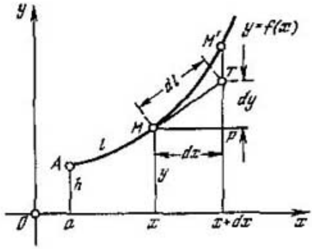

Fig. 147

Según la fórmula (2) tenemos

$$l = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Utilizando el teorema relacionado a la derivada de una integral definida que tiene el límite superior variable (§ 2 del cap. XIV), obtendremos

$$l' = \sqrt{1+y'^2}$$

y, por consiguiente,

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Esto es efectivamente *la fórmula de la diferencial del arco en coordenadas rectangulares*

Puesto que

$$y' = \frac{dy}{dx}, \text{ entonces}$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{3}$$

Es interesante notar que la última fórmula es el teorema de Pitágoras para un triángulo infinitamente pequeño MTP (fig. 147).

EJEMPLO 1. Calculemos la longitud del arco de un segmento de *catenaria*. Se llama así la línea cuya forma toma un hilo pesado atado en dos puntos.

La ecuación de esta línea en un sistema de coordenadas adecuadamente elegido es ésta:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right), \tag{4}$$

donde a es un número positivo (*parámetro de la catenaria*).

La ecuación (4) puede ser escrita más sencillamente

$$y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}, \tag{4'}$$

donde ch es el coseno hiperbólico (véase el § 9 del cap. X).

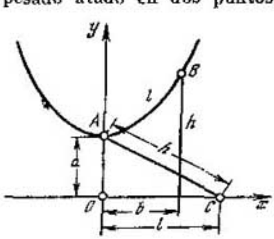

Fig. 148

El punto $A\ (0, a)$ que es el punto más bajo de la curva (4) (fig. 148) se llama *vértice* de la catenaria.

Calculemos la longitud del arco AB de la catenaria suponiendo que la abscisa del punto B es igual a b y su ordenada es igual a h. Derivando la ecuación

(4') tendremos

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a} .$$

Luego deducimos

$$1 + y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} .$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

de donde, de acuerdo con la fórmula (2), obtendremos

$$\widehat{AB} = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, d\left(\frac{x}{a}\right) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a\left(\operatorname{sh} \frac{b}{a} - \operatorname{sh} 0\right) = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}$$

(véase la fórmula XIV del § 3 del cap. XIII).

La fórmula para la longitud del arco AB resulta más sencilla si su segundo miembro se expresa en función de la ordenada h del punto B. Efectivamente, es evidente que

$$h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a} .$$

En virtud de la identidad $\operatorname{sh}^2 \frac{b}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1$ tenemos

$$\widehat{AB} = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = \sqrt{h^2 - a^2},$$

es decir, el arco AB es igual al cateto OC del triángulo rectangular OAC (fig. 148) cuya hipotenusa es $AC = h$ y el otro cateto es $OA = a$.

OBSERVACIÓN. Sea necesario calcular la longitud l del arco de una curva dada paramétricamente:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad [t_0 \leqslant t \leqslant T],$$

donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuamente derivables en el segmento $[t_0, T]$. Se puede demostrar que la fórmula (3) para la diferencial del arco dl es en este caso igualmente justa. Como $dx = x'dt$, $dy = y'dt$, tenemos

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Integrando la última expresión entre $t = t_0$ y $t = T$, obtendremos la longitud del arco

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

EJEMPLO 2. Calcular la longitud del arco de una circunferencia

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t$$

de $t = 0$ hasta $t = T$.

Aquí $dx = -a \operatorname{sen} t\, dt$, $dy = a \cos t\, dt$, por eso

$$dl = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = a\, dt$$

y, por consiguiente,

$$l = \int_0^T a\, dt = aT.$$

EJEMPLO 3. Calcular la longitud del arco de la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

(fig. 149). La ecuación de la astroide puede ser escrita de forma

$$(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = (a^{1/3})^2.$$

Es natural introducir el parámetro t considerando que $x^{1/3} = a^{1/3} \cos t, y^{1/3} = a^{1/3} \operatorname{sen} t$, de donde obtenemos *la ecuación de astroide en forma paramétrica*

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \operatorname{sen}^3 t \tag{6}$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

La curva (6) es simétrica, por eso es suficiente hallar una cuarta parte del arco l correspondiente a la variación del parámetro t de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Tenemos

$$dx = -3a \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt,$$
$$dy = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt,$$

de donde,

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt.$$

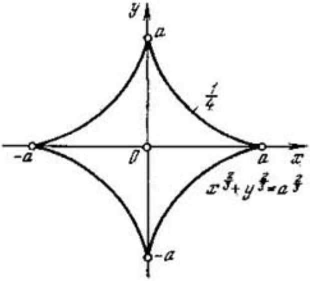

Fig. 149

Integrando esta expresión entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$ obtendremos

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\pi/2} 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt =$$
$$= \frac{3a}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{4}(1+1) = \frac{3}{2}a.$$

Por consiguiente, toda la longitud del arco de astroide es igual a $l = \frac{3}{2}a \cdot 4 = 6a$.

§ 4. Longitud del arco en coordenadas polares

Deduzcamos primeramente la diferencial dl del arco en coordenadas polares. Según la fórmula (3) del § 3 tenemos

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

donde x e y son coordenadas cartesianas rectangulares de un punto del arco.

Como se sabe, las fórmulas de paso de las coordenadas polares ρ y φ a las coordenadas rectangulares x e y son siguientes:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

De aquí,

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi, \quad dy = \operatorname{sen} \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi.$$

Al elevar al cuadrado obtendremos

$$(dx)^2 = \cos^2 \varphi (d\rho)^2 - 2\rho \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\varphi + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (d\varphi)^2,$$
$$(dy)^2 = \operatorname{sen}^2 \varphi (d\rho)^2 + 2\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\rho \, d\varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi (d\varphi)^2.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades tendremos

$$(dl)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2.$$

Por consiguiente,

$$dl = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2}.$$

Esta última fórmula se puede expresar de la forma siguiente:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi, \qquad (1)$$

donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

PROBLEMA. Calcular la longitud l del arco de una curva continuamente derivable

$$\rho = f(\varphi)$$

entre los puntos $A(\alpha, f(\alpha))$ y $B(\beta, f(\beta))$, donde ρ y φ son las coordenadas polares (fig. 150). Integrando la igualdad (1) dentro de los límites de $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$, obtendremos la longitud *del arco en coordenadas polares*

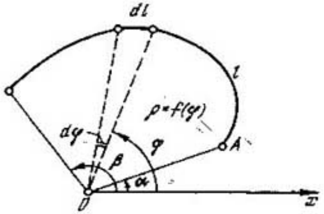

Fig. 150

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi,$$

donde $\rho = f(\varphi)$ es la función dada y $\rho' = f'(\varphi)$ es su derivada.

EJEMPLO. Calculemos la longitud total del arco de cardioide (fig. 145)

$$\rho = a(1 + \cos \varphi).$$

Tenemos $\rho' = -a \operatorname{sen} \varphi$. Por eso

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2 (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) =$$
$$= a^2 (2 + 2 \cos \varphi) = 2a^2 (1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

y, por consiguiente,

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| .$$

Designando por $\frac{1}{2}l$ la longitud del arco de la parte superior de la cardioide obtendremos

$$\frac{1}{2}l=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a\left(\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=4a.$$

Las partes superior e inferior de la cardioide son simétricas y por eso su longitud total es $l=8a$.

§ 5. Cálculo del volumen de un cuerpo según las secciones transversales conocidas

PROBLEMA. Conociendo la ley de variación del área de la sección transversal de un cuerpo se pide hallar el volumen V de este cuerpo (fig. 151).

Sean Ox una dirección elegida y

$$S=S(x)$$

el área de la sección transversal por un plano perpendicular al eje Ox en un punto de la abscisa x. Supondremos que la función $S(x)$ es conocida y continuamente variable cuando x varía. Además, supondremos que el contorno es, en cierto sentido, también «continuamente» variable.

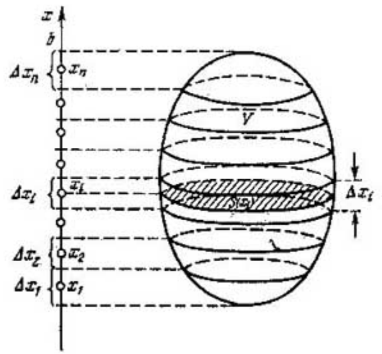

Fig. 151

Proyectando el cuerpo sobre el eje Ox obtendremos un segmento $[a, b]$ que nos da la dimensión lineal del cuerpo en la dirección del eje Ox.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en un gran número de pequeños segmentos Δx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y tracemos por los puntos de división planos perpendiculares al eje Ox. Resulta que el cuerpo queda partido en n capas, cada una de las cuales puede ser considerada aproximadamente igual a $S(x_i)\,\Delta x_i$, donde x_i es un punto del segmento Δx_i (véase la fig. 151), obtendremos para el volumen V del cuerpo la expresión siguiente

$$V\approx\sum_{i=0}^{n}S(x_i)\,\Delta x_i. \tag{1}$$

Si $n \to \infty$ y máx $|\Delta x_i| \to 0$ la igualdad aproximada (1) se hace más exacta y en el límite obtendremos

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i.$$

La suma (1) es una suma integral para la función continua $S(x)$ y su límite es una integral definida correspondiente (§ 9 del cap. XIV). Por eso

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Hallar el volumen V de la pirámide de base B y de altura H (fig. 152).

Tomemos como eje Ox la recta que pasa por el vértice O de la pirámide perpendicular a su base y dirigida desde el vértice hacia la base.

Sea S el área de la sección de la pirámide por un plano dispuesto a una distancia x del vértice. Puesto que las áreas de secciones paralelas de la pirámide se relacionan como los cuadrados de sus distancias al vértice, es decir, $\frac{S}{B} = \frac{x^2}{H^2}$, entonces $S = \frac{B}{H^2}x^2$. Aplicando la fórmula (2) del párrafo precedente obtenemos

$$V = \int_0^H S\,dx = \frac{B}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{B}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}BH,$$

lo que coincide con la conocida fórmula de geometría.

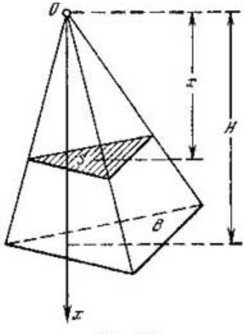

Fig. 152

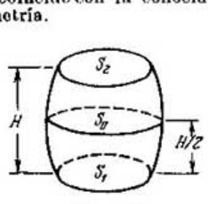

Fig. 153

EJEMPLO 2. Sean (fig. 153) S_1 y S_2 las áreas de las secciones inferior y superior de un cuerpo en forma de tonel y S_0 el área de su sección media. En este caso, aplicando la fórmula de Simpson (§ 11 del cap. IX) a la integral (2) obtendremos

$$V = \int_0^H S(x)\,dx = \frac{H}{6}(S_1 + S_2 + 4S_0),$$

donde H es la altura del cuerpo (*fórmula de Simpson para los volúmenes*).

§ 6. Volumen del cuerpo de revolución

PROBLEMA. Calcular el volumen V_x de un cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Ox de un trapecio curvilíneo $aABb$ limitado por una curva continua dada

$$y = f(x) \quad (f(x) \geqslant 0),$$

un segmento $a \leqslant x \leqslant b$ del Ox y por dos verticales $x = a$ y $x = b$ (fig. 154).

Este problema es un caso particular del problema examinado en el párrafo precedente.

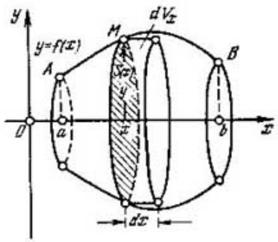

Fig. 154

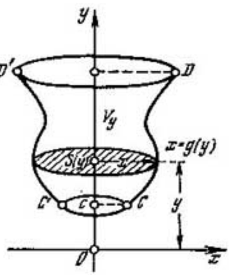

Fig. 155

Aquí el área de la sección variable $S = S(x)$ correspondiente a la abscisa x es un círculo de radio y, por eso $S(x) = \pi y^2$, de donde, en virtud de la fórmula (2) del § 5, tenemos

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx, \tag{1}$$

donde $y = f(x)$ es la función dada.

La fórmula (1) puede ser también obtenida directamente por el método de la diferencial. *El elemento de volumen* dV_x es evidentemente un cilindro de base S y de altura dx[1]. Por consiguiente,

$$dV_x = \pi y^2 dx.$$

De aquí, integrando desde $x = a$ hasta $x = b$ obtendremos la fórmula (1).

OBSERVACION. Sea un trapecio curvilíneo $cCDd$, limitado por una línea continua unívoca $x = g(y)$, un segmento $c \leqslant y \leqslant d$ del eje Oy y por dos paralelas $y = c$ e $y = d$, que gira alrededor del eje Oy (fig. 155). En este caso, por analogía con la fórmula (1), el volu-

[1] En otras palabras dV_x es la parte lineal principal del incremento del volumen variable V_x cuando la sección $S(x)$ se desplaza en una magnitud infinitamente pequeña dx.

men V_y del cuerpo de revolución es igual a

$$V_y = \pi \int_c^b x^2 dy, \tag{2}$$

donde $x = g(y) \geqslant 0$ es la función dada.

EJEMPLO. Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la superficie obtenida por la revolución de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

alrededor de su eje mayor a (eje Ox) (fig. 156).

Como la elipse (3) es simétrica respecto a los ejes de coordenadas, es suficiente hallar el volumen formado por la rotación alrededor del eje OX del área OAB igual a una cuarta parte del área de la elipse (fig. 156) y duplicar el resultado obtenido.

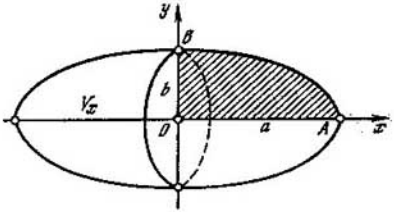

Fig. 156

Designemos el volumen del cuerpo de revolución por V_x; entonces, en virtud de la fórmula (1), tenemos

$$\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a y^2 \, dx,$$

donde 0 y a son las abscisas de los puntos B y A. Mediante la ecuación de la elipse hallamos $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. De aquí

$$\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a x^2 \, dx =$$

$$= \pi b^2 \cdot x \Big|_0^a - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \pi a b^2 - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} \pi a b^2.$$

Por consiguiente, tenemos definitivamente

$$V_x = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

De un modo análogo cuando la elipse (3) gira alrededor del eje menor b el volumen del cuerpo de revolución correspondiente es igual a

$$V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Considerando que $a = b$ obtendremos el volumen de la esfera de radio a:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

§ 7. Trabajo de una fuerza variable

PROBLEMA Calcular el trabajo A de una fuerza variable continua $F(x)$ aplicada a un punto material M cuando éste se desplaza a lo largo del eje Ox de la posición $x = a$ a la posición $x = b$, suponiendo que el sentido de la fuerza coincide con el del desplazamiento.

Supongamos que el punto M se ha desplazado de la posición x a la $x + dx$ (fig. 157). Sobre un intervalo infinitamente pequeño

Fig. 157

$[x, x + dx]$ de la longitud dx la fuerza $F(x)$ **puede ser considerada como constante.** Por eso el trabajo elemental de esta fuerza es igual a

$$dA = F(x)\,dx. \tag{1}$$

Integrando la expresión (1) desde $x = a$ hasta $x = b$ obtendremos el trabajo total

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \tag{2}$$

EJEMPLO ¿Qué trabajo hace falta aplicar a un resorte para alargarlo en 5 cm, si una fuerza de 100 N estira el resorte en 1 cm?

Según la ley de Hooke la fuerza elástica F que actúa sobre el resorte crece proporcionalmente al alargamiento x del resorte, es decir,

$$F = kx.$$

Aquí el desplazamiento x está expresado en metros y la fuerza F en newtones. Para determinar el coeficiente de proporcionalidad k consideramos, según los datos del problema, que $F = 100$ N para $x = 0{,}01$ m, de donde $100 = k \cdot 0{,}01$, es decir, $k = 10\,000$ y, por consiguiente, $F = 10\,000\,x$. En virtud de la fórmula (2) el trabajo buscado es igual a

$$A = \int_0^{0,05} 10\,000x\,dx = 5\,000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12{,}5\text{J}.$$

§ 8. Otras aplicaciones físicas de la integral definida

Para ilustrar los métodos principales: 1) el método de la diferencial y 2) el método de sumas integrales en la teoría de la integral definida, examinemos unos ejemplos.

EJEMPLO 1. La concentración de una sustancia (g/m³) varía en el agua según la ley

$$C = \frac{10x}{x+1} \tag{1}$$

(x es la profundidad de la capa).

¿Qué cantidad de sustancia Q contiene una columna de agua vertical cuya sección transversal $S = 1$ m^2 y la profundidad varía de 0 a 200 m?

Examinemos una capa infinitamente pequeña de la columna de agua de sección S y de espesor dx situada a la profundidad x (fig. 158).

La cantidad de sustancia que contiene esta capa es igual a

$$dQ = C \cdot S\,dx = \frac{10x}{x+1}\,dx. \qquad (2)$$

Integrando esta expresión dentro de los límites de 0 hasta 200 obtendremos

$$Q = 10\int_0^{200} \frac{x\,dx}{x+1} = 10\int_0^{200} \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx =$$

$$= 10\,[x - \ln(x+1)]\big|_0^{200} = 10\,(200 - \ln 201) =$$

$$= 10\cdot(200 - 5{,}3) = 1947 \text{ (g)}.$$

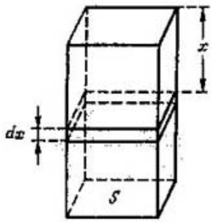

Fig. 158

EJEMPLO 2. ¿Cuál es la fuerza con la cual una barra homogénea $0 \leqslant x \leqslant l$ de densidad lineal δ atrae un punto material P (a) $(a > l)$ de masa m (fig. 159)?

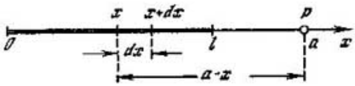

Fig. 159

Según la ley de Newton un elemento infinitamente pequeño de la barra $[x, x + dx]$ de masa $\delta\,dx$ atrae un punto material P con una fuerza cuyo valor es igual a

$$dF = -k\,\frac{m\delta\,dx}{(a-x)^2} \qquad (3)$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad (constante de gravitación). Puesto que las fuerzas de atracción actúan en el mismo sentido, sus valores dF pueden ser algebraicamente adicionados y, por consiguiente, integrados (ya que una integral es el límite de una suma algebraica)

$$F = -km\delta\int_0^l \frac{dx}{(a-x)^2} = -km\delta\cdot\frac{1}{a-x}\Big|_0^l =$$

$$= -km\delta\left(\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{km\delta l}{a\,(a-l)}.$$

EJEMPLO 3. Determinar el valor de la fuerza de presión del agua sobre un disco vertical de radio R cuyo centro está sumergido en el agua a una profundidad H $(H > 2R)$.

Tomemos como eje Ox la recta vertical con el origen de coordenadas O que coincide con el centro del círculo (fig. 160). Partamos el círculo dado en n bandas horizontales estrechas de espesor Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Examinemos la i-ésima banda $AA'B'B$ de espesor Δx_i que se encuentra a la distancia x_i del centro (fig. 160). Si Δx_i es una magnitud pequeña, esta banda puede ser considerada de modo aproximado como un rectángulo, y por eso su área es

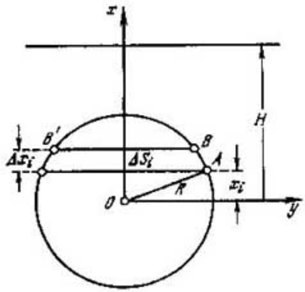

Fig. 160

$$\Delta S_i \approx AB \cdot \Delta x_i = 2\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i.$$

Considerando que el nivel de sumersión de esta banda es igual a $H - x_i$, obtendremos según la ley de Pascal la fuerza de presión del agua sobre esta banda

$$\gamma (H - x_i)\,\Delta S_i = 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i,$$

donde γ es el peso específico del agua.

Sumando estas expresiones obtendremos el valor aproximado de la fuerza de presión P que el agua ejerce sobre esta banda

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i. \tag{4}$$

La fórmula (4) es tanto más exacta, cuanto más pequeña sea Δx_i. En el límite, cuando $n \to \infty$ y máx $\Delta x_i \to 0$, obtendremos una fórmula exacta para la fuerza de presión del agua

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i. \tag{5}$$

La suma (4) es la suma integral para la función

$$f(x) = 2\gamma (H - x)\sqrt{R^2 - x^2};$$

por eso su límite es la integral definida correspondiente. Por consiguiente, mediante (5) hallamos

$$P = 2\gamma \int_{-R}^{R} (H - x)\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \pi\gamma R^2 H.$$

EJERCICIOS

Hallar las áreas de figuras limitadas por las líneas siguientes:

1. Las parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$.
2. La hipérbola $xy = a^2$ y las rectas $y = 0$, $x = b$, $x = 2b$ $(b > 0)$.
3. La parábola $y = 2x - x^2$ y el eje Ox.
4. La curva de Agnesi $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$ y el eje Ox.
5. La curva $y = e^x$ y las rectas $x = 0$ e $y = e$.
6. La parábola $y = 2(x - 1)(3 - x)$ y el eje Ox.
7. La parábola $y^2 = 2(x - 1)$ y la recta $x = 3$.
8. La curva $y \approx 2^x$ y las rectas $y = 2$ y $x = 0$.
9. Las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 7$.

9.1. Hallar el área de la superficie limitada por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

10. Hallar la longitud del arco del segmento de la parábola semicúbica $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ desde el punto $x_1 = 0$ hasta el punto $x_2 = 8$.

11. Hallar la longitud del segmento de la curva $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ a partir del punto $x_1 = 1$ hasta el punto $x_2 = e$.

11.1. Hallar la longitud de un arco de la cicloide

$$x = a(t - \mathrm{sen}\, t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

12. Construir la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ y hallar el área de la superficie limitada por esta línea.

13. Construir la «rosa de tres pétalos» $\rho = a\,\mathrm{sen}\, 3\varphi$ y hallar el área de la superficie limitada por esta línea.

14. Calcular la longitud del arco de la espiral logarítmica

$$\rho = ae^{m\varphi} \qquad (a > 0,\ m > 0),$$

situada en el interior del círculo $\rho = a$.

15. Construir la curva $\rho = 2a\,\mathrm{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$ y calcular la longitud de su arco.

16. Hallar el volumen de un obelisco cuyas bases son rectángulos de lados A, B y a, b y de altura igual a h.

17. Integrando, calcular el volumen de la esfera de radio R.

Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Ox de una superficie plana limitada por las líneas siguientes:

18. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.
19. Un semiarco de la sinusoide $y = \mathrm{sen}\, x$ e $y = 0$.
20. $y = \sec x$, $y = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$.
21. $y = x^2$, $y = 2x$.

Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Oy de una superficie plana limitada por las líneas siguientes:

22. $y = h\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = h$ (paraboloide de revolución).
23. $y = e^{-x}$, $y = 0$, y $x = 0$.
24. La velocidad de un punto varía en función del tiempo t según la ley

$$v = 0{,}01t^3 \text{ [m/s]}.$$

¿Qué camino recorrerá el punto en 10 s? ¿Cuál es la velocidad media de movimiento?

25. El calor específico de una sustancia a la temperatura t es igual a $c = 0{,}2 + 0{,}001t \left[\frac{J}{t \cdot {}^\circ C}\right]$. ¿Qué cantidad de calor hace falta gastar para calentar 1 g de sustancia desde 0 hasta 100 °C?

26. La densidad lineal de una barra $0 \leqslant x \leqslant l$ de longitud l es igual a $q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$, donde q_0 es una constante. Hallar la masa de la barra.

27. Un cilindro de 20 cm de diámetro y de 80 cm de longitud está lleno de vapor a una presión de 100 N/cm². Calcular el trabajo que debe ser efectuado para reducir a la mitad el volumen del vapor a la temperatura constante.

28. Hallar la fuerza de presión efectuada por el agua sobre un panel vertical en forma de un semicírculo de radio a, cuyo diámetro está situado al nivel del agua.

Capítulo XVI

Números complejos

§ 1. Operaciones aritméticas con números complejos

Como se sabe, se llama *número complejo* a la expresión del tipo

$$z = x + iy \equiv x + yi, \tag{1}$$

donde x e y son números reales e i es la unidad imaginaria.

Los números de forma $x + i0 = x$ son idénticos a los números reales; en particular, $0 + i0 = 0$. Los números de forma $0 + iy = iy$ se llaman *imaginarios puros*.

Los números reales x e y se llaman, respectivamente, la *parte real* y la *parte imaginaria* del número z y se designan del modo siguiente

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \tag{2}$$

Llámase *módulo* del número complejo z al número no negativo

$$|z| = |(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2|^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0. \tag{3}$$

Llámase *número conjugado* $\bar{z}$ del (1) al número complejo

$$\bar{z} = x + i(-y) \equiv x - iy. \tag{4}$$

De este modo,

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \tag{5}$$

y

$$|\bar{z}| = |z|. \tag{6}$$

Está definida en el conjunto de números complejos la relación de la igualdad de dos números, así como las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y de división, del modo siguiente.

I. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. En este caso,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

En particular, $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$.

II. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

De aquí se deduce que

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$$

III. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

De aquí obtenemos, en particular, una relación importante

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1. \qquad (7)$$

Notemos que la regla de multiplicación III se obtiene formalmente por medio de la multiplicación de los binomios $x_1 + iy_1$ y $x_2 + iy_2$ teniendo en cuenta la (7).

Es también evidente que para $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ tenemos:

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{IV.}\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Son fáciles de verificar las propiedades siguientes:

1) $\overline{(\bar{z})} = z$; $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; 3) $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$; 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$;

5) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

§ 2. Plano complejo

Examinemos un plano respecto a las coordenadas cartesianas Oxy. A todo número complejo $z = x + iy$ se le puede poner en correspondencia un punto del plano $z(x, y)$ (fig. 161), esta correspondencia es biunívoca. El plano en el que se realiza esta correspondencia se llama *plano complejo* y en vez de números complejos se hace referencia a **los puntos del plano complejo.**

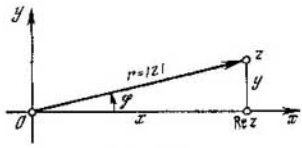

Fig. 161

Los números **reales** están situados sobre el eje Ox; $z = x + 0i = x$; por eso se llama *eje real*. Sobre el eje Oy se sitúan los números **imaginarios puros** $z = 0 + iy = iy$; por eso él se llama *eje imaginario.*

Notemos que $r = |z|$ es la distancia del origen de las coordenadas al punto z.

A cada punto z le corresponde su **radio vector** $\overrightarrow{Oz}$; el ángulo formado por el radio vector del punto z y el eje Ox se llama *argumento* $\varphi = \operatorname{Arg} z$ de este punto. Aquí $-\infty < \operatorname{Arg} z < +\infty$. El argumento del punto cero $z = 0$ es arbitrario. El valor del Arg z el más pequeño en módulo se llama *valor principal* y se connota $\arg z$:

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi. \qquad (1)$$

Para el argumento φ tenemos (fig. 161)

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EJEMPLO. 1) $\arg 2 = 0$; 2) $\arg(-1) = \pi$; 3) $\arg i = \pi/2$.

El módulo r y el argumento φ de un número complejo pueden ser considerados (véase la fig. 161) como coordenadas polares del punto z. De aquí obtenemos

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi. \tag{3}$$

De este modo, tenemos la expresión **trigonemétrica** del número complejo

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\operatorname{sen}\varphi = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi), \tag{4}$$

donde $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

TEOREMA 1. *Para sumar números complejos se suman sus radios vectores (según la regla del paralelogramo).*

Efectivamente, si el número $z_1 = x_1 + iy_1$ corresponde al punto de coordenadas (x_1, y_1), y el número $z_2 = x_2 + iy_2$, al punto de coordenadas (x_2, y_2), entonces al número $z_1 + z_2$ le corresponde el punto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Como los triángulos rectángulos de catetos x_2 e y_2, que vienen sombreados (fig. 162), son iguales, el cuadrilátero de vértices $0, z_1, z_1 + z_2, z_2$ es un paralelogramo. Por consiguiente, el radio vector del punto $z_1 + z_2$ es la suma de los radios vectores de los puntos z_1 y z_2 (comparar con el § 2 del cap. XVIII).

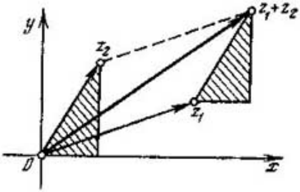

Fig. 162

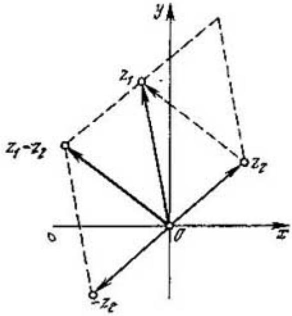

Fig. 163

COROLARIO. *Puesto que $|z|$ es la longitud del vector $\overrightarrow{Oz}$,*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

TEOREMA 2 *Para restar números complejos se efectúa la sustracción de sus radios vectores.*

Puesto que $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, entonces $z_1 - z_2$ es igual a la segunda diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores $\overrightarrow{Oz}$ y $\overrightarrow{Oz'}$ (fig. 163), es decir, es igual a la diferencia de los radios vectores de los puntos z_1 y z_2 (comparar con el § 3 del cap. XVIII).

COROLARIO *La distancia entre dos puntos z y z' es igual a*

$$\rho(z', z) = |z' - z|.$$

§ 3. Teoremas sobre el módulo y el argumento

TEOREMA 1 *El módulo del producto de números complejos es igual al producto de los módulos de estos números y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

Efectivamente, si

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_2),$$

tenemos

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \mathrm{sen}\,\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2) + i(\mathrm{sen}\,\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2)].$$

De aquí,

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1|\cdot|z_2|$$

y

$$\mathrm{Arg}\,z_1z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2, \tag{1}$$

donde los valores de las funciones multívocas Arg, situados en los primero y segundo miembros de la igualdad (1), deben ser elegidos convenientemente. En adelante hay que tener en cuenta esta observación.

COROLARIO *El módulo de una potencia entera positiva de un número complejo es igual a la misma potencia del módulo de este número, y el argumento de la potencia es igual al argumento del número multiplicado por el exponente de la potencia, es decir,*

$$|z^n| = |z|^n, \quad \mathrm{Arg}\,z^n = n\,\mathrm{Arg}\,z$$

(n es un número entero positivo).

La demostración se deduce directamente del examen del producto de factores iguales.

EJEMPLO Construir el punto $z' = iz$. Tenemos

$$|z'| = |i|\cdot|z| = |z|,$$

$$\mathrm{Arg}\,z' = \mathrm{Arg}\,iz = \arg i + \arg z = \frac{\pi}{2} + \arg z.$$

Por consiguiente, cuando el vector $\overrightarrow{Oz}$ se multiplica por i, gira en un ángulo recto en el sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 164).

TEOREMA 2. *El módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos de estos números y el argumento del cociente es igual a la diferencia de argumentos del dividendo y del divisor.*

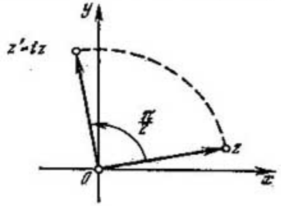

Fig. 164

Sea

$$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2) \neq 0.$$

Puesto que

$$\bar{z}_2 = r_2 (\cos\varphi_2 - i \operatorname{sen}\varphi_2) = r_2 [\cos(-\varphi_2) + i \operatorname{sen}(-\varphi_2)],$$

en virtud del teorema 1 tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)[\cos(-\varphi_2) + i\operatorname{sen}(-\varphi_2)]}{(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2)(\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (r_2 \neq 0).$$

De aquí,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

§ 4. Extracción de raíces de un número complejo

Sea

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi), \tag{1}$$

donde $z = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$. En este caso, en virtud del § 3, tenemos

$$z = [\rho(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\operatorname{sen} n\psi), \tag{2}$$

de donde obtenemos

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

De este modo

$$\rho = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}$$

y

$$\psi = \operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}.$$

Notemos que por $\sqrt[n]{r}$ se entiende aquí el valor aritmético de la raíz.

Aquí es suficiente tomar por k sólo los valores $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, porque para los restantes valores de k se obtiene la repetición de los mismos valores hallados de la raíz.

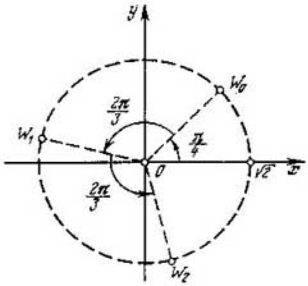

Fig. 165

Por consiguiente, tenemos definitivamente

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \quad (4)$$

De la fórmula (4) se deduce que la raíz n-ésima de todo número complejo $z \neq 0$ posee exactamente n valores.

EJEMPLO. Hallar $W = \sqrt[3]{-1+i}$. Puesto que $-1 + i = \sqrt{2} \times \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$, en virtud de la fórmula (4) tenemos

$$W = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2).$$

De aquí,

$$W_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right),$$

$$W_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \operatorname{sen} \frac{11}{12}\pi\right),$$

$$W_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{19}{12}\pi + i \operatorname{sen} \frac{19}{12}\pi\right).$$

Los puntos W_0, W_1, W_2 son los puntos equidistantes situados sobre la circunferencia de radio $\sqrt[6]{2}$ (fig. 165).

§ 5. Noción de la función de una variable compleja

Sean dados dos planos complejos Oxy (plano z) y $O'uv$ (plano w).

DEFINICION. *Si a todo punto $z \in E$ (E es el conjunto de puntos del plano z) le corresponde, de acuerdo con una cierta ley f, un punto único $w \in E'$ (E' es el conjunto de puntos del plano w), se dice que w es* ***función*** *(unívoca) de z*

$$w = f(z) \tag{1}$$

con dominio de definición E y cuyos valores pertenecen a E' (fig. 166). Si el conjunto de valores de la función $f(z)$ agotan **todo** el conjunto E', entonces E' se llama *conjunto de valores* (*dominio de variación*) de la función $f(z)$. En este caso escriben

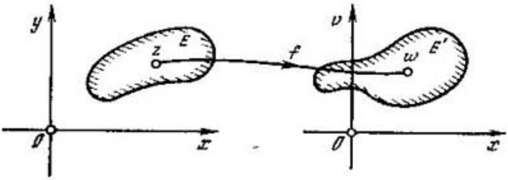

Fig. 166

$$E' = f(E). \tag{2}$$

Los conjuntos E y E' pueden ser representados sobre un mismo plano complejo.

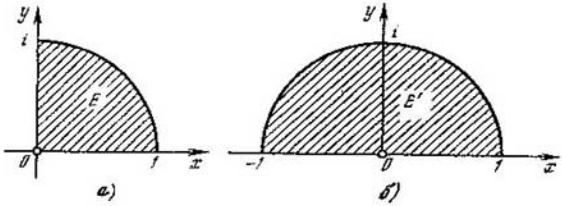

Fig. 167

De este modo, **toda función compleja realiza una aplicación unívoca unilateral de un conjunto en otro**. Gracias a esta propiedad las funciones complejas se utilizan en hidrodinámica y aerodinámica, porque ellas permiten describir cómodamente la «historia» del movimiento de un volumen de líquido (o de gas).

La rama de matemáticas que estudia las propiedades de las funciones complejas se llama *teoría de funciones de una variable compleja*.

EJEMPLO. ¿Cuál es la imagen del sector E

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < |z| < 1$$

(fig. 167, *a*) con la aplicación $w = z^2$?

Tenemos

$$\arg w = 2 \arg z < \pi \quad \text{y} \quad |w| = |z|^2 < 1.$$

Por eso, la imagen E' es un semicírculo (fig. 167, *b*).

EJERCICIOS

1. Hallar $z = \dfrac{(1+i)^{100}}{(\sqrt{3}-i)^{50}}$.

2. Construir los dominios siguientes:

a) $0 < \operatorname{Re} z < 1$; b) $\operatorname{Im} z > 2$; c) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$; d) $|z| < 1$.

3. Sea un cuadrado de vértices 0, 1, $1 + i$, i en el plano z. ¿Cuál será su imagen por aplicación $w = z^2$?

Capítulo XVII

Determinantes de segundo y tercer órdenes

§ 1. Determinantes de segundo orden

Llámase *determinante* de segundo orden a la expresión

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{1}$$

(véase también el § 5 del cap. I).

Los números a_1, b_1, a_2, b_2 se llaman *elementos* del determinante; ellos forman dos filas y dos columnas. En adelante consideraremos siempre que todas las magnitudes examinadas son **reales**.

La fórmula (1) da la regla de «desarrollo» (de cálculo) de un determinante del segundo orden, a saber: *el determinante del segundo orden es igual a la diferencia de productos de sus elementos de la primera y la segunda diagonales.*

Con ayuda de determinantes del segundo orden es cómodo resolver los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Semejante sistema lineal, en el cual los términos independientes se encuentran en los segundos miembros será llamado, para precisar la idea, sistema *estandar*.

Por *solución* del sistema (2) se entiende todo par de números (x, y) que transforma este sistema en una identidad. Si un tal par es único, la solución del sistema se llama **única**. Se introduce análogamente la noción de **solución** de un sistema que posee n incógnitas ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Para hallar las soluciones del sistema (2) aplicamos el **método de eliminación**. Multiplicando la primera ecuación del sistema (2) por b_2, la segunda ecuación por b_1 y sumándolas tendremos

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{3}$$

De un modo análogo multiplicando la primera ecuación del sistema (2) por a_2, la segunda ecuación por a_1 y sumándolas obtendremos

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{4}$$

Introduzcamos el *determinante del sistema*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

así como los determinantes auxiliares

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Notemos que los determinantes D_x y D_y se obtienen a partir del determinante del sistema D, por medio de la sustitución de los coeficientes de la incógnita indicada por los términos constantes correspondientes.

Las ecuaciones (3) y (4) toman la forma

$$Dx = D_x, \quad Dy = D_y. \tag{5}$$

Si $D \neq 0$, resulta que el sistema (2) tiene una sola solución

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \tag{6}$$

(*fórmulas de Cramer*); se puede verificar por la sustitución directa del sistema (2), que el sistema de números (6) es la solución del sistema (2).

OBSERVACIÓN. Si el determinante $D = 0$, esto significa que el sistema (2) no tiene solución (es decir, es incompatible) o, al contrario, posee una infinidad de soluciones (es decir, es indeterminado).

EJEMPLO. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} 7x-6y&=5, \\ 8x-7y&=-10. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tenemos

$$D=\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -49+48=-1,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = -35-60=-95, \quad D_y=\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} =$$
$$= -70-40=-110,$$

de donde, aplicando las fórmulas de Cramer (6) obtenemos

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-95}{-1}=95, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-110}{-1}=110.$$

Geométricamente, la solución (95; 110) representa el punto de intersección de rectas (7).

§ 2. Sistema de dos ecuaciones homogéneas con tres incógnitas

Examinemos el sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Este sistema es siempre compatible, porque admite evidentemente una solución nula $x=0$, $y=0$, $z=0$. Sin embargo, es interesante hallar soluciones **no nulas** (x, y, z) del sistema (1). Sea, por ejemplo, $z \neq 0$. En este caso el sistema (1) puede ser escrito así

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{x}{z}+b_1\frac{y}{z}=-c_1,\\ a_2\frac{x}{z}+b_1\frac{y}{z}=-c_2,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

de donde, suponiendo que $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, obtenemos

$$\frac{x}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}. \tag{4}$$

Introduzcamos la *matriz de coeficientes del sistema* (1)

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{matrix}\right\|. \tag{5}$$

Los determinantes del segundo orden D_1, D_2 y D_3 que se obtienen a partir de la matriz (5) suprimiendo la columna correspondiente, se llaman *menores* de esta matriz. De este modo, tenemos

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=D.$$

Utilizando estas notaciones se puede escribir las ecuaciones (3) y (4) del modo siguiente

$$\frac{x}{z}=\frac{D_1}{D_3},\quad \frac{y}{z}=-\frac{D_2}{D_3},$$

de donde obtenemos

$$\frac{x}{D_1}=\frac{y}{-D_2}=\frac{z}{D_3}. \tag{6}$$

Las igualdades (6) son evidentemente justas también para la solución nula.

De este modo, tenemos la siguiente **regla**: *las incógnitas de un sistema homogéneo* (1) *son proporcionales a los menores correspondientes de su matriz de coeficientes tomados con signos apropiados.*

Designando por t el coeficiente de proporcionalidad para las relaciones (6) obtendremos un sistema completo de soluciones del sistema (1):

$$x = D_1 t, \quad y = -D_2 t, \quad z = D_3 t \quad (-\infty < t < +\infty). \qquad (7)$$

Durante la deducción de las fórmulas (7) hemos supuesto que $D = D_3 \neq 0$. Sin embargo es fácil convercernos de que las fórmulas (7) se quedan justas, si **cualquier** menor (por lo menos uno) D_1, D_2, D_3 es distinto de cero.

OBSERVACIÓN. Si todos los menores D_1, D_2, D_3 son iguales a cero, el sistema exige un estudio especial.

EJEMPLO. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z&=0, \\ 4x+5y-6z&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Componiendo la matriz de coeficientes

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{Vmatrix},$$

hallamos sus menores

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 12-15 = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -6-12 = -18,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5+8 = 13.$$

Según la fórmula (7) el sistema completo de soluciones del sistema (8) es siguiente:

$$x = -3t, \quad y = +18t, \quad z = 13t,$$

donde $-\infty < t < +\infty$.

La solución no nula más simple del sistema (1), que se obtiene cuando $t = 1$, es $x = -3$, $y = 18$, $z = 13$.

§ 3. Determinantes de tercer orden

DEFINICIÓN 1. *Por* ***determinante*** *de tercer orden se entiende la expresión*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Los números a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ se llaman *elementos del determinante*; ellos forman tres **filas** y tres **columnas** del determinante.

Desarrollando los determinantes del segundo orden (menores) de la fórmula (1) y agrupando los términos del mismo signo resulta que el determinante del tercer orden representa una suma de seis términos

$$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1, \tag{2}$$

tres de los cuales se toman con el signo «+» y los tres restantes con el signo «—».

EJEMPLO. Calcular

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Aplicando la fórmula (1) tenemos

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 0.$$

Más abajo indicaremos los procedimientos más simples para calcular determinantes de tercer orden.

DEFINICIÓN 2. *Llámase* ***menor*** *del elemento del determinante de tercer orden al determinante de segundo orden obtenido a partir del determinante dado, suprimiendo la fila y la columna de este elemento.*

Por ejemplo, para el determinante (3) el menor de su elemento 2 situado en la segunda fila y en la primera columna es el determinante

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

En adelante diremos, para abreviar, que el elemento de un determinante de tercer orden ocupa un *lugar par*, si la suma de números de su fila y de su columna es un número par y un *lugar impar*, si esta suma es un número impar.

DEFINICION 3. *Llámase cofactor (complemento algebraico) de un elemento de un determinante de tercer orden al menor de este elemento tomado con el signo «+», si el elemento ocupa un lugar par y con el signo «—», si su lugar es impar.*

De este modo, si M es el menor del elemento del determinante, i y j son el número de la fila y el número de la columna, respectivamente, su cofactor es

$$A = (-1)^{i+j}M.$$

Por ejemplo, para el elemento c_2 del determinante (1) que se encuentra en la segunda fila y en la tercera columna, su cofactor es

$$C_2=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Los signos correspondientes que obtienen en este caso los menores de elementos del determinante pueden ser dados por la tabla

$$\boxed{\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}}$$

En adelante nos pondremos de acuerdo para designar los complementos algebraicos de los elementos del determinante con las letras mayúsculas correspondientes.

TEOREMA DEL DESARROLLO. *El determinante de tercer orden es igual a la suma de productos pares de elementos de cualquier fila o columna por sus complementos algebraicos.*

De este modo, para el determinante (1) son justos seis desarrollos siguientes:

$$\left.\begin{aligned} D &= a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1, \\ D &= a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2, \\ D &= a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} D &= a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3, \\ D &= b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3, \\ D &= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Es fácil verificar que las fórmulas (4) y (5) dan la misma expresión (2) tomada como definición.

OBSERVACIÓN. Con ayuda de las fórmulas de tipo (4) y (5) se puede introducir por inducción los determinantes de orden superior.

§ 4. Principales propiedades de los determinantes

Al formular estas propiedades no indicaremos el orden del determinante, porque ellas son justas para los determinantes de cualquier orden.

I. (Equivalencia de filas y de columnas). *El valor de un determinante no varía cuando todas sus filas se reemplazan por columnas correspondientes,* es decir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Efectivamente, desarrollando el primer determinante según los elementos de la primera fila y el segundo determinante según los elementos de la primera columna, obtendremos, de acuerdo con el teorema del desarrollo (§ 3), un mismo resultado.

II. *Si se reordenan los términos de dos filas paralelas del determinante, su valor absoluto conserva el valor inicial y su signo se cambia por el opuesto.*

Sea, por ejemplo, que en el determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

están reordenadas la primera y la segunda filas, en este caso obtendremos el determinante

$$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2'}$$

Desarrollando el determinante $\widetilde{D}$ según los elementos de la segunda fila y teniendo en cuenta el hecho de que durante la reordenación de dos filas se ha cambiado la paridad de los lugares de estos elementos, tendremos

$$\widetilde{D} = a_1(-A_1) + b_1(-B_1) + c_1(-C_1) = -D.$$

Se obtiene también el mismo resultado en otros casos.

COROLARIO 1. *Si en un determinante los elementos de una fila son respectivamente iguales a los de la otra fila, este determinante es igual a cero.*

Efectivamente, sea por ejemplo,

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Permutando en este determinante las dos primeras filas, obtendremos, en virtud del teorema, el determinante $-D$. Pero es evidente que esta operación no modifica el determinante D; por eso $-D = D$ y, por consiguiente, $D = 0$.

COROLARIO 2. *La suma de los productos pares de elementos de una fila de un determinante por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de otra fila paralela es igual a cero*, es decir, para el determinante (2) tenemos

$$\left.\begin{aligned} a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0, \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

etc., así como

$$\left.\begin{aligned} a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0,\\ a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

etc., (en total se pueden escribir doce igualdades de este tipo).

Los primeros miembros de todas las igualdades (3) y (4) representan los desarrollos de los determinantes correspondientes de tercer orden, que contienen dos filas iguales paralelas y, por consiguiente, son iguales a cero. Por ejemplo,

$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

(aquí el desarrollo debe ser efectuado por la segunda fila).

III. *Se puede sacar fuera del signo del determinante un factor común de los elementos de una fila*, es decir,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

etc.

Esta propiedad se deduce directamente del desarrollo del determinante según los elementos de la fila correspondiente.

COROLARIO 1 *Si todos los elementos de una fila cualquiera de un determinante son iguales a cero, el determinante es igual a cero.*

COROLARIO 2 *Si los elementos de una fila cualquiera de un determinante son respectivamente proporcionales a los elementos de una otra fila, el determinante es igual a cero.*

Por ejemplo, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ ka_1 & kb_1 & kc_1\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

etc.

IV. *Si en un determinante los elementos de una fila son sumas de dos sumandos, el determinante puede ser descompuesto en la suma de dos determinantes correspondientes.*

Por ejemplo, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$$

$$=(a_1+\alpha_1)\,A_1+(b_1+\beta_1)\,B_1+(c_1+\gamma_1)\,C_1=$$

$$= (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

etc.

COROLARIO. *El valor del determinante no cambia, si se añaden (o restan) a los elementos de una fila cualquiera números proporcionales a los elementos de una otra línea paralela con el mismo coeficiente de proporcionalidad* (llamadas **«transformaciones elementales del determinante»**).

Efectivamente, sea

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Examinemos, por ejemplo, los determinantes

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 \pm ka_2 & b_1 \pm kb_2 & c_1 \pm kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Utilizando las propiedades IV y III tendremos

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D \pm k \cdot 0 = D.$$

Las transformaciones elementales dan un procedimiento cómodo para el cálculo de determinantes.

EJEMPLO. Calcular el determinante **simétrico**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Restando la primera fila multiplicada por dos de la segunda fila y la primera fila multiplicada por tres de la tercera fila obtendremos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8.$$

§ 5. Sistema de tres ecuaciones lineales

Examinemos un sistema lineal estándar de tres ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

cuyos términos independientes se encuentran en los segundos miembros. Por *solución* del sistema se entienden los tres números (x, y, z) que satisfacen este sistema.

Introducimos el *determinante del sistema*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

así como los *determinantes auxiliares*

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Multiplicando sucesivamente las ecuaciones del sistema (1) por los complementos algebraicos A_1, A_2, A_3 de los elementos correspondientes a_1, a_2, a_3 de la primera columna del determinante D obtendremos

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)\,x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)\,y+\\ +(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)\,z=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3, \tag{4}$$

de donde, aplicando el teorema de desarrollo (§ 3) y el corolario 2 de la propiedad II, tendremos $Dx+0\cdot y+0\cdot z=D_x$, es decir,

$$Dx=D_x. \tag{5}$$

De un modo análogo, utilizando los complementos algebraicos de los elementos de la segunda y la tercera columnas del determinante D, hallamos

$$Dy=D_y, \quad Dz=D_z. \tag{5'}$$

Si el determinante del sistema $D\neq 0$, a partir de las ecuaciones (5) y (5') obtenemos la **solución única** del sistema (1):

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}\text{ [1]}. \tag{6}$$

[1]) De hecho, hemos demostrado que si la solución del sistema (1) existe, ella se expresa por las fórmulas (6). Con reemplazos inmediatos uno puede cerciorarse de que cuando $D\neq 0$, las fórmulas (6) brindan la solución del sistema (1).

De este modo tenemos **la regla de Cramer**: *las incógnitas de un sistema lineal estándar* (1) *con determinante no nulo, son fracciones cuyo denominador es el determinante del sistema y los numeradores son iguales a los determinantes auxiliares correspondientes.*

OBSERVACIÓN. Si el determinante del sistema $D = 0$, este sistema (1) es incompatible o tiene una infinidad de soluciones.

EJEMPLO. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=1,\\ 2x+3y+z&=0,\\ 3x+y+2z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Tenemos

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Restando la primera columna multiplicada por dos de la segunda columna y la primera columna multiplicada por tres de la tercera columna, obtendremos

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -5\\ 3 & -5 & -7 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -5\\ -5 & -7 \end{vmatrix}=7-25=-18\neq 0.$$

Para los determinantes auxiliares hallamos los valores siguientes:

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7.$$

Aplicando la regla de Cramer obtenemos la solución del sistema:

$$x=-\frac{5}{18},\qquad y=\frac{1}{18},\qquad z=\frac{7}{18}.$$

§ 6. Sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales

Examinemos el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=0, \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

cuyos términos independientes son iguales a cero. Este sistema lineal se llama *homogéneo*.

El sistema lineal homogéneo (1) admite evidentemente una solución nula $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y, por consiguiente, es siempre compatible.

Es interesante estudiar los casos cuando el sistema homogéneo posee soluciones no nulas.

TEOREMA. *Un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas posee soluciones no nulas, si y sólo si, su determinante es igual a cero*, es decir,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que el sistema (1) tiene una solución no nula (x_1, y_1, z_1). Si su determinante $D \neq 0$, entonces en virtud de las fórmulas de Cramer el sistema (1) posee solamente la solución nula, lo que contradice el supuesto. Por consiguiente, $D = 0$.

Sea $D = 0$. En este caso, el sistema (1) es incompatible o tiene una infinidad de soluciones. Pero nuestro sistema es compatible porque posee una solución nula. Por consiguiente, el sistema (1) admite una infinidad de soluciones, incluso no nulas.

OBSERVACIÓN Indiquemos un procedimiento que permite hallar las soluciones no nulas del sistema (1) en el caso típico.

Sea el determinante del sistema $D = 0$. Supongamos que no todos sus menores del segundo orden son iguales a cero.

Supongamos que

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

(esto siempre se puede alcanzar con ayuda de una reordenación de ecuaciones y de un cambio de la numeración de incógnitas).

Examinemos el subsistema compuesto de las dos primeras ecuaciones del sistema (1):

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En virtud del § 2 las soluciones de este sistema son las siguientes

$$x = A_3t, \quad y = B_3t, \quad z = C_3t \tag{5}$$

$(-\infty < t < +\infty)$, donde A_3, B_3, C_3 son los complementos algebraicos correspondientes. Sustituyendo estos números en la tercera ecuación no utilizada del sistema (1) y teniendo en cuenta que el determinante $D = 0$, obtendremos

$$a_3x + b_3y + c_3z = (a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3)\, t = Dt \equiv 0.$$

Por consiguiente, las fórmulas (5), donde t es arbitrario dan todas las soluciones del sistema completo (1).

Geométricamente las ecuaciones del sistema (1) son las ecuaciones de tres planos en el espacio $Oxyz$ (véase el § 2 del cap. XIX). Si el determinante $D \neq 0$, estos planos se intersecan en un solo punto O (0, 0, 0); si el determinante $D = 0$, pero no todos sus menores del segundo orden son iguales a cero, estos planos se intersecan en nuestro caso según una recta (como las «hojas de un libro»). Hemos dejado sin examinar el caso cuando los tres planos se juntan.

§ 7. Sistema de ecuaciones lineales con numerosas incógnitas. Método de Gauss

Examinemos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=a_{1,\,n+1}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=a_{2,\,n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=a_{n,\,n+1}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Aquí los coeficientes del sistema poseen un doble índice: a saber, el coeficiente a_{ij} tiene para el primer índice i el número de la ecuación y para el segundo j, el número de la incógnita. Para la comodidad de cálculos los términos independientes están designados por $a_{i,n+1}$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

El método más simple de resolver el sistema (1) es el **método de eliminación.** Vamos a explicarlo en forma del **esquema de Gauss** (habitualmente denominado *método de Gauss*).

Sea, para precisar, $a_{11}\neq 0$ el **«coeficiente dominante»**. Al dividir todos los términos de la primera ecuación por a_{11} tendremos una ecuación **reducida**

$$x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\alpha_{1,n+1}, \tag{2}$$

donde

$$\alpha_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1). \tag{3}$$

Examinemos la i-ésima ecuación del sistema (1):

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=a_{i,n+1}. \tag{4}$$

Para hacer desaparecer x_1 en esta ecuación multipliquemos la ecuación reducida (2) por a_{i1} y restemos la ecuación obtenida de la ecuación (4). En este caso tendremos

$$a_{i2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{in}^{(1)}x_n=a_{i,n+1}^{(1)} \tag{5}$$

donde

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{i1}\alpha_{1j} \quad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n+1) \tag{6}$$

De este modo obtenemos un sistema más corto

$$\left.\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=a_{2,\,n+1}^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{nn}^{(1)}x_n=a_{n,\,n+1}^{(1)}, \end{array}\right\} \tag{7}$$

cuyos coeficientes se determinan mediante las fórmulas (6).

Si su **coeficiente dominante** $a_{22}^{(1)}\neq 0$, entonces aplicando el procedimiento indicado arriba se puede excluir x_2 del sistema (7), los nuevos coeficientes serán calculados con ayuda de las fórmulas de tipo (6), etc. Esta parte de cálculos se llama **paso directo del método de Gauss.**

Para determinar las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ examinemos la ecuación reducida

$$\left.\begin{aligned} x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=\alpha_{1,\,n+1},\\ x_2+\ldots+\alpha_{2n}^{(1)}x_n&=\alpha_{2,\,n+1}^{(1)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ x_n&=\alpha_{n,\,n+1}^{(n-1)}.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

De donde hallamos sucesivamente las incógnitas (paso inverso)

$$\left.\begin{aligned} n&=\alpha_{n,\,n+1}^{(n-1)},\\ x_{n-1}&=\alpha_{n-1,\,n+1}^{(n-2)}-\alpha_{n-1,\,n}^{(n-2)}x_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1&=\alpha_{1,\,n+1}-\alpha_{1n}x_n-\ldots-\alpha_{1,\,n-1}x_{n-1}-\ldots-\alpha_{12}x_2\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Notemos que las operaciones (9) se hacen sin división.

Si un coeficiente dominante de turno resulta ser igual a cero, es conveniente permutar adecuadamente las ecuaciones del sistema. Es posible que el sistema (1) sea incompatible. En este caso, el método de Gauss es naturalmente irrealizable.

EJEMPLO. Resolver por medio del método de Gauss el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3&=20,\\ 3x_1+4x_2-2x_3&=-11,\\ 4x_1+2x_2+3x_3&=9.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Componemos la tabla de coeficientes del sistema (10), considerando los términos independientes del mismo para $x^0 = 1$.

x_1	x_2	x_3	x^0	$\sum$	
2	−3	4	20	23	I
3	4	−2	−11	−6	
4	2	3	9	18	
1	−1,5	2	10	11,5	
	8,5	−8	−41	−40,5	II
	8	−5	−31	−28	
	1	−0,625	−3,875	−3,5	
		−2,6875	−8,0625	−10,75	III
		1	3	4	
		1	3	4	IV
	1		−2	−1	
1			1	2	

La última columna $\sum$ contiene las sumas de elementos de las filas correspondientes de la tabla; esta columna sirve para controlar los cálculos.

Considerando el coeficiente 2 marcado como dominante y dividiendo por este coeficiente todos los elementos de la primera fila de la tabla (incluyendo lo que figura en la columna $\sum$) obtenemos los coeficientes de la primera ecuación reducida (véase la tabla). El control corriente de cálculos consiste en asegurar que el elemento de la columna $\sum$ es igual a la suma de todos los otros elementos de esta línea. Con esto termina el llenado de la sección I de la tabla.

Luego, utilizando la fórmula (6), calculamos los coeficientes del sistema corto que no contiene la incógnita x_1. Para más claridad llamaremos **reducida** a la línea que contiene los coeficientes de la ecuación reducida y a la columna que contiene el coeficiente dominante de la sección la llamaremos **dominante.** En este caso, partiendo de la fórmula (6), se puede enunciar la siguiente **regla:** *los coeficientes transformados del esquema de Gauss son iguales a sus coeficientes iniciales menos el producto de sus «proyecciones» sobre la línea reducida y la columna dominante correspondientes.* Aplicando esto llenamos la sección II de la tabla incluyendo la columna de control. Para comodidad de los cálculos tomamos el elemento 8 en calidad de coeficiente dominante de la sección II (véase la tabla).

Actuando de modo análogo llenamos la sección III de la tabla. Así concluye el paso directo del método de Gauss.

Las incógnitas x_3, x_2 y x_1 se determinan sucesivamente a partir de ecuaciones reducidas

$$x_3 = 3,$$
$$x_2 - 0{,}625x_3 = -3{,}875,$$
$$x_1 - 1{,}5x_2 + 2x_3 = 10.$$

De donde,

$$x_3 = 3,$$
$$x_2 = -3{,}875 + 0{,}625\cdot 3 = -2,$$
$$x_3 = 10 - 2\cdot 3 + 1{,}5\cdot(-2) = 1$$

(**paso inverso**). Los resultados del paso inverso se incluyen en la sección IV de la tabla.

Notemos que si se toman como términos independientes los elementos de la columna $\sum$ se obtiene para las incógnitas los valores $\hat{x}_3 = 4$, $\hat{x}_2 = -1$, $\hat{x}_1 = 2$ que superan en una unidad los valores de las incógnitas x_3, x_2, x_1. Esta circunstancia permite el **control final** de los cálculos.

EJERCICIOS

1. Calcular los determinantes del segundo orden:

a) $\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Resolver con ayuda de determinantes el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 0{,}9y &= 1, \\ 1{,}1x + y &= -2. \end{aligned}\right\}$$

3. Hallar las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 2x + 2y &= \alpha \end{aligned}\right\}$$

(α es un parámetro).

4. Hallar el punto de intersección de las rectas

$$\left.\begin{array}{r} 5x+\alpha y=1, \\ x-5y=-3 \end{array}\right\}$$

(α es un parámetro).

5. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+5z=0, \\ 7x-9y-11z=0. \end{array}\right\}$$

Indicar alguna solución entera no nula de este sistema.

6. Calcular los determinantes del tercer grado:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix};\quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

7. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0.$$

8. Resolver con ayuda de determinantes el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y+5z=1, \\ 3x+y+3z=2, \\ 5x+3y-z=-3. \end{array}\right\}$$

9. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0, \\ 2x-3y+4z=0, \\ 3x-y+7z=0. \end{array}\right\}$$

10. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x=0, \\ x+y=0, \\ x+z=0 \end{array}\right\}$$

(α es un parámetro).

11. Mediante el método de Gauss, resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-10, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-5x_4=-8, \\ 3x_1+4x_2-5x_3-6x_4=4, \\ 4x_1-5x_2-6x_3-7x_4=24. \end{array}\right\}$$

Capítulo XVIII

Elementos de álgebra vectorial

§ 1. Escalares y vectores

Una magnitud que se caracteriza completamente por su valor numérico en un sistema de unidades elegido se llama *magnitud escalar* o simplemente *escalar*. Tales, son, por ejemplo, la masa y el volumen de un cuerpo, la temperatura de un medio, etc. Un escalar se determina **por un número** que puede ser positivo, negativo o igual a cero.

Una magnitud que además de su valor numérico se caracteriza también por su **dirección** y **sentido** se llama *magnitud vectorial*

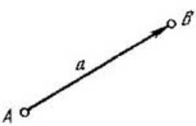

Fig. 168

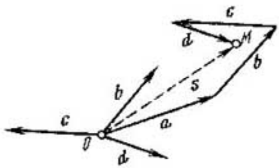

Fig. 169

o simplemente *vector*. Tales son, por ejemplo, la fuerza, el desplazamiento, la velocidad, etc. Un vector se determina por un número y una dirección.

Los vectores se designan generalmente por letras gruesas, por ejemplo, $\boldsymbol{a}$. Geométricamente el vector se representa por un segmento orientado en el espacio (fig. 168); se utilizan en este caso la designación $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, donde el punto A es el origen del segmento y el punto B es su extremo. En adelante para más claridad consideraremos los vectores como segmentos orientados.

Llámase *módulo* (*longitud*) del vector $\boldsymbol{a}$

$$|\boldsymbol{a}| = a$$

su valor numérico sin tener en cuenta su dirección. (Naturalmente, $|\overrightarrow{AB}|$ designa el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$). El vector $\boldsymbol{0}$ cuyo módulo es igual a cero se llama *vector nulo* (la dirección del vector nulo es arbitraria).

Se dice que dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son *iguales*, si ellos están situados sobre rectas paralelas o coincidentes (paralelismo en sentido amplio) y poseen una misma longitud y están dirigidos en un mismo sentido. Convenimos en no distinguir los vectores iguales e introduciremos de este modo la noción de *vector libre*. En otras palabras, un vector libre puede ser transportado a cualquier punto del espacio a condición de que la longitud y la dirección del mismo siguen siendo las mismas. En particular, los orígenes de vectores libres pueden estar en un punto común. En adelante expondremos **la teoría de vectores libres** en el espacio de tres dimensiones.

§ 2. Suma de vectores

DEFINICION. *Llámase* ***suma*** *de varios vectores, por ejemplo,* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ (fig. 169) *al vector*

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$$

igual en magnitud y en dirección a la resultante $\overrightarrow{OM}$ *de la línea quebrada del espacio, construida sobre estos vectores.*

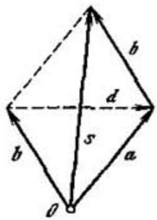

Fig. 170

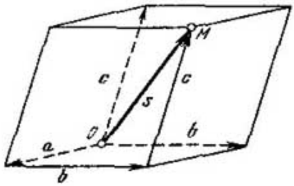

Fig. 171

En el caso de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (fig. 170) su suma $\boldsymbol{s}$ está representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre estos vectores que parte de su punto de aplicación común (*regla del paralelogramo*).

Puesto que en un triángulo la longitud de uno de los lados es más pequeña que la suma de otros dos lados, la fig. 170 nos da

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$

es decir, *el módulo de la suma de dos vectores no supera la suma de módulos de estos vectores.*

En el caso de tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (fig. 171) su suma $\boldsymbol{s}$ es igual a la diagonal $\overrightarrow{OM}$ del paralelepípedo construido sobre estos vectores (*regla del paralelepípedo*).

Es fácil verificar que para la adición vectorial son justas las propiedades siguientes:

1) *propiedad conmutativa*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a},$$

es decir, *la suma vectorial no depende del orden de sumandos;*

2) *propiedad asociativa*

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},$$

es decir, *la suma de tres (o más) vectores no depende del orden de colocación de los paréntesis.*

Para cada vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ (fig. 172) existe un vector opuesto $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA'}$ que tiene una misma longitud, pero está dirigido en

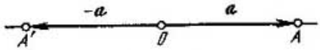

Fig. 172

sentido opuesto. Según la regla del paralelogramo tenemos, evidentemente,

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0},$$

donde $\boldsymbol{0}$ es el **vector nulo**.

Es fácil verificar que

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}.$$

§ 3. Diferencia de vectores

Se llama *diferencia de vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ (fig. 173) al vector

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},$$

tal, que

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}. \qquad (1)$$

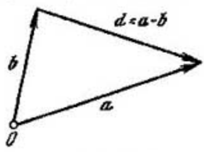

Fig. 173

Notemos que en el paralelogramo construido sobre los vectores dados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (fig. 170) su diferencia está representada por la segunda diagonal, convenientemente orientada de este paralelogramo.

El fácil verificar que es justa la regla siguiente de sustracción:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

§ 4. Multiplicación de un vector por un escalar

DEFINICION. *Llámase* ***producto de un vector a por un escalar*** k (fig. 174) *a un vector*

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}k$$

de longitud $b = |k| a$, *cuya dirección:* 1) *coincide con la dirección del vector* $\boldsymbol{a}$, *si* $k > 0$; 2) *es de sentido contrario si* $k < 0$; 3) *es arbitraria si* $k = 0$.

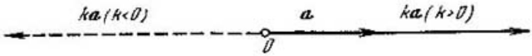

Fig. 174

No es difícil de convencerse de que esta operación vectorial posee las siguientes propiedades:

1) $(k + l)\,\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$,

$k\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$

2) $k\,(l\boldsymbol{a}) = (kl)\,\boldsymbol{a}$;

3) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \quad (-1)\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}, \quad 0 \cdot \boldsymbol{a} = 0$

(k, l son escalares).

EJEMPLO. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}$.

Si un vector no nulo $\boldsymbol{a}$ se divide por su longitud $a = |\boldsymbol{a}|$ (es decir, se multiplica por el escalar $1/a$), se obtiene un vector unitario $\boldsymbol{e}$ llamado *orto* de mismo sentido: $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}/a$. De donde se deduce la fórmula estándar de un vector

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}. \tag{1}$$

La fórmula (1) es formalmente justa también para un vector nulo $\boldsymbol{a} = 0$, donde $a = 0$ y $\boldsymbol{e}$ es un vector unitario arbitarario.

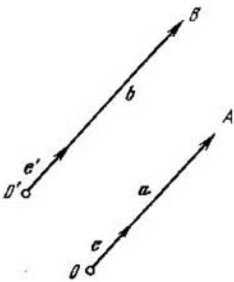

Fig. 175

§ 5. Vectores colineales

DEFINICIÓN. *Dos vectores* $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ *y* $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{O'B}$ (fig. 175) *se llaman* ***colineales***, *si ellos son paralelos en sentido amplio (es decir, si están situados sobre rectas paralelas o sobre una misma recta).*

Como la dirección de un vector nulo es absolutamente arbitraria, se puede considerar **que el vector nulo es colineal a cualquier vector.**

TEOREMA. *Dos vectores no nulos* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son colineales, si y sólo si, ellos son proporcionales*, es decir, *si*

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \tag{1}$$

(k es un escalar).

DEMOSTRACIÓN 1) Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$) son colineales y $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ son sus vectores unitarios.

Tenemos

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}'. \tag{2}$$

Es evidente que

$$\boldsymbol{e}' = \pm \boldsymbol{e}, \tag{3}$$

donde el signo «+» corresponde a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de igual sentido y el signo «—», a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de sentidos opuestos.

De las fórmulas (2) y (3) deducimos que

$$\boldsymbol{b} = \pm b\boldsymbol{e} = \pm\frac{b}{a}\cdot(a\boldsymbol{e}) = \pm\frac{b}{a}\boldsymbol{a}.$$

De donde se deduce la fórmula (1), donde $k = \pm\frac{b}{a}$.

2) Si la igualdad (1) está cumplida, el carácter colineal de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se deduce inmediatamente del sentido de la multiplicación de vectores por un escalar (§ 4).

§ 6. Vectores coplanares

DEFINICION. *Tres vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *se llaman coplanares, si ellos son paralelos en sentido amplio a un cierto plano* (es decir, *son paralelos a un plano o están situados en este plano*).

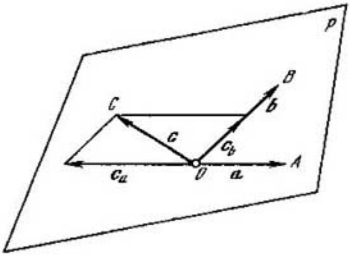

Fig. 176

Se puede decir también que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares si, y sólo si, ellos después de llevarse a un origen común, se encuentran en un mismo plano.

De acuerdo con la definición, tres vectores, entre los cuales por lo menos uno es nulo, son coplanares.

TEOREMA. *Tres vectores no nulos,* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *son coplanares si, y solo si, uno de ellos es una combinación lineal de los otros dos*, es decir, por ejemplo,

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \tag{1}$$

(k, l son escalares).

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares, están situados en un plano P (fig. 176) y tienen un punto de aplicación común (origen común) O.

Supongamos primeramente que estos vectores no son todos colineales de par en par, por ejemplo, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales. En este caso, descomponiendo el vector $\boldsymbol{c}$ en una suma de vectores $\boldsymbol{c}_a$ y $\boldsymbol{c}_b$ respectivamente colineales a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ obtendremos, en virtud del § 5,

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_a + \boldsymbol{c}_b = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}, \qquad (2)$$

donde k y l son los escalares correspondientes.

Si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ son colineales de par en par, se puede escribir

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b}, \qquad (3)$$

y resulta que de este modo de nuevo se satisface la condición (1).

2) Recíprocamente, si los vectores $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ (fig. 176) satisfacen la condición (1), en virtud del sentido de las operaciones vectoriales correspondientes, el vector $\boldsymbol{c}$ está situado en un plano que contiene los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, es decir, estos vectores son coplanares.

EJEMPLO. Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ son coplanares, porque

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

§ 7. Proyección de un vector sobre un eje

Llámase *eje* a una recta orientada. El sentido de la recta está generalmente indicado por una flecha. El sentido dado del eje se considera positivo, el otro se llama **negativo**.

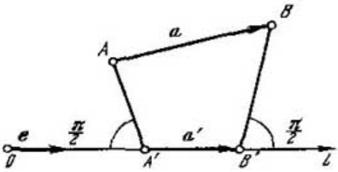

Fig. 177

DEFINICIÓN 1. *Llámase proyección de un punto A sobre un eje l* (fig. 177) *a la base A' de la perpendicular AA' trazada del punto A a este eje.*

Aquí se entiende por perpendicular AA' la recta que interseca el eje l y forma con éste un ángulo recto [1]). De este modo, la proyección A' es la intersección del eje l con el plano que pasa por el punto A y es perpendicular al eje l.

DEFINICIÓN 2. *Llámase componente de un vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ respecto al eje l* (fig. 177) *a un vector*

$$\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{A'B'}$$

cuyo origen A' es la proyección del origen A del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el eje l y cuyo extremo B' es la proyección del extremo B de este vector sobre el eje l.

---

[1]) Recordemos que todos los objetos geométricos se examinan aquí en el espacio tridimensional.

DEFINICIÓN 3 *Llámase* ***proyección de un vector a sobre un eje l*** *a un escalar*

$$a_l = \pm \mid \overrightarrow{A'B'} \mid$$

igual a la longitud (al módulo) de componente a' respecto al eje l tomado con el signo más, si la dirección de la componente coincide con la del eje l y menos en caso contrario.

Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, consideran que $a_l = 0$.

Notemos que si $\boldsymbol{e}$ es el vector unitario del eje l, para la componente $\boldsymbol{a}'$ es justa la igualdad

$$\boldsymbol{a}' = a_l \boldsymbol{e}. \qquad (1)$$

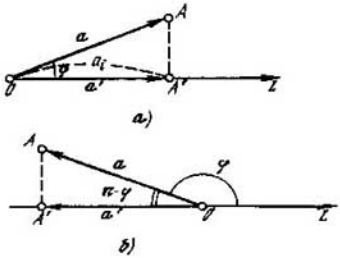

Fig. 178

TEOREMA 1. *La proyección de un vector* $\boldsymbol{a}$ *sobre el eje l es igual al producto de la longitud a del vector por el coseno del ángulo formado por la dirección del eje y la del vector, es decir:*

$$a_l = a \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(\boldsymbol{a}, l). \; (2)$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que el vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ es libre (fig. 178), se puede suponer que su origen O se encuentra sobre el eje l.

1) Si el ángulo φ formado por el vector $\boldsymbol{a}$ y el eje l es agudo $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, la dirección de la componente $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{OA'}$ del vector $\boldsymbol{a}$ coincide con la del eje l (fig. 178, a). En este caso tenemos

$$a_l = \text{proy}_l \boldsymbol{a} = + \mid \overrightarrow{OA'} \mid = \mid \overrightarrow{OA} \mid \cos \varphi = a \cos \varphi.$$

2) Si el ángulo φ formado por el vector $\boldsymbol{a}$ y el eje l es obtuso $\left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi\right)$ (fig. 178, b), la dirección de la componente $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{OA'}$ del vector $\boldsymbol{a}$ es opuesta a la del eje l. En este caso obtenemos

$$a_l = \text{proy}_l \, \boldsymbol{a} = - \mid \overrightarrow{OA'} \mid = - \mid \overrightarrow{OA} \mid \cos (\pi - \varphi) = a \cos \varphi.$$

De este modo, la fórmula (2) queda demostrada.

COROLARIO 1. *La proyección de un vector sobre un eje es:* 1) ***positiva****, si el ángulo formado por el vector y el eje es agudo;* 2) ***negativa****, si este ángulo es obtuso;* 3) *igual a cero, si este ángulo es recto.*

COROLARIO 2. *Las proyecciones de vectores iguales sobre un mismo eje, son iguales entre sí.*

TEOREMA 2. *La proyección de la suma de varios vectores sobre un eje dado es igual a la suma de las proyecciones de estos vectores sobre este eje.*

DEMOSTRACIÓN Sea, por ejemplo,

$$s = a + b + c,$$

donde (fig. 179) $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{AB}$ y $c = \overrightarrow{BC}$ y, por consiguiente, $s = \overrightarrow{OC}$.

Designando las proyecciones de los puntos O, A, B, C sobre el eje l por O', A', B', C' y teniendo en cuenta el sentido de las componentes (véase la fig. 179) tenemos

$$\text{proy}_l\, s = +\,|\overrightarrow{O'C'}| = +\,|\overrightarrow{O'A'}| + |\overrightarrow{A'B'}| - |\overrightarrow{B'C'}| = \\ = \text{proy}_l\, a + \text{proy}_l\, b + \text{proy}_l\, c, \quad (3)$$

lo que se debía demostrar.

COROLARIO *La proyección de una línea vectorial cerrada sobre cualquier eje es igual a cero.*

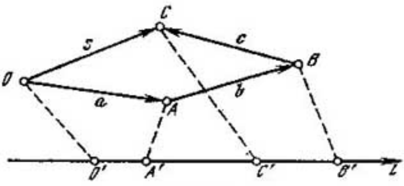

Fig. 179

TEOREMA 3 *Al multiplicar un vector por un escalar, su proyección sobre el eje dado se multiplica por este escalar*, es decir,

$$\text{proy}_l\,(ka) = k\,\text{proy}_l\, a. \quad (4)$$

La fórmula (4) se deduce del teorema 1 y del sentido de la multiplicación de un vector por un escalar.

COROLARIO. *La proyección de una combinación lineal de vectores es igual a la combinación lineal de las proyecciones de estos vectores*, es decir,

$$\text{proy}_l\,(k_1 a + k_2 b) = k_1\,\text{proy}_l\, a + k_2\,\text{proy}_l\, b.$$

§ 8. Coordenadas cartesianas en el espacio

Sean (fig. 180) Ox, Oy, Oz, tres ejes mutuamente perpendiculares en el espacio tridimensional (*ejes de las coordenadas*) que parten de un punto común O (*origen de las coordenadas*) y forman *tres números derechos* (**es sistema derecho de coordenadas**), es decir, orientados según la regla de sacacorchos. En otras palabras un observador dirigido según el eje Oz, el giro más corto del eje Ox hacia el eje Oy, es a sinistrorso. Tres planos Oyz, Ozx, y Oxy, mutuamente perpendiculares que pasan por los ejes correspondientes, se llaman *planos de las coordenadas*; ellos dividen todo el espacio en ocho **octantes**.

Para cada punto M del espacio (fig. 180) existe un radio vector $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ cuyo origen es el origen de las coordenadas O y cuyo extremo es el punto dado M.

DEFINICIÓN. *Llámanse* ***coordenadas cartesianas rectangulares*** *x, y, z de un punto M, las proyecciones de su radio vector $\boldsymbol{r}$ sobre los ejes de las coordenadas correspondientes*:

$$x = r_x, \quad y = r_y, \quad z = r_z. \quad (1)$$

En adelante, para abreviar la exposición llamaremos a las coordenadas cartesianas rectangulares solamente **coordenadas rectangulares.**

Un punto M de coordenadas x, y, z se designa por $M(x, y, z)$; la primera coordenada se llama *abscisa*; la segunda, *ordenada*, y la tercera, *aplicada* del punto M.

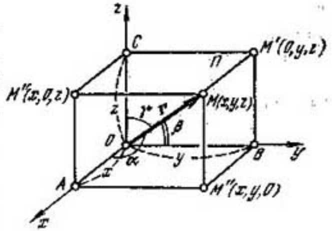

Fig. 180

Para hallar estas coordenadas tracemos por el punto M tres planos MA, MB, MC perpendiculares respectivamente a los ejes Ox, Oy, Oz (fig. 180). En este caso obtenemos sobre estos ejes los segmentos orientados

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z, \tag{2}$$

que son numéricamente iguales a las coordenadas del punto M.

El radio vector $\boldsymbol{r}$ es la diagonal del paralelepípedo Π de dimensiones $|x|$, $|y|$, $|z|$, formado por los planos MA, MB, MC y los planos de las coordenadas. Por eso

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3}$$

Si designamos por α, β, γ $(0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant \pi)$ los ángulos formados por el radio vector $\boldsymbol{r}$ y los ejes de las coordenadas, tendremos

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma. \tag{4}$$

Los $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se llaman *cosenos directores* del radio vector $\boldsymbol{r}$. Teniendo en cuenta la (3) se obtiene de las (4)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \tag{5}$$

es decir, *la suma de los cuadrados de cosenos directores del radio vector de un punto del espacio es igual a* 1.

De las fórmulas (4) se deduce que la coordenada del punto M es **positiva**, si el ángulo formado por el radio vector de este punto y el eje de las coordenadas correspondiente es agudo, y **negativa**, si este ángulo es obtuso. En particular, en el primer octante del espacio, cuyas aristas constituyen los semiejes positivos de coordenadas, todas las coordenadas de los puntos son positivas. En los otros octantes del espacio las coordenadas negativas de los puntos serán aquellas que corresponden a las aristas del octante orientadas en sentidos negativos.

Las dimensiones $|x|$, $|y|$, $|z|$ del paralelepípedo Π son iguales a las distancias respectivas del punto M a los planos de las coordenadas Oyz, Ozx, Oxy. De este modo, *las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto M del espacio representan las distancias entre este punto y los planos de coordenadas tomadas con los signos correspondientes.*

En particular, si el punto $M(x, y, z)$ pertenece al plano Oyz, entonces $x = 0$; si pertenece al plano Ozx, $y = 0$, y si está en el plano Oxy, $z = 0$, y viceversa.

§ 9. Longitud y dirección de un vector

Sea $\boldsymbol{a}$ un vector dado en el espacio $Oxyz$. Las proyecciones de este vector sobre los ejes de coordenadas

$$a_x = \text{proy}_x \boldsymbol{a}, \quad a_y = \text{proy}_y \boldsymbol{a}, \quad a_z = \text{proy}_z \boldsymbol{a} \tag{1}$$

se llaman *coordenadas del vector* $\boldsymbol{a}$; en este caso el vector será escrito así: $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Puesto que el vector $\boldsymbol{a}$ es libre, él puede ser considerado como el radio vector del punto $M(a_x, a_y, a_z)$. De aquí obtenemos la longitud del vector

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2}$$

es decir, *el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de sus coordenadas.*

Los cosenos directores del vector $\boldsymbol{a}$ se determinan mediante las ecuaciones

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma, \tag{3}$$

y

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{4}$$

es decir, *la suma de cuadrados de cosenos directores de un vector es igual a la unidad.* Los cosenos directores de un vector no nulo determinan unívocamente su dirección. Por consiguiente, un vector se caracteriza enteramente por sus coordenadas.

EJEMPLO. Hallar la longitud y la dirección del vector $\boldsymbol{a} = \{1, 2, -2\}$.

Tenemos

$$a = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

y

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{1}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} = -\frac{2}{3}.$$

De donde

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 70°30', \quad \beta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48°10',$$
$$\gamma = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131°50'.$$

De este modo, el vector $\boldsymbol{a}$ forma ángulos agudos con los ejes de coordenadas Ox y Oy y un ángulo obtuso con el eje Oz.

§ 10. Distancia entre dos puntos del espacio

Sean $M_1(x_1, y_1, z_1)$ el origen del segmento $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ su extremo. Los puntos M_1 y M_2 pueden ser dados por sus radio vectores $\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ y $\boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ (fig. 181). Examinando el vector $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, del $\triangle OM_1M_2$

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \qquad (1)$$

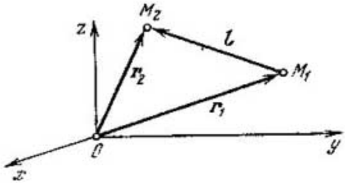

Fig. 181

Proyectando esta igualdad vectorial sobre los ejes de las coordenadas y teniendo en cuenta las propiedades de las proyecciones, obtendremos

$$l_x = x_2 - x_1, \quad l_y = y_2 - y_1,$$
$$l_z = z_2 - z_1. \qquad (2)$$

De este modo, *las proyecciones de un segmento orientado sobre los ejes de las coordenadas son iguales a las diferencias de las coordenadas correspondientes del extremo y del origen de este segmento.*

Mediante la fórmula (2) obtenemos la **longitud del segmento** (o de otro modo la **distancia entre dos puntos** M_1 y M_2)

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3)$$

Entonces, *la distancia entre dos puntos del espacio es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias entre las coordenadas de mismo nombre de estos puntos.*

EJEMPLO. Un cohete se desplaza rectilíneamente desde el punto M_1 (10, −20, 0) al punto M_2 (−30, −50, 40) (las distancias están indicadas en kilómetros). Calcular el camino l recorrido por el cohete.

Aplicando la fórmula (3) tenemos

$$l = \sqrt{(-30-10)^2 + (-50+20)^2 + (40-0^2)} =$$
$$= \sqrt{1600 + 900 + 1600} = \sqrt{4100} \approx 64{,}4 \text{ km}.$$

Notemos que al calcular los cosenos directores del vector del desplazamiento de l no es difícil determinar la dirección del movimiento del cohete.

§ 11. Operaciones sobre vectores, dados por sus coordenadas

Sea $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ un vector dado por sus proyecciones sobre los ejes de cordenadas Ox, Oy, Oz.

Construyamos un paralelepípedo (fig. 182), cuya diagonal es el vector $\boldsymbol{a}$ y de aristas sirven sus componentes $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ respecto a los ejes de coordenadas correspondientes. Tenemos la descomposición

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3. \quad (1)$$

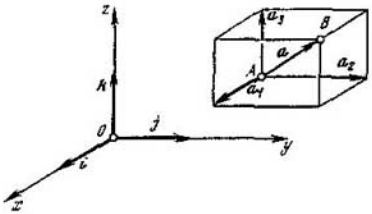

Fig. 182

Si introducimos vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ orientados según los ejes de las coordenadas, teniendo en cuenta la relación que existe entre las componentes de un vector y sus proyecciones (§ 7) tendremos

$$\boldsymbol{a}_1 = a_x \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{a}_2 = a_y \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{a}_3 = a_z \boldsymbol{k}. \quad (2)$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (1) obtenemos *la forma coordenada del vector*

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \quad (3)$$

Notemos que la descomposición (3) del vector $\boldsymbol{a}$ es única. Efectivamente, sea

$$\boldsymbol{a} = a'_x\boldsymbol{i} + a'_y\boldsymbol{j} + a'_z\boldsymbol{k}. \quad (3')$$

De donde, restando la igualdad (3′) de la igualdad (3) y utilizando las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de vectores (§ 2), así como las propiedades de la diferencia de vectores (§ 3) tendremos

$$0 = (a_x - a'_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y - a'_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z - a'_z)\,\boldsymbol{k}.$$

Si por lo menos uno de los coeficientes de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ es distinto de cero, los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ serían coplanares (§ 5), lo que es falso. Por esó

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z,$$

y la unicidad de la descoposición (3) queda demostrada.

Si $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, es evidente que tenemos también

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}. \quad (4)$$

Las operaciones lineales sobre vectores que acabamos de examinar, pueden ser escritas ahora así:

1) $$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k},$$

o, más brevemente: $\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$ (λ es un escalar). De este modo, *para multiplicar un vector por un escalar se multiplican las* *coordenadas del vector por este escalar.*

2) $$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\,\boldsymbol{k}$$

o, más brevemente: $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z\}$.

De este modo, *para sumar (restar) vectores se suman (se restan) sus coordenadas homónimas.*

EJEMPLO. Hallar el valor y la dirección de la resultante $\boldsymbol{F}$ de dos fuerzas

$$\boldsymbol{F}_1 = \{10,\ 20,\ 30\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F}_2 = \{30,\ 20,\ 10\}.$$

Tenemos

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \{10 + 30,\ 20 + 20,\ 30 + 10\} = \{40,\ 40,\ 40\}.$$

De donde

$$F = |\boldsymbol{F}| = 40\sqrt{3}$$

y

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3},$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, son los cosenos directores de la resultante $\boldsymbol{F}$.

§ 12. Producto escalar de vectores

DEFINICION. ***El producto escalar*** *de dos vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *es el número obtenido de multiplicar las longitudes (módulos) de estos vectores por el*

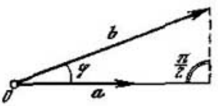

Fig. 183

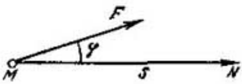

Fig. 184

coseno del ángulo formado por ellos, es decir, con las notaciones usuales

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \equiv (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = ab\cos\varphi, \tag{1}$$

donde $\varphi = \angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$.

Notemos que en la fórmula (1) el producto escalar puede ser escrito además como $\boldsymbol{ab}$ omitiendo el punto. Puesto que (fig. 183)

$$b = \cos\varphi = \text{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \quad \text{y} \quad a\cos\varphi = \text{proy}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a},$$

se puede escribir

$$\boldsymbol{ab} = a\cdot\text{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = b\cdot\text{proy}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}, \tag{2}$$

es decir, *el producto escalar de dos vectores es igual a la longitud de uno de ellos multiplicada por la proyección del otro vector sobre el eje que tiene la dirección del primero.*

Interpretación física del producto escalar. Sea $\boldsymbol{F}$ una fuerza constante que asegura un desplazamiento rectilíneo $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{MN}$ de un punto material. Si la fuerza $\boldsymbol{F}$ forma un ángulo φ con el desplazamiento $\boldsymbol{s}$ (fig. 184), entonces como aprendimos en Física, el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}$ para efectuar el desplazamiento $\boldsymbol{s}$ es igual

$$A = Fs \cos \varphi.$$

Según la fórmula (1) se tiene

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \tag{3}$$

de este modo, *el trabajo realizado por una fuerza constante durante un desplazamiento rectilíneo de su punto de aplicación es igual al producto escalar del vector de la fuerza por el vector del desplazamiento.*

Las propiedades principales del producto escalar de vectores son las siguientes:

1) *El producto escalar de dos vectores no depende del orden de estos vectores* (***propiedad conmutativa***);

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}. \tag{4}$$

Esta fórmula se deduce inmediatamente de la (1).

2) Para tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, es justa la **propiedad distributiva**;

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}, \tag{5}$$

es decir, *en el producto escalar de una suma de vectores por un vector se puede «abrir el paréntesis».*

Efectivamente en base a la fórmula (2) y teniendo en cuenta las propiedades de las proyecciones de vectores (el teorema 2 del § 7) tenemos

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \text{proy}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\text{proy}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} + \text{proy}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} =$$
$$= \text{proy}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \text{proy}\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}.$$

3) *El producto escalar de un vector por sí mismo (cuadrado escalar de un vector) es igual al cuadrado del módulo de este vector*, es decir

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2.$$

Efectivamente

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = aa \cos (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}}) = a^2.$$

De donde obtenemos la fórmula para el vector

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}. \tag{6}$$

4) *Se puede sacar un factor escalar del signo del producto escalar*, es decir,

$$(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{7}$$

Esta propiedad se obtiene fácilmente de la (1).

(5) *El producto escalar de una combinación lineal de vectores por un vector arbitrario es igual a la misma combinación lineal de*

vectores dados, por este vector, es decir,

$$(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c}) = \lambda (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{c}) + \mu (\boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c})$$

(λ y μ son escalares).

Es una consecuencia evidente de 2) y 4).

De la definición (1) resulta que el coseno del ángulo $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ entre dos vectores no nulos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab}. \tag{8}$$

De la fórmula (8) se deduce que *dos vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son perpendiculares (ortogonales)*, es decir, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, si y sólo si,

$$\boldsymbol{ab} = 0. \tag{9}$$

Esta afirmación es también justa para el caso cuando por lo menos un vector $\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$ es nulo.

EJEMPLO. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el vector $\boldsymbol{b}$.

Designando por φ el ángulo formado por estos vectores tenemos

$$\text{proy}_b \ \boldsymbol{a} = a \cos \varphi = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b} = \boldsymbol{ae},$$

donde $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{b}}{b}$ es el vector unitario del vector $\boldsymbol{b}$.

§ 13. Producto escalar de vectores dados por sus coordenadas

Sea

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \tag{1}$$

y

$$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Multiplicando estos vectores como polinomios (algo correcto en virtud de las propiedades del § 12) y teniendo en cuenta las relaciones

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0$$

y

$$\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1$$

tendremos

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3}$$

De este modo, *el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de productos de sus coordenadas homónimas*. De aquí, designando por φ el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ obtendremos

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4}$$

EJEMPLO. Determinar el ángulo φ formado por los vectores

$$\boldsymbol{a} = \{1, +2, 3\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \{-3, 2, -1\}.$$

Según la fórmula (4) tenemos

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot(-3)+2\cdot 2+3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}} = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7} = -0{,}143.$$

De donde

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) \approx 98^\circ 10'.$$

Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales (paralelos). De acuerdo con la condición de carácter colineal (§ 5)

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}, \tag{5}$$

donde k es un escalar, equivale a $b_x = ka_x$, $b_y = ka_y$, $b_z = ka_z$ o

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \tag{6}$$

De este modo, *los vectores son colineales si, y sólo si, sus coordenadas homónimas son proporcionales.*

Para los vectores perpendiculares (ortogonales) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tenemos

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

y, por consiguiente, $\cos\varphi = 0$ o según la fórmula (4)

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Entonces, *dos vectores son perpendiculares si, y sólo si, la suma de los productos pares de sus coordenadas homónimas es igual a cero.*

§ 14. Producto vectorial de vectores

Recordamos que tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ no coplanares forman un sistema *derecho* (fig. 185, *a*) o *izquierdo* (fig. 185, *b*), si está orientado por la regla de la mano derecha o de la mano izquierda, respectivamente.

Observemos que si en el sistema de tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, se permutan dos vectores, el sistema cambia su orientación, o sea, si era derecho pasa a ser izquierdo, y viceversa.

En adelante al sistema derecho de tres vectores, lo consideraremos **estándar.**

DEFINICION. *Llámase **producto vectorial** de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ a otro vector*

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \tag{1}$$

para el cual:

1) *el módulo es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores dados*, es decir,

$$c = |\boldsymbol{c}| = ab \operatorname{sen} \varphi, \tag{2}$$

donde $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ (fig. 186);

2) *este vector es perpendicular a los vectores que se multiplican* (en otras palabras, es perpendicular al plano del paralelogramo construido sobre ellos), es decir $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$;

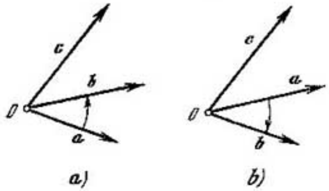

Fig. 185

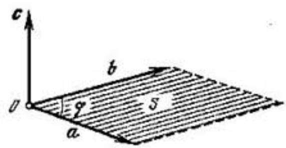

Fig. 186

3) *si los vectores no son colineales, los vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *forman un sistema derecho de tres vectores*

Indiquemos las propiedades principales del producto vectorial.

1) *Si se cambia el orden de factores el producto vectorial cambia su signo por el opuesto conservando el módulo*, es decir,

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{3}$$

Efectivamente, al permutar los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ el área del paralelogramo construido sobre ellos permanece invariable, es decir,

$$|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

Sin embargo, los tres vectores $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ forman un sistema izquierdo. Por eso, la dirección del vector $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ es opuesta a la dirección del vector $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales). Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales, la igualdad (3) es evidente.

De este modo *el producto vectorial de dos vectores no es conmutativo*.

2) *El cuadrado vectorial es igual al vector nulo*, es decir,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Es una consecuencia evidente de la propiedad (1).

3) *Se puede sacar un factor escalar del signo del producto vectorial*, es decir, si λ es escalar,

$$(\lambda \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Esta propiedad se deduce directamente del sentido del producto del vector por el escalar y de la definición del producto vectorial.

4) *Para cualesquiera tres vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *es justa la igualdad*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}), \tag{4}$$

es decir, el producto vectorial posee la **propiedad distributiva.**

Ejemplo.

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})=$$
$$=0+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+0=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

de donde, en particular, tenemos

$$|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=2\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,$$

es decir, el área del paralelogramo construido sobre las diagonales del paralelogramo dado es igual al área doble de este paralelogramo.

Con ayuda del producto vectorial es cómodo formular **la condición suficiente y necesaria de la colinealidad** de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, que se comprueba fácilmente:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0.$$

§ 15. Producto vectorial dado por sus coordenadas

Sean

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1}$$

y

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Multiplicando vectorialmente estas igualdades y utilizando las propiedades del producto vectorial obtenemos la suma de nueve sumandos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=&[a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})]+\\&+[a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})]+\\&[a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})].\end{aligned} \tag{3}$$

De la definición del producto vectorial se deduce que para los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ es justa la siguiente «tabla de multiplicar»:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

y

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=$$
$$=-(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}.$$

Por eso, mediante la fórmula (3) obtenemos

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\boldsymbol{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\boldsymbol{k}(a_xb_y-a_yb_x)=$$
$$=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix} \tag{4}$$

conservando el orden de seguimiento de letras x, y, z).

Para que se pueda recordar con más comodidad, la fórmula (4) se escribe en forma de un determinante del tercer orden (véase el cap. XVII)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{5}$$

De la fórmula (4) se deduce que

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2. \tag{6}$$

Geométricamente, la fórmula (6) da el cuadrado del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

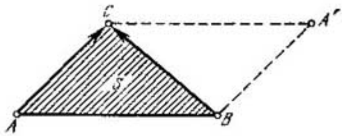

Fig. 187

EJEMPLO. Hallar el área del triángulo ABC de vértices A (1, 1, 0), B (1, 0, 1) y C (0, 1, 1).

El área S del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2}$ del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (fig. 187). Utilizando las fórmulas para las proyecciones de segmentos orientados (§ 10) tenemos

$$\overrightarrow{AB}=\{0,\,-1,\,1\}\quad \text{y}\quad \overrightarrow{AC}=\{-1,\,0,\,1\};$$

de donde

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

Por consiguiente,

$$S=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

§ 16. Producto mixto de vectores

DEFINICIÓN. *Llámase* ***producto mixto*** *(o producto vectorial escalar)* ***de los vectores***, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *al número*

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \tag{1}$$

Construyamos un paralelepípedo Π (fig. 188) cuyas aristas son los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ que parten del origen común O.

En este caso, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=S$ es el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, es decir, es el área de la base del paralelepípedo. La altura de este paralelepípedo H es evidentemente igual a

$$H = \pm \operatorname{proy}_S c = \pm c \cos \varphi, \tag{2}$$

donde $S = a \times b$ y el signo «+» corresponde al ángulo agudo $\varphi = \angle(c, S)$, y el signo «—» corresponde al ángulo obtuso φ. En el primer caso, los vectores a, b, c forman un sistema derecho y en el segundo caso, un sistema izquierdo.

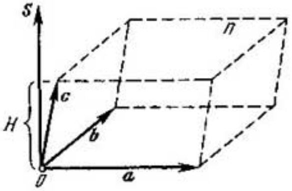
Fig. 188

De acuerdo con la definición del producto escalar (§ 12) tenemos

$$(a \times b)\, c = Sc = S \cdot \operatorname{proy}_S c = \pm SH = \pm V, \tag{3}$$

donde V es el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores a, b, c.

De aquí,

$$abc = \pm V,$$

es decir, *el producto mixto de tres vectores es igual al volumen V del paralelepípedo, construido sobre estos vectores, tomado con el signo «+», si estos vectores forman un sistema derecho, y con el signo «—», si ellos forman un sistema izquierdo.*

Son justas las siguientes propiedades del producto mixto.

1) *Un producto mixto no varía con la permutación cíclica de sus factores*, es decir,

$$abc = bca = cab.$$

Efectivamente, en este caso no cambia el volumen del paralelepípedo Π, ni la orientación de sus aristas.

2) *Al permutar dos factores adyacentes, un producto mixto cambia su signo por el inverso*, es decir,

$$bac = acb = cba = -abc.$$

Esto se deduce del hecho de que una permutación de factores adyacentes, conserva el volumen del paralelepípedo y cambia la orientación de los tres vectores, es decir, un sistema derecho pasa a ser izquierdo y viceversa.

Con ayuda del producto mixto obtenemos la condición necesaria y suficiente de la coplanaridad de tres vectores a, b, c:

$$abc = 0$$

(el volumen del paralelepípedo es igual a cero).

Si

$$a = a_x i + a_y j + a_z k,$$
$$b = b_x i + b_y j + b_z k,$$
$$c = c_x i + c_y j + c_z k,$$

utilizando las expresiones para los productos vectorial (§ 15) y escalar (§ 13), obtendremos

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) =$$

$$= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

es decir,

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

EJERCICIOS

1. Hallar la longitud y la dirección del vector

$$\boldsymbol{a} = \{1,\ -1,\ \sqrt{2}\}.$$

2. Hallar el valor y la dirección de la resultante $\boldsymbol{F}$ de tres fuerzas $\boldsymbol{F}_1 = \{10,\ 20,\ 0\}$, $\boldsymbol{F}_2 = \{0,\ -10,\ 20\}$, $\boldsymbol{F}_3 = \{-10,\ 0,\ -20\}$.

3. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a} = \{1,\ 2,\ -2\}$ sobre el vector $\boldsymbol{b} = \{1,\ 0,\ -1\}$.

4. Calcular el trabajo de la fuerza $\boldsymbol{F} = \{10,\ 20,\ 30\}$, si el punto de su aplicación efectúa un desplazamiento rectilíneo del punto $M\ (0,\ 1,\ 2)$ al punto $N\ (3,\ -4,\ 5)$.

5. Calcular el área S y el ángulo φ del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = \{1,\ -2,\ 3\}$ y $\boldsymbol{b} = \{3,\ 2,\ 1\}$.

6. ¿Son coplanares los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$?

Capítulo XIX

Nociones de geometría analítica en el espacio

§ 1. Ecuación de la superficie y de la línea en el espacio

DEFINICIÓN 1. *Llámase* ***ecuación de la superficie*** *en el espacio $Oxyz$ a aquella, de variables x, y, z, que es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la superficie dada y no lo es por las coordenadas de los puntos que no se encuentran sobre esta superficie.*

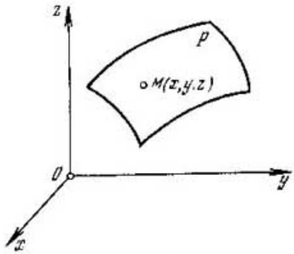

Fig. 189

Es decir, si

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

es una ecuación de una superficie P (fig. 189), entonces para $M(x, y, z) \in P$[1] tenemos $F(x, y, z) = 0$ y para $N(x, y, z) \notin P$[2] tenemos $F(x, y, z) \neq 0$.

De este modo la ecuación (1) es válida solamente cuando el punto $M(x, y, z)$ pertenece a esta superficie. Las coordenadas de un punto arbitrario de la superficie se llaman *coordenadas corrientes* del punto. Por eso para componer una ecuación de una superficie es necesario vincular entre sí las coordenadas corrientes de sus puntos.

EJEMPLO 1 **(ecuación de planos de coordenadas).**

Todo punto $M(x, y, z)$ situado sobre el plano de coordenadas Oyz tiene una abscisa $x = 0$; y viceversa, si para un punto cualquiera $M(x, y, z)$ su abscisa $x = 0$, este punto está situado sobre el plano Oyz. Por consiguiente,

$$x = 0$$

es la ecuación del plano de coordenadas Oyz.

De modo análogo

$$y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0$$

son, respectivamente, las ecuaciones de los planos de coordenadas Oxz y Oxy.

---

[1] La fórmula $M \in P$ significa que el punto M pertenece a la superficie P (véase el § 1 del cap. II).

[2] La fórmula $N \notin P$ significa que el punto N no pertenece a la superficie P.

En el caso más general

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c \tag{2}$$

son las ecuaciones de tres planos perpendiculares a los ejes de coordenadas Ox, Oy, Oz correspondientes, los cuales cortan sobre estos ejes segmentos iguales numéricamente a a, b y c.

TEOREMA *La ecuación de una superficie cilíndrica cuyas, generatrices son paralelas al eje de coordenadas, no contiene la coordenada corriente homónima con la de este eje de coordenadas, y viceversa.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos, por ejemplo, que una superficie cilíndrica P está formada por un desplazamiento de una recta $MN \parallel Oz$ (*generatriz*) a lo largo de la línea dada L, situada en el plano Oxy (*directriz*) (fig. 190).

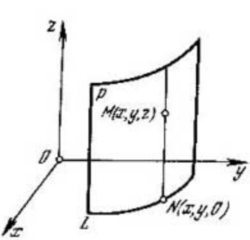

Fig. 190

Designamos por M (x, y, z) un punto de la superficie P de coordenadas corrientes x, y, z. La generatriz MN que pasa por el punto M corta la directriz evidentemente en el punto N $(x, y, 0)$.

Sea

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

la ecuación de la directriz L en el plano de coordenadas Oxy. Las coordenadas del punto N satisfacen esta ecuación. Puesto que el punto M de la superficie P tiene la misma abscisa x y la misma ordenada y que el punto N, y que la variable z no toma parte en la ecuación (3), entonces las coordenadas del punto M satisfacen también la ecuación (3). De este modo, las coordenadas de todo punto M (x, y, z) de la superficie P satisfacen la ecuación (3). A la inversa, si las coordenadas de un punto cualquiera M (x, y, z) satisfacen la ecuación (3), este punto está situado sobre una recta $MN \parallel Oz$ tal, que su traza sobre el plano Oxy, punto N $(x, y, 0)$, se encuentra sobre la línea L; lo que significa que el punto M pertenece a la superficie cilíndrica P. Por consiguiente,

$$P(x, y) = 0$$

es *la ecuación de la superficie cilíndrica* en el espacio $Oxyz$, además, en esta ecuación falta la coordenada z.

EJEMPLO 2 **(ecuación del cilindro elíptico).** *Un cilindro elíptico,* cuya base es una elipse de semiejes a y b y su eje es Oz (fig. 191) tiene, en virtud del teorema precedente, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En particular, para $a = b$, obtenemos la ecuación de un cilindro circular

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Una línea L en el espacio puede ser dada como una intersección de dos superficies dadas P_1 y P_2 (fig. 192). Un punto M (x, y, z) de

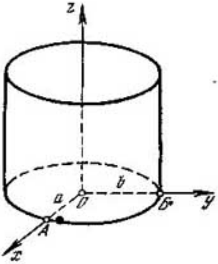

Fig. 191

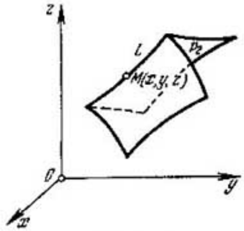

Fig. 192

la línea L pertenece tanto a la superficie P_1, como a la superficie P_2 y, por consiguiente, las coordenadas de este punto satisfacen las ecuaciones de ambas superficies.

Por eso, la ecuación de una línea en el espacio es un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

que son las ecuaciones de las superficies que determinan la línea dada.

No hay que pensar que para hallar las ecuaciones de una línea hace falta «resolver» el sistema (4). Esto, hablando en general, es imposible, porque el número de ecuaciones del sistema (4) es menor que el número de incógnitas. El sentido exacto de las igualdades (4) es el siguiente: *a la línea L le pertenecen solamente los puntos M (x, y, z) cuyas coordenadas satisfacen las dos ecuaciones del sistema* (4).

Notemos que la línea dada puede ser definida de modo distinto, como una intersección de superficies. Por eso a una línea en el espacio le corresponde un número infinito de sistemas de ecuaciones equivalentes.

DEFINICIÓN 2. *Llámanse* ***ecuaciones de la línea*** *en el espacio $Oxyz$ un par de ecuaciones tal, con variables x, y, z, al que satisfacen las coordenadas de todo punto perteneciente a la línea dada y no satisfacen las coordenadas de cualquier otro punto no perteneciente a esta línea.*

EJEMPLO 3. **(ecuaciones de los ejes de coordenadas).** El eje Ox puede ser considerado como una intersección de los planos de coordenadas Oxy y Oxz. Por eso

$$\left.\begin{array}{l} y=0, \\ z=0 \end{array}\right\}$$

es *la ecuación del eje* Ox.

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{l} x=0, \\ z=0 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} x=0, \\ y=0 \end{array}\right\}$$

son *las ecuaciones de los ejes* Oy *y* Oz, respectivamente.

EJEMPLO 4. Escribir la ecuación de una circunferencia Γ de radio $R = 1$, cuyo centro se encuentra en el punto C (0, 0, 2) y cuyo plano es paralelo al plano de coordenadas Oxy (fig. 193).

La circunferencia Γ puede ser considerada como una intersección de un cilindro circular de radio 1 y el eje Oz por un plano horizontal situado a dos

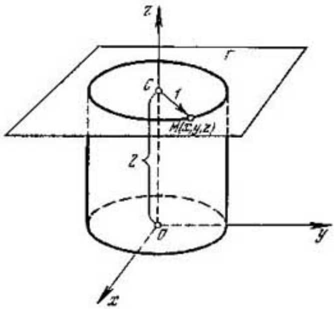

Fig. 193

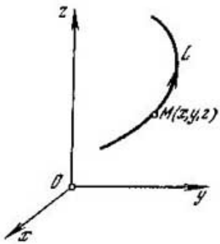

Fig. 194

unidades por encima del plano de coordenadas Oxy. Por eso la ecuación de la circunferencia Γ es

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=1, \\ z=2. \end{array}\right\}$$

En Mecánica la línea L se considera frecuentemente como *la traza de un punto en movimiento* (fig. 194). Sean x, y, z las coordenadas corrientes de un punto M de la línea L. Puesto que al pasar un tiempo el punto se desplaza y sus coordenadas varían, ellas son funciones del tiempo t. Por consiguiente, tenemos

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \tag{5}$$

donde φ, ψ, χ son funciones determinadas. Generalizando las ecuaciones (5), se toma t como una variable auxiliar (*parámetro*) y no obligatoriamente el tiempo; por eso las (5) se llaman *ecuaciones paramétricas de la línea en el espacio*.

Eliminando en las ecuaciones (5) el parámetro t obtendremos dos relaciones entre las coordenadas corrientes x, y y z, que son las ecuaciones de ciertas superficies que pasan por la línea dada.

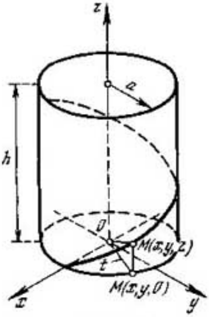

Fig. 195

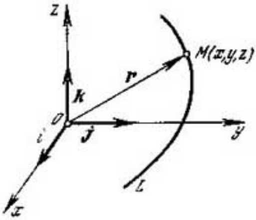

Fig. 196

EJEMPLO 5. Escribir la ecuación de una línea helicoidal de radio a y de paso h (fig. 195).

Sean $M(x, y, z)$ un punto corriente de la línea helicoidal y $M'(x, y, 0)$ su proyección sobre el plano Oxy.

Considerando que el parámetro $t = \angle M'Ox$ y teniendo en cuenta que la z-coordenada (aplicada) de la línea helicoidal crece proporcionalmente al ángulo de giro t, tendremos

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a \operatorname{sen} t, \\ z &= bt. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Para determinar el coeficiente de proporcionalidad b supongamos que $t = 2\pi$; en este caso $z = h$. Por consiguiente,

$$h = 2\pi b \quad \text{y} \quad b = \frac{h}{2\pi}.$$

Eliminando el parámetro t de la primera y de la segunda, así como de la primera y de la tercera ecuaciones de (6) obtendremos

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ x &= a\cos\frac{z}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Por consiguiente, una línea helicoidal es una intersección de un cilindro circular con generatrices paralelas al eje Oz con una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje Oy y cuya directriz es una sinusoide situada en el plano Oxz. De las ecuaciones (6′) se deduce también que la proyección de la línea helicoidal (6′) sobre el plano de coordenadas Oxy es una circunferencia y sobre el plano Oxz es una cosinusoide.

El punto corriente $M(x, y, z)$ de la curva L puede ser caracterizado por su radio vector (**«radio vector de seguimiento»**) (fig. 196)

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ son vectores unitarios). En este caso mediante las (5) obtenemos la ecuación vectorial de la línea

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), \tag{7}$$

donde

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{i}\varphi(t) + \boldsymbol{j}\psi(t) + \boldsymbol{k}\chi(t)$$

es la llamada *función vectorial del argumento escalar* t.

En Mecánica se toma generalmente por parámetro t el tiempo. En este caso la línea (7) se llama *trayectoria* del punto $M(x, y, z)$.

El conjunto de todos los puntos $M(x, y, z)$ del espacio, cuyas coordenadas satisfacen una ecuación dada (o un sistema de ecuaciones) se llama *imagen geométrica* (*gráfico*) de esta ecuación (o del sistema de ecuaciónes).

EJEMPLO 6 ¿Cuál es la imagen geométrica que corresponde a la ecuación

$$z^2 - 1 = 0? \tag{8}$$

Mediante la ecuación (8) obtenemos $z = 1$ ó $z = -1$. Por consiguiente el gráfico de la ecuación (8) es un par de planos paralelos al plano de coordenadas Oxy situados respecto a éste a distancias iguales a la unidad (fig. 197).

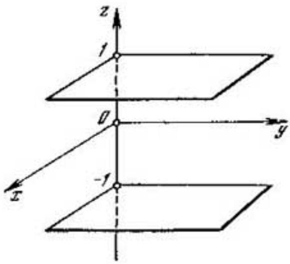

Fig. 197

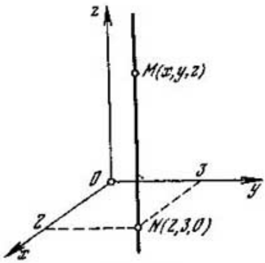

Fig. 198

EJEMPLO 7. ¿Qué imagen geométrica corresponde al sistema de dos ecuaciones

$$x = 2, \quad y = 3?$$

La imagen buscada es la intersección de planos $x = 2$ e $y = 3$ y, por consiguiente, es una línea recta paralela al eje Oz y que tiene la traza $N(2, 3, 0)$ sobre el plano de coordenadas Oxy (fig. 198).

§ 2. Ecuación general de plano

Un plano P puede estar definido en el espacio por uno de sus puntos $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector no nulo $N\{A, B, C\}$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ perpendicular a este plano (*vector normal* o *directriz* del plano). Sean $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ el radio vector del punto M_0 y $r = \{x, y, z\}$ el radio vector de un punto arbitrario M del plano (radio vector corriente) (fig. 199). En este caso el vector $r - r_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ está situado en este plano y, por consiguiente, es ortogonal al vector N, es decir, $N \perp (r - r_0)$. Utilizando la condición de ortogonalidad de dos vectores (§ 12 del cap. XVIII) tenemos

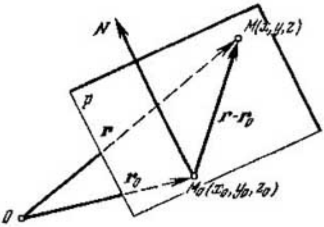

Fig. 199

$$N \cdot (r - r_0) = 0. \qquad (1)$$

Esta es justamente *la ecuación del plano en forma vectorial*. En forma de coordenadas la ecuación (1) resulta

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (2)$$

o

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3)$$

donde

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \equiv -Nr_0.$$

La ecuación (3) se llama *ecuación general del plano*. Esta es una ecuación de primer grado respecto a las coordenadas corrientes x, y, z. De este modo, **el plano es una superficie de primer grado.**

Y viceversa, sea dada una ecuación no degenerada (3) $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$. Elijamos un punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente a la superficie (3) (por ejemplo, si $A \neq 0$, se puede tomar $M_0(-D/A, 0, 0)$ en calidad de tal punto). Tenemos

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (4)$$

Sustrayendo miembro a miembro la ecuación (4) de la (3), tendremos

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (5)$$

De donde, introduciendo los vectores $N = \{A, B, C\}$, $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ y $r = \{x, y, z\}$, obtendremos

$$N(r - r_0) = 0.$$

Por consiguiente, la superficie dada por la ecuación (3) es **un plano que pasa por el punto** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **y es perpendicular al vector** N.

EJEMPLO 1. Hallar el ángulo formado por el plano $x - 2y + 2z - 10 = 0$ y el eje Oz.

Por ángulo ψ formado por una recta y un plano se entiende el ángulo entre esta recta y su proyección sobre este plano, este ángulo es el complemento del ángulo φ formado por la recta y la perpendicular (normal) al plano.

El vector normal de nuestro plano es $\boldsymbol{N} = \{1, -2, 2\}$. De aquí

$$\operatorname{sen}\psi = \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{2}{3}$$

y, por consiguiente

$$\psi = \operatorname{arcsen}\frac{2}{3} \approx 41°50'.$$

Si en la ecuación (1) se toma por vector director del plano el vector unitario

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}/N \quad (N = \sqrt{A^2+B^2+C^2} \neq 0),$$

obtendremos una ecuación llamada *ecuación normada del plano*

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0, \qquad (6)$$

o, en función de las coordenadas

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0, \qquad (7)$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. La ecuación (7) es cómoda para hallar la distancia de un punto a un plano.

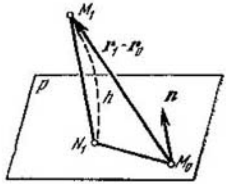

Fig. 200

PROBLEMA. Hallar la distancia h del punto M_1 (x_1, y_1, z_1) al plano P dado por la ecuación (6) (fig. 200).

Sea $h = M_1N_1$, donde $M_1N_1 \perp P$, $N_1 \in P$. Examinemos el vector $\overrightarrow{M_0M_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$, donde $\boldsymbol{r}_0$ y $\boldsymbol{r}_1$ son los radio vectores de los puntos $M_0 \in P$ y M_1. Teniendo en cuenta que $M_1N_1 \parallel \boldsymbol{h}$ del triángulo $M_0M_1N_1$ hallamos

$$h = |\operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)| = |\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)| = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Por consiguiente, obtenemos la regla: *para calcular la distancia de un punto a un plano hace falta introducir las coordenadas del punto en el primer miembro de la ecuación normada del plano y tomar el valor absoluto del resultado obtenido.*

En particular, tomando $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, obtenemos **la distancia del plano al origen de las coordenadas:**

$$h_0 = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

§ 3. Angulo entre dos planos

Sean dados dos planos

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad (1)$$

que tienen por vectores directores $N = \{A, B, C\}$ y $N' = \{A', B', C'\}$. En este caso, el ángulo diedro φ formado por estos vectores es igual al ángulo formado por los vectores N y N'. De este modo, tenemos (véase el § 12 del cap. XVIII)

$$\cos\varphi = \frac{NN'}{NN'}, \qquad (2)$$

donde $NN' = AA' + BB' + CC'$ y

$$N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad N' = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}.$$

De donde se deduce: 1) **la condición de paralelismo de los planos** (en sentido amplio)

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} \qquad (3)$$

y 2) **la condición de perpendicularidad de los planos**

$$AA' + BB' + CC' = 0. \qquad (4)$$

Notemos que si los planos (1) no satisfacen la condición (3) ellos no son paralelos ni confluyen, es decir, se cruzan.

EJEMPLO. Determinar el ángulo φ formado por las bisectrices de los planos

$$x - z = 0, \quad y - z = 0.$$

Aquí

$$N = \{1, 0, -1\}, \quad N' = \{0, 1, -1\}.$$

Tenemos

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

y, por consiguiente, $\varphi = 60°$.

§ 4. Ecuaciones de la recta en el espacio

La recta se define unívocamente en el espacio por un punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y una dirección (es decir, por un cierto vector).

Sean $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ el radio vector del punto M_0 y $\boldsymbol{s} = \{l, m, n\}$ el vector director **no nulo** de la recta (su longitud es arbitraria). Designando por $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ el radio vector de un punto arbitrario M de la recta (radio vector corriente) tenemos, mediante el triángulo vectorial OM_0M (fig. 201)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}. \qquad (1)$$

Como los vectores $\overrightarrow{M_0M}$ y $\boldsymbol{s}$ son colineales,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{s}, \qquad (2)$$

donde t es un cierto escalar ($-\infty < t < +\infty$). Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) obtendremos *la ecuación vectorial de la recta en el espacio*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{s} \tag{3}$$

(t es un parámetro).

Proyectando la igualdad (3) sobre los ejes de coordenadas tendre-

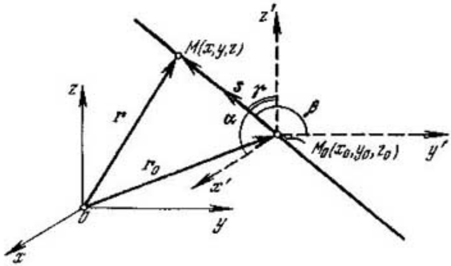

Fig. 201

mos *la ecuación paramétrica de la recta en el espacio*

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si el parámetro t se elimina en las ecuaciones (4), obtendremos las llamadas *ecuaciones canónicas de la recta en el espacio*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \,^{1)}. \tag{5}$$

El sistema (5) contiene dos ecuaciones, por ejemplo, cuando $n \neq 0$, se puede tomar

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Estas son ecuaciones de dos planos, intersecadas por la recta dada. Notemos que la primera ecuación no contiene la coordenada y y la segunda, la x. Por consiguiente (véase el § 1), el primer plano es paralelo al eje Oy y el segundo es paralelo al eje Ox, es decir, estos son planos que proyectan nuestra recta sobre el plano de coordenadas Oxz y sobre el plano de coordenadas Oyz.

Los números l, m, n se llaman *coeficientes directores de la recta.* Designando por α, β, γ los ángulos formados por la recta y los ejes de coordenadas (fig. 201) y teniendo en cuenta que $\cos\alpha$, $\cos\beta$,

---

[1]) Estas ecuaciones tienen el sentido de proporciones, es decir, cualesquiera (no más de dos) números l, m, n pueden ser ceros.

cos γ son los cosenos directores del vector s tendremos

$$l = s\cos\alpha, \quad m = s\cos\beta, \quad n = s\cos\gamma, \tag{6}$$

donde

$$s = \sqrt{l^2+m^2+n^2} \neq 0 \tag{7}$$

es la longitud del vector s. De donde obtenemos

$$\cos\alpha = \frac{l}{s}, \quad \cos\beta = \frac{m}{s}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{s} \quad (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1).$$

De este modo los coeficientes directrices de una recta son proporcionales a los cosenos directores correspondientes de esta recta.

Las ecuaciones de la recta (5) pueden ser escritas bajo forma estándar

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}, \tag{5'}$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la recta.

Ejemplo 1. Las ecuaciones de movimiento de un cohete son $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 4t$, donde el tiempo está dado en segundos y las coordenadas (x, y, z) del punto en movimiento se dan en kilómetros.

¿Qué trayectoria tendrá el cohete? ¿A qué distancia del punto de partida $O(0, 0, 0)$ estará el cohete M dentro de 10 segundos?

Eliminando el tiempo t de las ecuaciones dadas obtendremos la ecuación de la trayectoria

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{4},$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}.$$

De este modo, la trayectoria del cohete es una línea recta que pasa por el origen de las coordenadas.

Para $t = 10$ s tenemos $x = 20$, $y = -40$, $z = 40$ y $r = OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{400+1600+1600}$ km $= \sqrt{3600}$ km $= 60$ km.

PROBLEMA. Escribir la ecuación de la recta que pasa por dos puntos no coincidentes $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Por vector director se puede tomar

$$\boldsymbol{s} = \{x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0\} \neq \mathbf{0}.$$

Por consiguiente, en virtud de la (5) tenemos

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{8}$$

EJEMPLO 2. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0(3, -4, 5)$ y es paralela al eje Oz.

Es evidente que tenemos

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 1.$$

De este modo, en virtud de la (5′) obtenemos las ecuaciones de la recta buscada

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-5}{1} \tag{9}$$

que son equivalentes al par de ecuaciones

$$\frac{x-3}{0}=\frac{z-5}{1}\,, \quad \frac{y+4}{0}=\frac{z-5}{1}\ ^{1)}$$

o

$$x-3=0, \quad y+4=0.$$

El vector director de la recta (9) es $\{0, 0, 1\}$, es decir, es una recta perpendicular a los ejes Ox y Oy.

La recta L en el espacio puede ser también definida como línea de intersección de dos planos P y P' (fig. 202)

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0,\\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Se supone que los planos no son paralelos y que no confluyen (véase el § 4). Los vectores $N = \{A, B, C\}$ y $N' = \{A', B', C'\}$ son los vectores normales de estos planos. El vector director s de la recta satisface evidentemente las condiciones $s \perp N$ y $s \perp N'$. Se puede considerar que

$$s = N \times N'$$

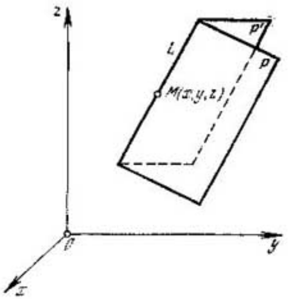

Fig. 202

($\times$ es el signo del producto vectorial (véase el § 15 del cap. XVIII)).

EJEMPLO 3. Determinar los cosenos directores de la recta

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4 &= 0,\\ 3x - 2y + z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Tenemos

$$N = \{1, -2, 3\}, \quad N' = \{3, -2, 1\}.$$

De donde

$$s = N \times N' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4i + 8j + 4k = 4\,(i + 2j + k).$$

Como vector director de la recta se puede tomar

$$s_0 = \frac{1}{4}\, s = \{1, 2, 1\},$$

cuya longitud es $s_0 = \sqrt{6}$. De donde

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{6}, \quad \cos\beta = 2/\sqrt{6}, \quad \cos\gamma = 1/\sqrt{6}.$$

---

1) Véase la observación en la pág. 341

§ 5. Noción sobre la derivada de una función vectorial

Sea dada una función vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

($\alpha < t < \beta$), donde las funciones del parámetro t que representan las proyecciones del vector $\boldsymbol{r}(t)$ sobre los ejes de coordenadas están designadas, para más comodidad, con las letras correspondientes (compare con el § 1). Si $\boldsymbol{r}(t)$ se interpreta como el radio vector de un punto $M(x, y, z)$ del espacio $Oxyz$, el extremo del vector variable $\boldsymbol{r}(t)$ describirá en el espacio $Oxyz$ una cierta curva K, cuyas ecuaciones paramétricas están constituidas por la ecuación vectorial (1). En mecánica esta curva se llama *hodógrafa* del vector variable $\boldsymbol{r}(t)$.

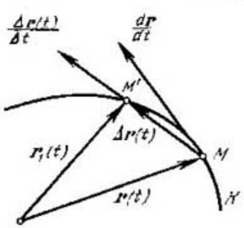

Fig. 203

Es natural definir el *límite de la función vectorial* considerando que

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\lim_{t\to t_0} x(t) + \boldsymbol{j}\lim_{t\to t_0} y(t) + \boldsymbol{k}\lim_{t\to t_0} z(t), \tag{2}$$

a condición de que los límites en el segundo miembro de la igualdad (2) existan.

Demos al parámetro t un incremento pequeño Δt; en este caso el punto $M(x, y, z)$ de la curva K se trasladará al punto $M'(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ de esta curva, cuyo radio vector es

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r}(t).$$

Del triángulo vectorial OMM' tenemos (fig. 203)

$$\Delta\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{M'M} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}.$$

De donde, suponiendo, para la determinación que $\Delta t > 0$, obtendremos

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

es decir, el vector $\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ está orientado por secante $\overrightarrow{M'M}$.

En el caso general, cuando $\Delta t \neq 0$ el vector $\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ será colineal al vector $\overrightarrow{M'M}$.

DEFINICIÓN. *Llámase **derivada** de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ el vector*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Si $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, son funciones derivables, de la fórmula (3), cuando $\Delta t \to 0$, hallamos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k. \qquad (5)$$

Ya que la posición límite de una secante es, por definición, una tangente, entonces el vector $\frac{dr}{dt}$ está dirigido por la *tangente a la curva* K en su punto M (en el sentido del crecimiento del parámetro t).

De la fórmula (5) obtenemos generalmente

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (6)$$

Si el parámetro t es el tiempo, el vector $\frac{dr}{dt} = v$ representa la velocidad del punto $M(x, y, z)$ en movimiento, considerada como vector.

EJEMPLO. Escribir la ecuación de la tangente a la curva

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

en su punto $M(1, 1, 1)$ $(t = 1)$.

Aquí

$$r = ti + t^2j + t^3k \quad \text{y} \quad \frac{dr}{dt} = i + 2tj + 3t^2k.$$

Resulta que la dirección de la tangente en el punto M se determina por el vector

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_M = i + 2j + 3k.$$

De este modo, la ecuación de la tangente buscada es

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

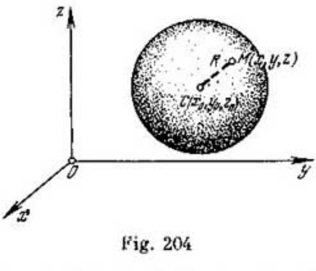

Fig. 204

§ 6. Ecuación de la esfera

DEFINICION. *Llámase* ***esfera*** *de radio* R *al conjunto de todos los puntos en el espacio cuya distancia hasta el punto dado* (*centro*) *es igual a* R.

Deduzcamos la ecuación de la esfera. Sean: $C(x_0, y_0, z_0)$, el centro de una esfera de radio R, y $M(x, y, z)$, un punto arbitrario perteneciente a esta esfera (fig. 204). En este caso, $CM = R$. De acuerdo con la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos

$$CM = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Igualando esta expresión a R obtendremos la ecuación de la esfera

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

o, definitivamente,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Si el centro de la esfera coincide con el origen de las coordenadas, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, la ecuación de la esfera adopta la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

EJEMPLO 1. Determinar las coordenadas del centro y el radio de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 3z = 0.$$

Reuniendo los términos que contienen las coordenadas corrientes del mismo nombre y completándolos hasta que aparezcan cuadrados perfectos obtendremos

$$x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

Por consiguiente, el centro de la esfera se encuentra en el punto $C\left(0,\ 1,\ -1\frac{1}{2}\right)$ y su radio es

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Notemos que el conjunto

$$\left.\begin{aligned}(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,\\ Ax + By + Cz + D = 0\end{aligned}\right\}$$

de las ecuaciones de una esfera y de un plano determina una circunferencia de intersección del plano y la esfera (si este conjunto no es vacío). En particular, si $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, el sistema de estas ecuaciones representa la circunferencia de un círculo grande.

La ecuación de la circunferencia puede ser también escrita en forma paramétrica.

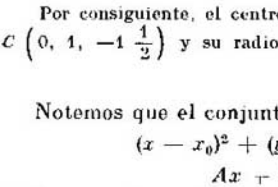

Fig. 205

EJEMPLO 2. Escribir las ecuaciones paramétricas del meridiano de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

que pasa por los polos $N(0, 0, R)$ y $S(0, 0, -R)$, si el plano de meridiano forma un ángulo α con el plano de coordenadas Oxz (fig. 205).

Tomemos por parámetro del punto corriente $M(x, y, z)$ del meridiano el ángulo $\psi = \angle MOM'$, es decir, la altitud de este punto, donde $M'(x, y, 0)$ es la proyección del punto M sobre el plano de coordenadas Oxy. Puesto que $M'O = r = R\cos\psi$, deducimos de la fig. 205

$$\left.\begin{aligned}x &= r\cos\alpha = R\cos\psi\cos\alpha,\\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\alpha = R\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\alpha,\\ z &= R\,\mathrm{sen}\,\psi,\end{aligned}\right\}$$

donde $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

§ 7. Ecuación del elipsoide

DEFINICION. *Llámase* ***elipsoide de tres ejes*** *la superficie obtenida como resultado de una deformación uniforme (dilatación o contracción) de una esfera según tres direcciones perpendiculares entre sí* (compárese el § 4 del cap. IV).

Examinemos la esfera de radio R y con centro en el origen de las coordenadas:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \qquad (1)$$

donde X, Y, Z son coordenadas corrientes de un punto de la esfera.

Supongamos que esta esfera esté sometida a una deformación uniforme en el sentido de los ejes de coordenadas Ox, Oy y Oz y que los coeficientes de deformación respectivos sean iguales a k_1, k_2 y k_3 [1]).

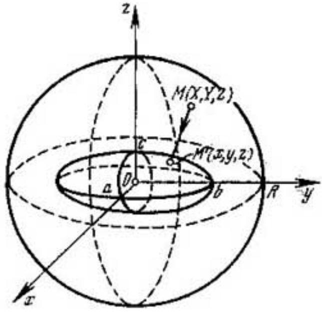

Fig. 206

Como resultado de tal deformación, la esfera se transformará en un elipsoide y el punto de la esfera $M(X, Y, Z)$ de coordenadas corrientes X, Y, Z pasará a ser el punto del elipsoide $M'(x, y, z)$ de coordenadas corrientes x, y, z, además,

$$x = k_1 X, \quad y = k_2 Y, \quad z = k_3 Z$$

(fig. 206). De aquí,

$$X = \frac{x}{k_1}, \quad Y = \frac{y}{k_2}, \quad Z = \frac{z}{k_3}.$$

Introduciendo estas fórmulas en la ecuación (1), tendremos

$$\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} = R^2$$

o

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (2)$$

donde $a = k_1 R$, $b = k_2 R$, $c = k_3 R$. La ecuación (2) reúne las coordenadas corrientes del punto M' del elipsoide y, por consiguiente, es *la ecuación del elipsoide de tres ejes*.

---

[1]) En otras palabras, las dimensiones lineales de la esfera en el sentido del eje Ox se disminuyen en $\frac{1}{k_1}$ veces, si $0 < k_1 \leqslant 1$ y se aumentan en k_1 veces, si $k_1 > 1$, etc.

Las magnitudes a, b, c se llaman *semiejes del elipsoide*; las magnitudes dobles $2a$, $2b$, $2c$ son los *ejes del elipsoide* y representan evidentemente sus dimensiones lineales en las direcciones de la deformación (en el caso dado, en las direcciones de los ejes de las coordenadas).

Si dos semiejes de un elipsoide son iguales, éste se llama *elipsoide de revolución* porque puede ser obtenido como resultado de la rotación de una elipse alrededor de uno de sus ejes. En geodesía, por ejemplo, la superficie de la esfera terrestre se considera como un elipsoide de revolución con semiejes $a = b = 6377$ km y $c = 6356$ km. Si $a = b = c$ el elipsoide se transforma en una **esfera**.

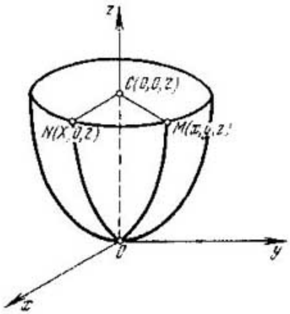

Fig. 207

§ 8. Ecuación del paraboloide de revolución

Sea que una parábola vertical

$$X^2 = 2pZ, \tag{1}$$

situada en el plano Oxz, gira alrededor de su eje (eje Oz). Con esta rotación se obtiene una superficie llamada *paraboloide de revolución* (fig. 207).

Para deducir la ecuación del paraboloide de revolución examinemos un punto cualquiera $M(x, y, z)$ de esta superficie y supongamos que este punto ha sido obtenido como resultado de la rotación del punto $N(X, 0, Z)$ de la parábola dada alrededor del punto $C(0, 0, Z)$.

Puesto que los puntos M y N están situados en un mismo plano horizontal y $CN = CM$ vienen a ser radios de una misma circunferencia, tenemos

$$X = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Z = z. \tag{2}$$

Introduciendo las fórmulas (2) en la ecuación (1), obtendremos la *ecuación del paraboloide de revolución*

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Notemos que la superficie del mercurio puesto en un recipiente cilíndrico vertical toma la forma de paraboloide de revolución, si este recipiente gira rápidamente alrededor de su eje. Esta circunstancia se utiliza para obtener los espejos parabólicos.

EJERCICIOS

1. ¿Qué figuras geométricas en del espacio corresponden a las ecuaciones siguientes:

a) $xy = 0$; b) $xz = yz$; c) $y^2 + y - 2 = 0$; d) $z^2 = 2x$; e) $y = 1$, $z = -2$; f) $x^2 = 0$; g) $x^2 + y^2 = 0$; h) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$?

2. Determinar la longitud de la perpendicular trazada a partir del origen de coordenadas al plano $x - y + z\sqrt{2} - 8 = 0$ y los ángulos formados por esta perpendicular y los ejes de coordenadas.

3. Escribir la ecuación del plano paralelo al eje Oz que corta sobre los ejes Ox y Oy segmentos de longitud 2 y 3 respectivamente.

4. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto M (1, 2, 3) y que es perpendicular al eje Oz.

5. Sea $z = f(x, y)$ una función dada por la tabla con dos entradas

y \ x	70	80
10	1,23	1,34
40	1,40	

Hallar el valor aproximado de z para $x = 72$ e $y = 20$, considerando la función z lineal, es decir, de primer grado respecto a x e y.

6. ¿Cuáles son los ángulos formados por la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-\sqrt{2}}$$

y los ejes de las coordenadas?

7. Hallar las «trazas» (es decir, los puntos de intersección) de la recta

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$$

en los planos de coordenadas?

8. Escribir la ecuación de la esfera con centro en el punto C (2, −2, 1) que pasa por el origen de las coordenadas.

9. Escribir las ecuaciones paramétricas de la paralela a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con distancia angular α $\left(|\alpha| < \frac{\pi}{2}\right)$ al ecuador $z = 0$, tomando como parámetro la longitud φ del punto corriente $M(x, y, z)$.

10. Calcular los semiejes del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

11. Determinar los semiejes de la elipse obtenida por la intersección del elipsoide $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ y el plano $x = 3$.

12. Escribir la ecuación de la tangente a la línea helicoidal

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad z = bt \tag{1}$$

en el punto M_0 correspondiente al parámetro $t = t_0$.

¿Cuál es el ángulo formado por esta tangente y el eje Oz?

Hallar las proyecciones de la línea helicoidal sobre los planos de las coordenadas.

Capítulo XX

Funciones de varias variables

§ 1. Noción de función de varias variables

En numerosos problemas de geometría, ciencias naturales, etc., hace falta tener asuntos con funciones de dos, tres o más variables. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. El área de un triángulo $U = \frac{xy}{2}$ de base x y de altura y es una función de dos variables independientes x e y, definidas en el dominio de $x > 0$ e $y > 0$.

EJEMPLO 2 Al resolver la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ respecto a z, obtenemos, para $z \geqslant 0$, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Aquí la z-coordenada de un punto situado sobre la semiesfera superior es una función de dos variables x e y, que son la abscisa y la ordenada de este punto. Esta función está definida en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

EJEMPLO 3 El volumen de un paralelepípedo rectangular $V = xyz$ de dimensiones x, y, y z es una función de estas tres variables, definida en el octante positivo del espacio $Oxyz$.

EJEMPLO 4 Según la ley de Newton, la fuerza F con la cual se atraen dos puntos materiales de masas m y m_1 y que ocupan las posiciones respectivas (M x, y, z) y M_1 (x_1, y_1, z_1), es igual a

$$F = k\frac{mm_1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

donde k es una constante (llamada «constante de la atracción universal»). Por consiguiente, F es una función de seis variables x, y, z, x_1, y_1, z_1.

Hágamos una aclaración importante: *toda función de varias variables se vuelve en función de un número de variables más pequeño, si se fijan algunas de éstas*, es decir, si les dan a ellas valores constantes.

Sea dada, por ejemplo, una función de tres variables x, y y z

$$u = f(x, y, z)$$

si se considera que z posee un valor constante $z = c$, obtendremos una función de dos variables x e y:

$$u = f(x, y, c).$$

Luego, suponiendo que dos variables y y z poseen valores constantes $y = b$, $z = c$, obtendremos una función de una variable x

$$u = f(x, b, c).$$

De este modo, en diversas cuestiones se puede, según el deseo, considerar la función u como función de una, dos o tres variables.

Hablando en rigor, casi todas las dependencias físicas nos dan ejemplos de funciones de un gran número de variables. Pero durante el estudio de estas dependencias despreciamos una parte de los factores secundarios y, de este modo, limitamos el número de variables reduciéndolo al mínimo.

Por ejemplo, el camino s recorrido durante un tiempo t por un cuerpo en movimiento de caída libre, depende de las variables siguientes: t (tiempo de caída), Q (área de la sección transversal del cuerpo), φ (latitud del lugar), h (altura del lugar sobre el nivel del mar), P (presión del aire), T (temperatura del aire), η (coeficiente de viscosidad del aire), etc. Así que debemos escribir

$$s = f(t, Q, \varphi, P, T, \eta, \ldots).$$

En una primera aproximación, todas las variables menos el tiempo t son de poca importancia. Despreciándolas obtendremos $s = f(t)$ y de este modo llegamos a la fórmula conocida

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

donde g es la aceleración de la fuerza de la gravedad, que se considera constante.

Si tenemos en cuenta al menos parcialmente el papel de otras variables tendremos para s fórmulas más y más precisas, a medida que crece el número de variables incluidas.

La imagen geométrica (*el gráfico*) de una función de dos variables

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

es, en general, una **superficie** en el espacio $Oxyz$.

Efectivamente, supongamos que la función dada sea definida en una región ω del plano Oxy. En este caso, a cada par de valores de x e y de la región ω le corresponde, según la fórmula (1), un cierto valor de z; en otras palabras, a todo punto $N(x, y, 0) \in \omega$ se le hace corresponder un punto $M(x, y, z)$ perteneciente al gráfico de la función y que es el extremo de la perpendicular NM trazado al plano Oxy $(MN \perp Oxy)$.

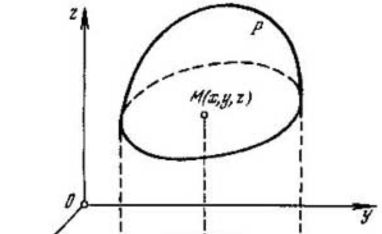

Fig. 208

Si el punto N ocupa todas las posiciones posibles que cubren toda la región ω, entonces el punto M vinculado con esta región, describe en el espacio cierta superficie P [1]) que «pende» sobre la región ω. Se puede representar con evidencia que P es un «techo» construido sobre el área de ω. La superficie P es efectivamente la representación gráfica de la función (1) (fig. 208). Las representa-

[1]) Se trata de las funciones elementales más simples.

ciones geométricas de funciones de tres y más variables no tiene sentido geométrico simple.

En ciertos casos se puede interpretar geométricamente el comportamiento de una función examinando sus *líneas de nivel* (o *superficies de nivel*), es decir las líneas (o superficies) donde la función dada posee un valor constante.

DEFINICIÓN 1 *Llámase* ***línea de nivel*** *de una función*

$$z = f(x, y)$$

al conjunto de todos los puntos del plano Oxy para los cuales la función dada posee un mismo valor (***isocurva***).

De este modo, la ecuación de la línea de nivel es

$$f(x, y) = C,$$

donde C es una constante dada.

EJEMPLO Construir la familia de líneas de nivel de la función

$$z = x^2 + y^2.$$

Dando a z valores no negativos $z = 0, 1, 2, \ldots$ (es evidente que z no puede ser negativo) obtenemos las ecuaciones de líneas de nivel de la función: $x^2 + y^2 = 0$ es el punto O $(0, 0)$; $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia de $R = 1$ y centro O; $x^2 + y^2 = 2$, circunferencia de $R = \sqrt{2}$ y centro O $(0, 0)$, etc.

De este modo, las líneas de nivel de nuestra función constituyen una familia de circunferencias concéntricas de centro O. Al construir estas líneas obtendremos para la función dada una «mapa de superficies» con alturas marcadas (fig. 209).

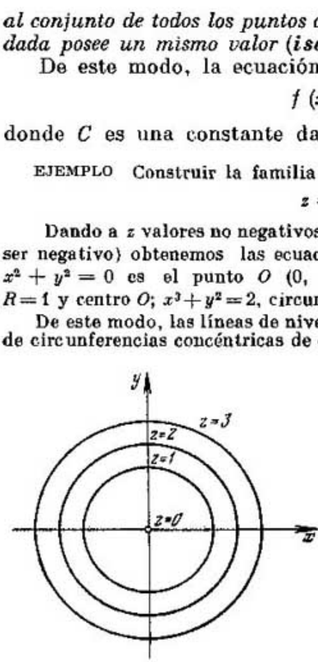

Fig. 209

La fig. 209 nos muestra claramente que la función z crece a lo largo de cada dirección radial. Por eso la imagen geométrica de la función en el espacio $Oxyz$ representa en sí un «hoyo» gigantesco con bordes abruptamente crecientes. Teóricamente, esto es un **paraboloide de revolución** (véase el § 8 del cap. XIX).

DEFINICIÓN 2 *Llámase* ***superficie de nivel*** *de una función*

$$u = f(x, y, z)$$

al conjunto de puntos del espacio Oxyz, para el cual esta función tiene el mismo valor (***isosuperficie***).

Las líneas y las superficies de nivel se encuentran constantemente en los problemas de física. Por ejemplo, al unir sobre un mapa de la superficie terrestre los puntos de igual temperatura diaria promedio o presión atmosférica, obtendremos, respectivamente, los mapas de **isotermas** y de **isobaras**, que son datos importantes y básicos para el pronóstico del tiempo.

§ 2. Continuidad

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables x e y; al conjunto de valores (x, y) lo llamaremos para abreviar **punto**; de este modo, z es función de un «punto».

Demos a la variable x un incremento Δx sin tocar la variable y. Entonces, la diferencia

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \tag{1}$$

se llama *incremento parcial de la función $f(x, y)$ respecto a la variable x*. Por consiguiente, se puede escribir

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{2}$$

De un modo análogo, si se da un incremento Δy solamente a la variable y sin tocar la x, la diferencia

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{2'}$$

se llama *incremento parcial de la función $f(x, y)$ respecto a la variable y*.

Por último, puede ocurrir que las dos variables x e y han obtenido respectivamente los incrementos Δx y Δy. En este caso, el incremento correspondiente de la función

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{3}$$

se llama *incremento total de la función $f(x, y)$* (o, simplemente, *incremento de la función*).

Es natural que se examinen aquí los puntos

$$(x, y), \ (x + \Delta x, y) \ (x, y + \Delta y), \ (x + \Delta x, y + \Delta y),$$

para los cuales la función f tiene sentido, es decir, está definida.

Notemos que de las fórmulas (2), (2′) y (3) se deduce que, *en general, el incremento total de una función no es igual a la suma de los incrementos parciales de la misma*:

$$\Delta f(x, y) \neq \Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y).$$

EJEMPLO. Hallar el incremento de la función

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2,$$

si x ha variado de 2 a 2,2 e y, de 1 a 0,9.

Aquí

$$\Delta x = 0{,}2 \quad \text{y} \quad \Delta y = -0{,}1.$$

Tenemos

$$f(2; 1) = 2^2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 4$$

y

$$f(2{,}2; 0{,}9) = 2{,}2^2 + 2{,}2 \cdot 0{,}9 - 2 \cdot 0{,}9^2 = 5{,}20.$$

Por consiguiente

$$\Delta f(2; 1) = 5{,}20 - 4 = 1.20.$$

De un modo análogo se definen y se escriben los incrementos parciales y totales de una función de más de dos variables.

DEFINICIÓN 1. *Una función $f(x, y)$ se llama* ***continua en un punto*** *(x_0, y_0), si:* 1) *la función está definida en este punto y él es un punto límite para el dominio de existencia de esta función;* 2) *a los incrementos infinitamente pequeños*

$$\Delta x_0 = x - x_0 \quad \text{y} \quad \Delta y_0 = y - y_0$$

de las variables x e *y les corresponde un incremento infinitamente pequeño $\Delta f(x_0, y_0)$ de la función $f(x, y)$*, es decir, cualquiera que sea el modo mediante el cual los incrementos Δx_0 y Δy_0 tienden a cero y para los cuales $f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ tiene sentido, se cumple la condición

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \Delta f(x_0 y_0) = \lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} [f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0)] = 0\ ^{1)}. \qquad (4)$$

Para más claridad se puede admitir que una función $f(x, y)$ continua en el punto (x_0, y_0) está definida en este punto, así como **en cierto entornoy del mismo**, y, siendo los incrementos Δx_0 y Δy_0 lo suficientemente pequeños según sus módulos, tiene lugar la igualdad (4).

DEFINICIÓN 2. *Una función $f(x, y)$ se llama* ***continua en un dominio dado****, si ella es continua en todos los puntos de este dominio, es decir, si para cada punto (x, y) del dominio tenemos*

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)] = 0. \qquad (5)$$

Suponemos aquí habitualmente que el punto desplazado $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pertenece al dominio considerado y que $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ existe (según la definición (1) el conjunto de tales puntos no es vacío en todo entorno del punto (x, y)). De este modo se puede decir que *una función es continua, si y sólo si, a incrementos infinitamente pequeños de sus argumentos les corresponde un incremento infinitamente pequeño de la función.*

EJEMPLO. La función $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1 - x - y}$ está definida y es continua en el triángulo: $\Delta = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;\ x + y \leqslant 1\}$. Notemos que los puntos de frontera del conjunto Δ no son puntos interiores del mismo.

De la fórmula (5) se deduce que

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \alpha,$$

donde α es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De este modo, *si una función $f(x, y)$ es continua, sus valores en dos puntos infinita-*

[1]) Para la definición del límite de una función véase el § 3 del cap. VII, observación.

mente próximos se diferencian entre sí en una función infinitesimal.

Supongamos que $x + \Delta x = x_1$, $y + \Delta y = y_1$; es evidente que cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ tenemos $x_1 \to x$, $y_1 \to y$, y viceversa. En este caso mediante la fórmula (5) obtenemos una **definición equivalente de continuidad de una función**

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ y_1 \to y}} f(x_1, y_1) = f(x, y).$$

§ 3. Derivadas parciales de primer orden

Sea dada una función

$$z = f(x, y).$$

Aquí y en adelante, supondremos que para cada punto examinado (x, y) la función $f(x, y)$ está definida en un cierto entorno total de este punto.

Examinemos la relación del incremento parcial

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

de la función z respecto de la variable x al incremento Δx de esta variable

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

El límite de esta relación, si él existe, cuando Δx tiende a cero se llama *derivada parcial primera* (o *de primer orden*) *de la función* $z = f(x, y)$ *respecto a* x, y se connota así:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y).$$

En consecuencia, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Se define análogamente la *derivada parcial* $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ *de la función* $x = f(x, y)$ *respecto a* y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

DEFINICION. *Llámase* ***derivada parcial*** *de una función de varias variables respecto a una de estas variables, al límite de le relación del incremento parcial correspondiente de la función respecto al incremento de la variable independiente que se examina, a condición de que este incremento tiende a cero.*

Notemos que si se toma la derivada $\frac{\partial z}{\partial x}$ de la función $z = f(x, y)$, y **se considera constante**; si se calcula $\frac{\partial z}{\partial y}$, x **se considera constante.**

Por eso, *la derivada parcial de una función de varias variables es igual a la derivada de la función de una sola variable obtenida cuando*

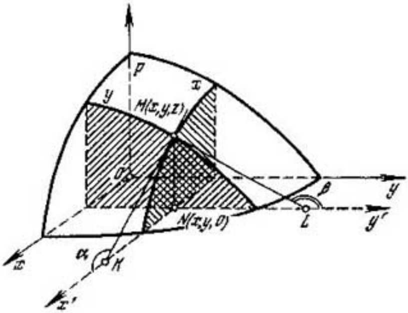

Fig. 210

todas las variables independientes de la función dada son constantes, excepto una, respecto a la cual se toma la derivada, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}[f(x, y)],$$

donde $y = \text{const}$, etc.

Por consiguiente, el cálculo de derivadas parciales no exige nuevas reglas de derivación y podemos utilizar las fórmulas conocidas (véase el § 13 del cap. X).

EJEMPLO 1. Sea la función $z = x^3 \operatorname{sen} y + y^4$.
Es fácil ver que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3.$$

Se definen y se calculan análogamente las derivadas parciales de una función $u = f(x, y, z)$ de tres variables x, y, z, etc.
EJEMPLO 2. Sea la función $u = x^6 - y^4 + 3z^5$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^5, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 15z^4.$$

Para una función

$$z = f(x, y)$$

es fácil hacer una **interpretación geométrica** de sus derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)$. La imagen geométrica de esta función es una cierta superficie P (fig. 210).

Considerando que $y=$ const, obtenemos una curva plana Γ_x que representa la sección de la superficie P por un plano correspondiente paralelo al plano de coordenadas Oxz. Sean MK la tangente a la curva Γ_x en el punto M (x, y, z) y α el ángulo formado por esta tangente y la dirección positiva del eje Ox. Puesto que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left|\frac{dz}{dx}\right|_{y=\text{const}},$$

el sentido geométrico de la derivada ordinaria nos permite escribir

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha.$$

De modo análogo, si Γ_y es la sección de la superficie P por el plano $x=$ const y β es el ángulo formado por el eje Oy y la tangente ML a la curva Γ_y en el punto M (x, y, z), tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tg}\beta.$$

§ 4. Diferencial total de una función

Sea $z=f(x, y)$ una función de dos variables independientes x e y. El incremento total de esta función

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

es la diferencia de los valores que esta función toma en los puntos M (x, y) y M' $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Designemos por ρ la distancia entre estos puntos:

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Si, cuando $\rho\to 0$, se pueden elegir las magnitudes A y B, independientes de Δx y de Δy, tales que la expresión

$$A\,\Delta x+B\Delta y$$

difiera del incremento total Δz de la función en un infinitésimo de orden superior en comparación con ρ, esta expresión se llama *parte lineal principal* del incremento total de la función. En este caso obtendremos

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\Delta y+\gamma\rho, \tag{1}$$

donde $\gamma\to 0$ cuando $\rho\to 0$ (o, lo que es lo mismo, $\gamma\to 0$ cuando $\Delta x\to 0$ y $\Delta y\to 0$).

La expresión (1) puede ser escrita de otra forma. Puesto que $\Delta x = \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \rho \operatorname{sen} \varphi$ (fig. 211) tenemos

$$\rho = \Delta x \cos \varphi + \Delta y \operatorname{sen} \varphi;$$

de donde

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{1'}$$

donde

$$\alpha = \gamma \cos \varphi \to 0 \quad \text{y} \quad \beta = \gamma \operatorname{sen} \varphi \to 0$$

cuando $\rho \to 0$, es decir, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, y viceversa.

Generalizando la definición de la diferencial de la función de una sola variable independiente, en el caso de una función de dos variables independientes se pueden enunciar las definiciones siguientes.

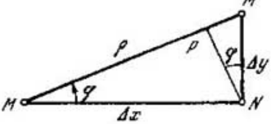

Fig. 211

DEFINICIÓN 1. *Llámase* ***diferencial de una variable independiente*** *al incremento de esta variable*, es decir

$$dx = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = \Delta y.$$

DEFINICIÓN 2. *Llámase* ***diferencial total*** *(o sencillamente* ***diferencial de una función****)* $z = f(x, y)$ *de dos variables independientes* x *e* y, *a la parte lineal principal del incremento total de esta función.*

Esta definición se extiende de modo natural a funciones de cualquier número de variables.

Designando la diferencial de la función por la letra d, se puede escribir

$$dz = A\Delta x + B\Delta y, \tag{2}$$

donde A y B no dependen de Δx ni de Δy y además de

$$\Delta z - dz = \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

donde α y β son infinitésimos, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

La función que posee diferencial en el dominio dado se llama función *diferenciable* (*derivable*) en este dominio. Si una función z es diferenciable, su incremento total Δz es dado por las fórmulas (1) ó (1').

Notemos que si una función $z = f(x, y)$ es diferenciable, ella es **continua.** Efectivamente, pasando al límite en la fórmula (1') cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, obtendremos

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

es decir, la función z es continua (véase el § 2).

EJEMPLO Hallar la diferencial de la función $z = xy$.

La función z puede considerarse como el área de un rectángulo de lados x e y (fig. 212) [1]. Dando a los lados x e y incrementos Δx y Δy obtendremos el incremento Δz del área z que representa el área de «orla»:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy =$$
$$= y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ la parte principal de este incremento, constituida por dos rectángulos de lados y, Δx y x, Δy, es la diferencial dz del área z; por eso

$$dz = y\,\Delta x + x\,\Delta y.$$

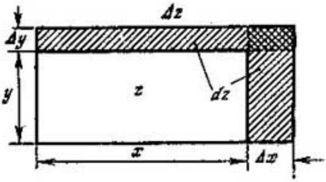

Fig. 212

TEOREMA 1. *La diferencial de una función es igual a la suma de los productos de las derivadas parciales de esta función por las diferenciales de las variables independientes correspondientes.*

DEMOSTRACION Sea $z = f(x, y)$ una función **diferenciable**, es decir, que tiene diferencial

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{3}$$

Para determinar los coeficientes A y B escribimos el incremento total de esta función

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + B\Delta y, \tag{4}$$

donde α y β son infinitésimos cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Considerando que $\Delta y = 0$, en la fórmula (4) obtendremos el incremento parcial

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x.$$

De aquí

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$$

y, por consiguiente, cuando $\Delta x \to 0$ tendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A.$$

De modo análogo, considerando que $\Delta x = 0$, en la fórmula (4) hallamos

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

De este modo,

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

[1] Para mayor evidencia, consideramos que x e y son positivos.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (3) y teniendo en cuenta que $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$, obtendremos definitivamente

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{5}$$

COROLARIO *Una función dada posee una diferencial* ***única.***

Efectivamente, de la demostración del teorema 1 se deduce que la diferencial de la función $z = f(x, y)$, si ella existe, es expresada obligatoriamente por la fórmula (5).

OBSERVACION. De la fórmula (5) se deduce que la diferencial dz de una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes x e y, es **una función de cuatro variables independientes** x, y, dx, dy lineal (es decir, del primer grado) respecto al segundo par de variables. El primer par de variables, x e y, representa las coordenadas del punto $M(x, y)$ en el cual se calcula la diferencial; el segundo par de variables, dx y dy, son **las coordenadas del vector de desplazamiento** del punto $M(x, y)$ cuando éste pasa a un punto infinitamente cercano $M'(x + dx, y + dy)$, donde dx y dy son las proyecciones del segmento MM' sobre los ejes de coordenadas correspondientes Ox y Oy.

TEOREMA 2 (condición suficiente de diferenciabilidad de una función). *Si una función $z = f(x, y)$ posee en un dominio dado las derivadas parciales continuas $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, entonces ella es derivable en ese dominio y su diferencial se expresa por la fórmula* (5).

DEMOSTRACION. Examinemos el incremento total de la función

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Restando y sumando el término $f(x, y + \Delta y)$, tendremos

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta x) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \tag{6}$$

El primer corchete de la fórmula (6) representa el incremento de la función $f(x, y)$ respecto a la variable x para un valor fijo $y + \Delta y$ de la segunda variable y, es decir, ella puede ser considerada como el incremento de la función de una sola variable x. Fijando el valor de $y + \Delta y$ y aplicando el teorema de Lagrange sobre el incremento finito de una función (el § 1 del cap. XI) hallamos

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x f'_x(\bar{x}, y + \Delta y), \tag{7}$$

donde $\bar{x}$ es un valor intermedio entre x y $x + \Delta x$.

De modo análogo el segundo corchete de la fórmula (6) es el incremento de la función $f(x, y)$ respecto a la variable y para un valor fijo de la variable x. Por eso aplicando el teorema de Lagrange obtendremos

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y f'_y(x, \bar{y}), \tag{8}$$

donde $\bar{y}$ es un valor intermedio entre y e $y + \Delta y$. De las fórmulas (6), (7) y (8) se deduce

$$\Delta z = \Delta x f'_x(\bar{x},\ y + \Delta y) + \Delta y f'_y(x,\ \bar{y}). \tag{9}$$

Sean $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Puesto que las derivadas $f'_x(x,\ y)$ y $f'_y(x,\ y)$ son continuas, sus valores en los puntos infinitamente cercanos $P(\bar{x},\ y + \Delta y)$ y $M(x,\ y)$ y, respectivamente, $Q(x,\ \bar{y})$ y $M(x,\ y)$ (fig. 213) se diferencian entre sí en infinitésimos (§ 2); por eso

$$f'_y(\bar{x},\ y + \Delta y) = f'_x(x,\ y) + \alpha$$

y

$$f'_y(x,\ \bar{y}) = f'_y(x,\ y) + \beta,$$

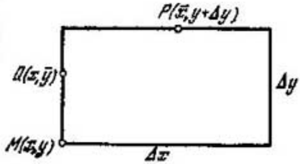

Fig. 213

donde α y β son infinitésimos cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De aquí, por la fórmula (9)

$$\Delta z = [f'_x(x,\ y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y)\,\Delta y] + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y). \tag{10}$$

La parte lineal principal del incremento total Δz de una función es, por definición, la diferencial dz de esta función. Por consiguiente, la fórmula (10) da

$$dz = f'_x(x,\ y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y)\,\Delta y \equiv \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

es lo que hacía falta demostrar.

EJEMPLO 1. Hallar la diferencial de la función $z = x^y$. Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

De aquí

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\ dy.$$

OBSERVACIÓN. Análogamente, si una función $u = f(x, y, z)$ posee derivadas parciales continuas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, la diferencial de esta función se expresa por la fórmula

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

donde $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ y $dz = \Delta z$.

EJEMPLO 2. Hallar la diferencial de la función $u = \frac{x}{y}\,e^z$. Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\,e^z, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\,e^z, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{y}\,e^z.$$

Por consiguiente

$$du = e^z \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy + \frac{x}{y} dz \right).$$

Si los incrementos Δx y Δy son pequeños, el incremento de una función diferenciable

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

puede ser aproximadamente reemplazado por la diferencial $df(x, y)$ de esta función:

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\, \Delta x + f'_y(x, y)\, \Delta y.$$

De donde se deduce una igualdad aproximada

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\, \Delta x + f'_y(x, y)\, \Delta y$$

que será tanto relativamente más exacta cuanto menores sean $|\Delta x|$ y $|\Delta y|$.

EJEMPLO 3. Se examina un rectángulo de lados $x = 6$ m e $y = 8$ m. ¿Cuál será la variación de la diagonal de este rectángulo, si el lado x se aumenta en 5 cm y el lado y se disminuye en 10 cm?

Designando la diagonal del rectángulo por u tenemos $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

De donde reemplazando el incremento Δx de la diagonal por la diferencial du de esta última hallamos aproximadamente

$$\Delta u \approx du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Delta y = \frac{x\,\Delta x + y\,\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Considerando que en la última fórmula $x = 6$ m, $\Delta x = 0{,}05$ m; $y = 8$ m, $\Delta y = -0{,}10$ m obtendremos

$$\Delta u \approx \frac{6 \cdot 0{,}05 + 8 \cdot (-0{,}10)}{\sqrt{36+64}} \text{ m} = -0{,}05 \text{ m}.$$

De este modo, la diagonal del rectángulo disminuirá aproximadamente en 5 cm. El cálculo exacto da $\Delta u = -0{,}045$ m.

§ 5. Aplicación de la diferencial de una función a los cálculos aproximados

Con ayuda de la diferencial total de una función se puede establecer cómo los errores de sus argumentos influyen en el valor de la función.

PROBLEMA. Calcular el error absoluto límite Δ_z de la función

$$z = f(x, y)$$

conociendo los errores absolutos límites Δ_x y Δ_y de los argumentos x, y:

$$|\Delta x| \leqslant \Delta_x \quad \text{y} \quad |\Delta y| \leqslant \Delta_y.$$

Tenemos

$$|\Delta z| = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|.$$

Reemplazando el incremento de la función por su diferencial obtendremos

$$|\Delta z| \approx |f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y|.$$

De donde deducimos una apreciación aproximada

$$|\Delta z| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| |\Delta y|.$$

Por consiguiente, el error absoluto límite de la función z es igual a

$$\Delta_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \Delta_y. \tag{1}$$

EJEMPLO. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es $x = 120$ m $\pm$ 2 m y el ángulo agudo es $y = 30° \pm 1°$. ¿Con qué precisión se puede calcular el cateto de este triángulo, opuesto al ángulo dado?

Tenemos

$$z = x \operatorname{sen} y. \tag{2}$$

De donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y.$$

Suponiendo que $x = 120$, $\Delta_x = 2$ e $y = \frac{\pi}{6}$, $\Delta_y = \frac{\pi}{180}$ hallamos mediante las fórmulas (2) y (1)

$$z = 120 \operatorname{sen} 30° = 60 \text{ (m)}$$

y

$$\Delta_z = \operatorname{sen} 30° \cdot 2 + 120 \cdot \cos 30° \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 1{,}8 = 2{,}8 \text{ (m)}$$

Por consiguiente

$$z = 60 \text{ m} \pm 2{,}8 \text{ m}.$$

Aplicando la fórmula (1) se puede determinar también el error absoluto límite de la función:

$$\delta_z = \frac{\Delta_z}{|z|}.$$

En particular, hacemos

$$z = xy \quad (x \neq 0,\ y \neq 0).$$

En este caso

$$\Delta_z = |y|\,\Delta_x + |x|\,\Delta_y$$

y, por consiguiente,

$$\delta_z = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} \quad \text{o} \quad \delta_z = \delta_x + \delta_y,$$

es decir, *el error absoluto límite de un producto es igual a la suma de errores absolutos límites de los factores.*

§ 6. Noción sobre derivada de una función según una dirección dada

Sea $u = f(x, y)$ una función definida en un dominio ω. Examinemos cierto punto $M(x, y) \in \omega$ y una dirección l definida por los cosenos directores $\cos\alpha$ y $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$ (es decir, $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ son los cosenos de los ángulos formados por el rayo l y las direcciones positivas de los ejes de coordenadas Ox y Oy). Cuando el punto $M(x, y)$ se desplaza en la dirección dada l al punto $M'(x + \Delta x, y + \Delta y) \in \omega$, la función $u = f(x, y)$ obtiene un incremento

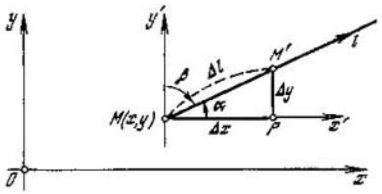

Fig. 214

$$\Delta_l u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

que se llama *incremento de la función u en la dirección dada l* (fig. 214). Si $MM' = \Delta l$ es el valor del desplazamiento del punto M, del triángulo MPM' se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta l \cdot \cos\alpha, \\ \Delta y &= \Delta l \cdot \cos\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Por consiguiente

$$\Delta_l u = f(x + \Delta l \cos\alpha, \quad y + \Delta l \cos\beta) - f(x, y).$$

DEFINICIÓN. *Llámase* ***derivada*** $\frac{\partial u}{\partial l}$ ***de una función u en una dirección dada l****, al límite de la relación del incremento de la función en esta dirección respecto al valor del desplazamiento, cuando esta última tiende a cero*, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (3)$$

De este punto de vista, las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ pueden considerarse como las derivadas de la función u en las direcciones positivas de los ejes de coordenadas Ox y Oy.

La derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ da **la velocidad de variación de la función en la dirección** l.

Deduzcamos la fórmula para la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ suponiendo que la función $u = f(x, y)$ es derivable. En virtud de la definición de la diferencial de una función el incremento de la función difiere de su diferencial en una magnitud infinitamente pequeña de un orden superior respecto a los incrementos de las variables independientes. Por eso, aplicando la fórmula de la diferencial total (la (5) del § 4) tendremos

$$\Delta_l u = \frac{\partial h}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De donde obtenemos, de acuerdo con las relaciones (2),

$$\Delta_l u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\Delta l + (\varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta)\,\Delta l.$$

Por consiguiente

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta.$$

Pasando al límite en la última fórmula para $\Delta l \to 0$, es decir, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ y, partiendo de la definición (3), obtendremos la fórmula buscada para la derivada de la función en la dirección dada:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \tag{4}$$

donde $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$.

EJEMPLO 1. Hallar el incremento de la función $u = x^2 + 2xy - y^2$ durante el desplazamiento del punto M (1, 2) en una distancia $\Delta l = 0{,}1$ en el sentido l que forma un ángulo $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ con la dirección positiva del eje Ox. ¿Cuál es el valor de la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en el punto M?

Tenemos $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. De donde

$$\sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4},$$

por consiguiente,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{4}{5} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}.$$

Utilizando los cosenos directores $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\beta = \frac{3}{5}$ obtenidos para la dirección l, se hallan los incrementos de coordenadas del punto M

$$\Delta x = \Delta l\cdot\cos\alpha = 0{,}1\cdot\frac{4}{5} = 0{,}08 \qquad \text{y} \qquad \Delta y = \Delta l\cdot\cos\beta = 0{,}1\cdot\frac{3}{5} = 0{,}06.$$

De este modo, el punto despzado M' tiene las coordenadas

$$x_1 = x + \Delta x = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$$

e

$$y_1 = y + \Delta y = 2 + 0{,}06 = 2{,}06.$$

De aquí el incremento buscado de la función u es igual a

$$\Delta_l u = (1{,}08^2 \pm 2\cdot 1{,}08\cdot 2{,}06 - 2{,}06^2) - (1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 - 2^2) = \\ = 1{,}3724 - 1 = 0{,}3724.$$

Notemos que

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} \approx 3{,}7.$$

Luego, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2y;$$

por eso

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 6, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -2$$

y, por consiguiente.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M \cos\beta = 6\cdot\frac{4}{5} + (-2)\cdot\frac{3}{5} = 3{,}6.$$

OBSERVACIÓN. La derivada de la función $u = f(x, y, z)$ en la dirección $l = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

§ 7. Gradiente

DEFINICIÓN 1. *Se dice que en un dominio dado* ω [1]) *se ha definido el* ***campo escalar***, *si para todo punto* $M \in \omega$ *se da cierta magnitud escalar* (es decir, un número)

$$u = f(M). \tag{1}$$

De este modo, u es una función numérica de un punto.

Como ejemplos de campos escalares se pueden citar: el campo de temperatura, es decir, la distribución de la temperatura en un cuerpo calentado; la distribución de concentración de una sustancia en la solución, etc.

Si el dominio ω está situado sobre el plano Oxy, cualquier punto suyo M se define por dos coordenadas (x, y) y el campo escalar plano (1) puede ser escrito así

$$u = f(x, y) \quad ((x, y) \in \omega). \tag{2}$$

De modo análogo, para el dominio ω del espacio $Oxyz$ tendremos

$$u = f(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \omega).$$

De este modo, la noción de campo escalar da una **interpretación física** de la función de varias variables.

DEFINICIÓN 2. *Se dice que un* ***campo vectorial*** *está definido en un dominio dado* ω, *si a cada punto* $M \in \omega$ *se le asocia un cierto vector*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(M). \tag{3}$$

---

[1]) Conforme a la tradición, el término «dominio» es aquí sinónimo de vocablo «conjunto». Para la definición de la noción de dominio véase el § 11.

De ejemplos de campos vectoriales pueden servir: el campo de velocidad en un momento de tiempo dado de puntos de una corriente de líquido; el campo de fuerza generado por un centro de atracción, etc.

Para el caso de un campo vectorial plano (3) ($\omega \in Oxy$) tendremos un vector función

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(x, y) \quad ((x, y) \in \omega). \tag{4}$$

De aquí, pasando a las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ obtendremos

$$a_x = F_1(x, y), \quad a_y = F_2(x, y). \tag{5}$$

De este modo, la definición de un campo vectorial plano (4) es equivalente a la definición **de dos campos escalares** (5).

De modo análogo, para el caso de un campo vectorial en el espacio ($\omega \in Oxyz$) obtenemos

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(x, y, z), \tag{6}$$

o, en coordenadas,

$$a_x = F_1(x, y, z), \quad a_y = F_2(x, y, z),$$
$$a_z = F_3(x, y, z). \tag{7}$$

Entonces, el campo vectorial (6) es equivalente a tres campos escalares (7). Esto explica **la comodidad del lenguaje vectorial**: él permite escribir numerosas relaciones escalares mediante una sola fórmula.

El conjunto de todos los puntos M para los cuales el campo escalar (1) conserva un valor constante

$$f(M) = \text{const},$$

se llama *superficie* (o *línea*) *de nivel* del campo escalar (*isosuperficie*) (véase el § 1).

DEFINICION 3. *Sea*

$$u = f(x, y) \tag{8}$$

un campo escalar plano derivable[1]. *Entonces, el vector*

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \tag{9}$$

se llama ***gradiente del campo***; o más detalladamente

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y},$$

donde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ son vectores unitarios orientados a lo largo de los ejes de coordenadas Ox y Oy.

---

[1]) Es decir, $f(x, y)$ es una función derivable de dos variables.

Lo mismo, para un campo escalar en el espacio

$$u = f(x, y, z) \tag{8'}$$

su gradiente es el vector

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}. \tag{9'}$$

De este modo, el campo escalar engendra un campo vectorial llamado **campo de gradientes.**

Llámase derivada del campo escalar (8′) en una dirección dada l, la expresión (véase el § 6)

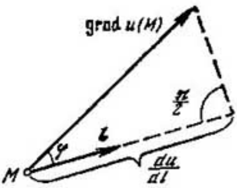

Fig. 215

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{10}$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector l. La derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ representa la velocidad de variación del campo en la dirección dada.

TEOREMA 1. *La derivada de un campo escalar en una dirección dada es igual a la proyección del gradiente de este campo sobre esta dirección (en el punto correspondiente).*

DEMOSTRACIÓN Designemos por $\boldsymbol{l}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ *el vector unitario de la dirección* $\boldsymbol{l}$. En este caso, teniendo en cuenta la fórmula (9′) y recordando la definición del producto escalar (el § 12 del cap. XVIII) se puede escribir la expresión (10) en la forma siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{l}_0 = |\operatorname{grad} u|\,|\boldsymbol{l}_0| \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi, \tag{11}$$

donde $\varphi = \angle(\operatorname{grad} u, \boldsymbol{l})$ (fig. 215).

De aquí,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{proy}_l \operatorname{grad} u. \tag{12}$$

COROLARIO *El gradiente de un campo escalar en un punto dado es igual en magnitud y en dirección a la velocidad máxima de variación del campo en este punto.*

Efectivamente, mediante la fórmula (11) se obtiene que

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} u|,$$

y además $\cos\varphi = 1$. De aquí hallamos que $\varphi = 0$ y, por consiguiente, la dirección del vector $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^*$ debe coincidir con la dirección del grad u, es decir, $\boldsymbol{l}^* = k \operatorname{grad} u$, donde $k > 0$. Además para esta dirección tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \tag{13}$$

OBSERVACIÓN Del corolario se deduce que el gradiente del campo no depende de la elección de un sistema de coordenadas rectangulares $Oxyz$.

EJEMPLO. Hallar la magnitud y la dirección del gradiente del campo

$$u = \frac{x}{y} + z^2$$

en el punto M_0 (2, 1, 0).

Tenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(\frac{1}{y}\right)_{M_0} = 1, \ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)_{M_0} = -2, \ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = (2z)_{M_0} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{grad} u\,(M_0) = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}.$$

De aquí

$$|\operatorname{grad} u\,(M_0)| = \sqrt{5} \ \text{ y } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = 0.$$

El punto M_0 en el cual $\operatorname{grad} u\,(M_0) = 0$ se llama *singular* para el campo escalar; en el caso contrario, el punto M_0 se llama *no singular (ordinario)*.

Citamos sin demostración un teorema que define la dirección del gradiente de un campo escalar.

TEOREMA 2. *En todo punto no singular de un campo escalar plano el gradiente del campo está dirigido según la normal a la línea de nivel que pasa por este punto en el sentido del crecimiento del campo.*

§ 8. Derivadas parciales de orden superior

Supongamos que tenemos cierta función $z = f(x, y)$ de dos variables x e y. Sus derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

son funciones de las variables x e y. En algunos casos para estas funciones existen también *las derivadas parciales de segundo orden también* llamadas *derivadas parciales segundas*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y).$$

Continuando de tal modo, podemos determinar *las derivadas parciales de tercer orden* (*derivadas parciales terceras*), etc.

Se determinan y se escriben análogamente las derivadas parciales sucesivas (de órdenes superiores) de funciones de tres o más variables.

Se puede demostrar **el teorema** siguiente: *si todas las derivadas parciales examinadas como funciones de sus variables independientes son continuas, el resultado de la derivación parcial no depende del orden en el cual se efectúan las operaciones.*

En particular, por ejemplo, si las derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ son continuas, tiene lugar la igualdad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

Sin dar la demostración general verifiquemos la exactitud de esta última afirmación mediante un ejemplo.

EJEMPLO. Sea

$$z=x^y \quad (x>0).$$

Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=yx^{y-1}\ln x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}=yx^{y-1}\ln x.$$

Se ve que para la función z dada, se cumple la igualdad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},$$

como era de esperar.

§ 9. Criterio de la diferencial total

Si una función $u=f(x, y)$ es derivable, su diferencial total es de forma (la fórmula 5 del § 4)

$$du=P(x, y)\, dx+Q(x, y)\, dy, \tag{1}$$

donde

$$P(x, y)=\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad Q(x, y)=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

Surge el problema inverso: ¿bajo qué condiciones la expresión diferencial

$$P(x, y)\, dx+Q(x, y)\, dy, \tag{3}$$

donde las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas, junto con sus derivadas primeras, es la diferencial total de una función u?

La condición necesaria de diferencial total se da por el teorema siguiente.

TEOREMA. *Para que la expresión diferencial* (3) *sea en un dominio G la diferencial total de una función* $u=F(x, y)$, *es necesario que* *en este dominio se cumpla la identidad*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \quad ((x, y) \in G) \tag{α}$$

(condicion de diferencial total).

DEMOSTRACIÓN. Sea (3) la diferencial total de la función $u = F(x, y)$. Tenemos

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \tag{4}$$

En virtud de la unicidad de la diferencial (el corolario del teorema 1 del § 4) obtendremos

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Derivando la primera igualdad (5) respecto a y, y la segunda respecto a x tendremos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial x}. \tag{6}$$

Puesto que para las derivadas mixtas continuas el resultado de la derivación no depende del orden de su realización de las (6) obtendremos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

es decir, la condición (α) se cumple.

COROLARIO. *Si la condición (α) no se cumple, la expresión $P(x, y) \times dx + Q(x, y) \, dy$ no es en el dominio G la diferencial total de cierta función.*

OBSERVACIÓN Se puede demostrar que para un dominio rectangular finito o infinito

$$G = \{a < x < b; \ A < y < B\}$$

el cumplimiento de la condición (α) es también suficiente para que exista una función u tal, que

$$P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = du.$$

EJEMPLO. ¿Son las expresiones

$$y \, dx - x \, dy \quad \text{e} \quad y \, dx + x \, dy$$

diferenciales totales de ciertas funciones?

Para la primera expresión $P = y$, $Q = -x$. De donde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

y, por consiguiente, la condición de diferencial total no se cumple, es decir, no existe una función cuya diferencial total sea igual a $y \, dx - x \, dy$.

24*

Para la segunda expresión obtenemos $P = y$, $Q = x$ y, por consiguiente,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

La condición de diferencial total se cumple. Debido a que un plano puede ser considerado como un dominio rectangular infinito, entonces $y\,dx + xy$ es la diferencial total de una cierta función. Efectivamente

$$y\,dx + x\,dy = d\,(xy).$$

§ 10. Máximo y mínimo de una función de varias variables

Recordemos (véase el § 3 del cap. VII) que por *entorno de un punto* del plano se entiende el interior de todo rectángulo que rodea este punto, excepto el propio punto (entorno pinchado).

De modo análogo, por entorno de un punto del espacio se entiende el interior de todo paralelepípedo que rodea este punto excepto el propio punto.

DEFINICIÓN. *Llámase* ***máximo*** *(estricto) de una función $f(x, y)$ un valor $f(x_1, y_1)$ tal de esta función, que supera a todos los valores $f(x, y)$ que toma esta función en los puntos de un entorno del punto (x_1, y_1)* [1]. (Las dimensiones lineales de este entorno pueden ser muy pequeñas).

De un modo análogo, se llama ***mínimo*** *(estricto) de una función $f(x, y)$ un valor $f(x_2, y_2)$ tal, de esta función, que es el menor de todos los valores $f(x, y)$ tomados por esta función en los puntos de un cierto entorno del punto (x_2, y_2).*

El máximo o el mínimo de una función $f(x, y)$ se llama *extremo* de esta función y el punto donde la función pasa por un extremo se llama *punto de extremo* (respectivamente, *punto de máximo* o *punto de mínimo* de la función).

Se define de modo análogo el extremo de una función de tres variables $f(x, y, z)$, etc.

Indiquemos la **condición necesaria** del extremo de una función de varias variables.

TEOREMA. *En el punto de extremo de una función de varias variables, cada una de sus derivadas parciales primeras es igual a cero o no existe.*

DEMOSTRACIÓN. Examinemos para simplificar una función de dos variables $u = f(x, y)$ y sea $f(x_0, y_0)$ su máximo (los razonamientos para el mínimo de la función son análogos).

Fijemos una de sus variables, por ejemplo y suponiendo que $y = y_0$. Entonces obtenemos una función de una variable

$$u_1 = f(x, y_0)$$

---

[1]) Por el sentido de su definición, la función $f(x, y)$ debe tener sentido sobre un cierto conjunto de puntos de este entorno.

que tendrá, evidentemente, un máximo cuando $x = x_0$. De donde según la teoría del extremo de la función de una variable (el § 7 del cap. XI) se deduce que

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) = 0$$

o que $f'_x(x_0, y_0)$ no existe.

Se demuestra exactamente del mismo modo que $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ó que $f'_y(x_0, y_0)$ no existe.

COROLARIO. *En el punto de extremo $M_0(x_0, y_0)$ de una función derivable $f(x, y)$ se cumplen las igualdades*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

De modo análogo, si una función derivable $f(x, y, z)$ tiene un extremo en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

OBSERVACIÓN 1. El punto en el cual las derivadas parciales primeras de una función son iguales a cero o no existen, se llama *punto crítico* de esta función.

Entonces, el teorema es equivalente a la afirmación siguiente: *una función de varias variables no puede tener extremos que no sean puntos críticos.*

OBSERVACIÓN 2. Las condiciones de existencia del extremo de una función de varias variables, que acabamos de establecer, no son en general suficientes, es decir, si, por ejemplo, en un cierto punto todas las derivadas parciales primeras de la función son iguales a cero, esto no significa que la función tiene obligatoriamente un extremo en este punto.

EJEMPLO 1. Para la función $f(x, y) = xy$ tenemos

$$f'_x(x, y) = y, \quad f'_y(x, y) = x.$$

Por consiguiente,

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0.$$

Sin embargo, el punto $O(0, 0)$ no es un punto de extremo de la función, puesto que en todo entorno del punto O existen los puntos $A(\varepsilon, \varepsilon)$ y $B(-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ arbitrario) tales que

$$f(A) = \varepsilon^2 > 0 = f(0) \quad \text{y} \quad f(B) = -\varepsilon^2 < f(0).$$

EJEMPLO 2. De todos los paralelepípedos rectangulares cuya suma de tres dimensiones es igual a una magnitud positiva dada a se pide hallar el paralelepípedo de volumen máximo.

Designemos las dimensiones del paralelepípedo rectángulo examinado por x, y, y z ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Su volumen V se expresa así: $V = xyz$. Además, según los datos del problema tenemos

$$x + y + z = a.$$

Expresando z en función de x e y a partir de la última ecuación e introduciendo este valor de z en la expresión de V, obtendremos

$$V = xy\,(a - x - y),$$

donde las variables x e y son independientes.

Calculamos las derivadas parciales de V respecto a x e y:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = ay - 2xy - y^2, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = ax - x^2 - 2xy.$$

Igualando a cero estas derivadas parciales tendremos

$$\left.\begin{aligned} ay - 2xy - y^2 &= 0, \\ ax - x^2 - 2xy &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Como las dimensiones x e y para el paralelepípedo buscado no son iguales a cero, podemos simplificar nuestras ecuaciones reduciéndolas. Después de algunas transformaciones simples obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= a, \\ x + 2y &= a. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema por el procedimiento habitual hallamos $x = \frac{a}{3}$ e $y = \frac{a}{3}$. Por consiguiente, $z = \frac{a}{3}$.

Así, el paralelepípedo buscado es un cubo cuya arista es igual a $\frac{a}{3}$ (se puede demostrar con rigurosidad que su volumen en estas condiciones es máximo).

§ 11. Extremo absoluto de una función

Examinemos un conjunto G de puntos del plano (o del espacio). El punto M se llama *interior* para el conjunto G, si este conjunto contiene este punto junto con cierto entorno suyo (fig. 216).

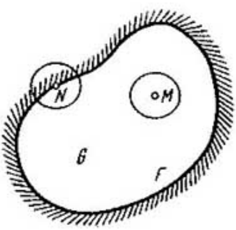

Fig. 216

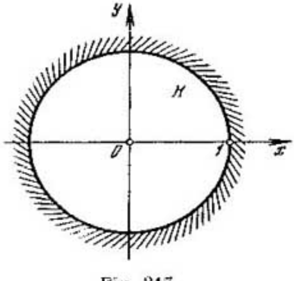

Fig. 217

El punto N se llama *de frontera* para el conjunto G, si en cualquier entorno completo suyo, existen puntos tanto pertenecientes como no pertenecientes a G (fig. 216). El propio punto N no debe necesariamente pertenecer al conjunto G.

El conjunto de puntos de frontera de G se llama *frontera* Γ de G.

DEFINICIÓN 1. *Llamaremos al conjunto G* ***dominio****, si todos sus puntos son interiores* [1]).

El conjunto $\overline{G} = G \cup \Gamma$, que contiene su frontera, se llama *dominio cerrado*.

Un dominio se llama *acotado*, si él se encuentra totalmente en el interior de un círculo (o de una esfera) de radio suficientemente grande.

EJEMPLO 1. El interior K del círculo (fig. 217)

$$x^2 + y^2 < 1$$

es un dominio; su frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; el círculo con su frontera, es decir, el conjunto de puntos para los cuales $x^2 + y^2 \leqslant 1$ es un dominio cerrado.

DEFINICIÓN 2. *El valor más pequeño o más grande de una función en un dominio dado se llama* ***extremo absoluto*** *(respectivamente mínimo absoluto o máximo absoluto) de la función en este dominio.*

Tiene lugar el **teorema de Weierstrass:** *una función continua en un dominio cerrado y acotado, obtiene en este dominio su valor máximo y su valor mínimo.*

TEOREMA 1. *El extremo absoluto de una función en un dominio dado se alcanza bien en el punto crítico de la función perteneciente a este dominio, o bien en el punto de frontera del dominio.*

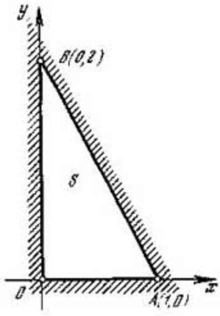

Fig. 218

EJEMPLO 2. Hallar el extremo absoluto de la función $z = xy$ en el dominio triangular S con vértices O (0, 0), A (1, 0), B (0, 2) (fig. 218).

Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

De aquí hallamos el punto crítico O (0, 0) de coordenadas $x = 0$, $y = 0$ pertenecientes al dominio S.

Estudiemos el comportamiento de la función z sobre la frontera $\Gamma = OABO$ del dominio S.

En el segmento OA tenemos $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Por eso $z = 0$.

De modo análogo, sobre el segmento OB: $x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$ obtenemos $z = 0$.

Por último, el segmento AB tiene la ecuación $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ ó $y = 2 - 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. De aquí

$$z = xy = 2x - 2x^2.$$

[1]) Semejante conjunto se llama generalmente *abierto*.

Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2-4x=0$$

para $x=\frac{1}{2}$, de donde $y=1$.
Puesto que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4<0,$$

en el punto $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ la función z alcanza su valor máximo $M=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ en el segmento AB.

Y bien, el menor valor de la función z en el dominio S es $m=0$ y éste se realiza en los puntos de los segmentos OA y OB que constituyen una parte de la frontera Γ del dominio S; el mayor valor de esta función $M=\frac{1}{2}$ se alcanza en el punto $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ perteneciente al segmento AB de la frontera Γ.

§ 12. Establecimiento de fórmulas empíricas por el método de cuadrados mínimos

En las ciencias naturales y en particular en las biológicas y físicas se utilizan fórmulas empíricas basadas en los datos de la experiencia y observaciones. Uno de los mejores métodos para obtener tales fórmulas es **el método de cuadrados mínimos.** Expondremos la idea del mismo limitándonos al caso de la dependencia lineal de dos magnitudes.

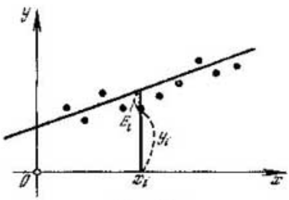

Fig. 219

Supongamos que queremos establecer la relación entre dos magnitudes x e y (por ejemplo, entre la temperatura y el alargamiento de una barra metálica). Efectuamos las mediciones correspondientes (por ejemplo, n mediciones) y comparamos los resultados en la tabla

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Consideramos x e y como las coordenadas rectangulares de los puntos del plano. Supongamos que los puntos con las coordenadas correspondientes tomados en nuestra tabla están casi situados sobre una línea recta, por ejemplo, tal como se indica en la fig. 219. Es natural que pueda considerarse en este caso que las magnitudes x e y están ligadas por una **dependencia lineal** aproximada, es decir que y es una función lineal de x expresada por la fórmula

$$y = ax + b, \tag{1}$$

donde a y b son coeficientes constantes a determinar. La fórmula (1) puede ser presentada así:

$$ax + b - y = 0. \tag{2}$$

Como los puntos (x, y) están aproximadamente situados sobre nuestra recta, las fórmulas (1) y (2) son aproximadas. Por consiguiente, introduciendo en la fórmula (2) en vez de x e y sus valores $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n$ tomados de la tabla precedente, obtendremos un sistema de igualdades

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + b - y_1 &= \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 &= \varepsilon_2, \\ \ldots &\ldots \\ ax_n + b - y_n &= \varepsilon_n, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

donde

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \tag{4}$$

son ciertos números, generalmente distintos de cero, a los que llamaremos *errores*.

Hace falta elegir los coeficientes a y b de tal modo que estos errores sean en valor absoluto, lo más pequeños posible [1]). *El método de cuadrados mínimos* consiste en lo siguiente: hace falta elegir los coeficientes a y b de tal modo que **la suma de cuadrados de los errores sea la más pequeña posible** , es decir, es necesario que la suma

$$U - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 \tag{5}$$

sea la menor, si esta suma mínima de cuadrados resulta pequeña, entonces los propios errores serán pequeños en valor absoluto.

OBSERVACIÓN. Sería posible tratar de tomar en vez de la suma de los cuadrados, la suma de estos errores y de buscar los coeficientes a y b de modo que esta suma sea la más pequeña posible en valor absoluto. Sin embargo es evidente que este procedimiento no asegurará la pequeñez de errores, porque estos últimos pueden tener signos contrarios. Esto no puede ocurrir si el problema se resuelve mediante el método de cuadrados mínimos.

Reemplazando en la expresión (5) los números (4) por sus valores tomados en las igualdades (3) obtendremos la magnitud

---

[1]) Este problema es el caso particular más simple del problema general de la «mejor aproximación de funciones» que fue planteado y resuelto, en condiciones sumamente amplias, por P. L Chébishev, gran matemático ruso.

siguiente:

$$U = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots$$
$$\dots + (ax_n + b - y_n)^2. \tag{6}$$

En la fórmula (6) los números $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ son obtenidos como resultado de mediciones y ellos se examinan como datos; en lo que se refiere a los coeficientes a y b, éstos son magnitudes desconocidas que deben ser determinadas.

Y bien, U puede ser considerada como una función de dos variables a y b. Elijamos los coeficientes a y b de tal modo que la función U obtenga el valor más pequeño posible. De acuerdo con el párrafo precedente hace falta que se cumplan las condiciones

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b} = 0.$$

Calculando estas derivadas parciales y multiplicándolas, para la comodidad de cálculos, por el factor $\frac{1}{2}$ tendremos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial a} = (ax_1 + b - y_1)\, x_1 + (ax_2 + b - y_2)\, x_2 + \dots + (ax_n + b - y_n)\, x_n,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial b} = (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \dots + (ax_n + b - y_n).$$

De donde, anulando estas derivadas parciales obtendremos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas a y b:

$$\left.\begin{aligned}(ax_1 + b - y_1)\, x_1 + (ax_2 + b - y_2)\, x_2 + \dots + (ax_n + b - y_n)\, x_n = 0,\\ (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \dots + (ax_n + b - y_n) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Efectuando transformaciones algebraicas habituales simplificamos este sistema:

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \dots + x_n) =$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$
$$a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + b\cdot n = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

o, introduciendo abreviaciones, tenemos

$$\left.\begin{aligned}a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i,\\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Esta es la forma definitiva de un sistema llamado *sistema normal* del método de cuadrados mínimos. A partir del mismo hallamos a y b, para luego introducirlos en la fórmula empírica

$$y = ax + b.$$

EJEMPLO. Sea que los resultados de las mediciones de las magnitudes x e y y los resultados del tratamiento de las mismas, se indican en la tabla siguiente:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	ε_i
1	−2	0,5	4	−1,0	−0,175
2	0	1	0	0	0,175
3	1	1,5	1	1,5	0,100
4	2	2	4	4	0,025
5	4	3	16	12	−0,125
$\sum$	5	8,0	25	16,5	0

Supongamos que

$$y = ax + b$$

El sistema normal (7) es de la forma

$$\left.\begin{aligned} 25a + 5b &= 16,5 \\ 5a + 5b &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo estas ecuaciones obtendremos

$$a = 0,425, \qquad b = 1,175.$$

De donde

$$y = 0,425x + 1,175.$$

En la última columna de la tabla se indican los errores correspondientes.

EJERCICIOS

1. Determinar los dominios de existencia de las funciones:
a) $u = x\sqrt{1-y^2}$; b) $u = \sqrt{x^2+y^2-1}$; c) $u = \ln(x+y)$.

2. Construir las líneas de nivel de las siguientes funciones:

a) $z = x - y$; b) $z = \frac{y}{x}$; c) $z = x^2 - y^2$; d) $z = y - x^2$.

3. Construir las superficies de nivel de las funciones:
a) $u = x + y + z$; b) $u = y^2 + z^2$.

4. Hallar las derivadas parciales primeras y la diferencial total de siguientes funciones:

a) $u = x^2 - 2xy - y^2$; b) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; c) $u = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

5. Hallar la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ de la función

$$u = \frac{2x}{\sqrt{y}}$$

en el punto M_0 (1, 1) en la dirección l que forma un ángulo α con el eje Ox, si $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$. ¿Cuál es el valor de $|\text{grad } u(M_0)|$?

6. Las isotermas de temperatura u tienen la forma

$$x^2 + y^2 = C.$$

Sabiendo que para la isoterma que pasa por el punto A (3, 4) la función $u = 30\,^\circ\text{C}$ y para la isoterma que pasa por el punto B (5, 1) la función $u = 35\,^\circ\text{C}$, se pide calcular aproximadamente $|\text{grad } u(A)|$, si las distancias lineales están dadas en km.

7. Hallar las derivadas segundas de las funciones:

a) $u = x \ln y + \sqrt{\operatorname{sen} x}$; b) $u = \frac{xy}{z^2}$; c) $u = \ln(x + y^2)$; d) $u = \sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} y$; e) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

8. Comprobar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$, si $u = x \arcsen \sqrt{\frac{x}{y}}$.

9. La masa de un cuerpo en el aire es $m = 0{,}52$ kg $+$ $0{,}02$ kg y la masa del cuerpo en el agua es $m_1 = 0{,}31$ kg $+$ $0{,}01$ kg. ¿Con qué precisión se puede determinar la densidad del cuerpo?

10. ¿Cuáles de las expresiones dadas son las diferenciales totales

a) $dx + y\,dy$; b) $\frac{dx}{y^2} - \frac{2x\,dy}{y^3}$ $(y > 0)$, c) $\frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2}$ $(x > 0,\ y > 0)$?

11. ¿Cuál es la condición para que la suma de tres sumandos positivos x, y y z sea mínima, si el producto de estos sumandos es una constante igual a a?

12. Inscribir en una semiesfera de radio a un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

13. En un cono circular recto, con radio de la base r y altura h, se pide inscribir un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

14. Los resultados de las mediciones de las magnitudes x e y se indican en la siguiente tabla:

x	10	20	30	40	50	60
y	150	100	40	0	-60	-100

Suponiendo que las magnitudes x e y están ligidas por una dependencia lineal

$$y = ax + b,$$

determinar los coeficientes a y b aplicando el método de los cuadrados mínimos.

15. Reemplazar aproximadamente la parábola $y = x^2$ en el intervalo $2 \leqslant x \leqslant 4$ por una recta $Y = kx + b$ de tal modo que el «error cuadrático medio» $\omega = \int_2^4 (y - Y)^2\,dx$ sea mínimo.

16. Hallar el extremo absoluto de la función

$$u = 3x + 4y + 5$$

en el dominio $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

INDICACIÓN. Utilizar las ecuaciones paramétricas de la frontera de este dominio.

Capítulo XXI

Series

§ 1. Ejemplos de series infinitas

En este capítulo estudiaremos las propiedades de **las series infinitas,** así como **el desarrollo en series de funciones trigonométricas y potenciales.**

Un ejemplo de serie infinita estudiado en el álgebra elemental es la progresión geométrica infinitamente decreciente [1])

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \tag{1}$$

donde $|q| < 1$. Aquí cada término se obtiene a partir del precedente de acuerdo con una ley determinada, a saber: cada término es igual al precedente multiplicado por la razón q de la progresión. Por consiguiente el término n-ésimo, llamado *término general* de la progresión se expresa por la fórmula

$$u_n = aq^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Otro ejemplo de serie infinita está dado por *la serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{2}$$

donde su n-ésimo término es $u_n = \frac{1}{n}$.

Existen también series formadas por funciones, por ejemplo

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2 \ldots n} + \ldots, \tag{3}$$

donde n-ésimo término es igual a

$$u_n = \frac{x^n}{1\cdot 2 \ldots n} = \frac{x^n}{n!} \text{ [2])}.$$

La ley de formación de los términos de una serie es dada por su n-ésimo término, llamado **término general de la serie.** Conociendo la fórmula del término general de una serie se puede determinar cualquier término de la misma.

---

[1]) De un modo más preciso, habría que decir que es una serie compuesta por términos de una progresión geométrica infinitamente decreciente. Para abreviar la serie de forma (1) será llamada simplemente «progresión geométrica».

[2]) El símbolo $n!$ (se lee «factorial de n») designa el producto de todos los números naturales no mayores de n.

Surge un problema: **estudiar las propiedades de una serie suponiendo que su n-ésimo término es conocido**

Observamos que la teoría de las series tiene numerosas aplicaciones prácticas debido al hecho de que una función dada puede ser representada en forma de una serie de funciones más simples, por ejemplo, de una serie de polinomios que permite hallar fácilmente el valor aproximado de la función para un valor dado de su argumento.

§ 2. Convergencia de una serie

Demos la noción general de una **serie infinita**. Supongamos que tenemos una sucesión infinita de números o funciones formada de acuerdo con una ley determinada y vinculada de un modo puramente formal por el signo «+»

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (1)$$

Semejante expresión se denomina *serie infinita* o simplemente *serie*, y los sumandos $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ se llaman *términos* de esta serie. Si los términos de una serie son números, ella se llama *numérica*; si ellos son funciones, se tiene una serie *de funciones*.

Notemos que el estudio de las series de funciones se reduce al de las numéricas. Efectivamente, si

$$u_n = f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

obtendremos para cada valor fijo del argumento x una serie numérica correspondiente (1) cuyas propiedades es necesario investigar.

El término u_n de la serie (1), que ocupa el n-ésimo lugar contando del inicio, se llama *término general*. La serie (1) se considera **dada**, si es conocido su término general **expresado en función del número n**. Tales son, por ejemplo, las series (1), (2) y (3) del § 1, donde respectivamente,

$$u_n = aq^{n-1}, \quad u_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Considerando que la serie (1) está dada podemos formar las sumas parciales de la misma, es decir,

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n. \end{aligned}$$

Supongamos primeramente que la serie (1) es numérica. Examinemos dos casos.

I. La suma de los n primeros términos S_n de la serie (1), cuando el número de términos n aumenta ilimitadamente, tiende hacia un límite finito S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

En este caso, se dice que la serie (1) es *convergente* y el número S se llama *suma* de esta serie.

II. La suma de los n primeros términos S_n de la serie (1) crece ilimitadamente o no tiende hacia algún límite cuando el número de términos n aumenta ilimitadamente. En este caso, se dice que la serie (1) es *divergente* y no tiene suma.

DEFINICIÓN. *Una serie numérica se llama* ***convergente****, si existe un límite finito de la sucesión de sus sumas parciales, este límite se llama* ***suma de la serie****; en el caso contrario la serie se llama* ***divergente****.*

Si la serie (1) es una serie de funciones, es decir, si

$$u_n = f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

la serie numérica correspondiente a cada valor fijo x_0 del argumento x

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots \tag{1'}$$

puede ser convergente o divergente. El punto x_0 se llama respectivamente *punto de convergencia* o *punto de divergencia* de la serie de funciones dada y el conjunto de puntos de convergencia se llama *dominio de convergencia* de ella.

Si $u_n = f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y si la serie de funciones (1) converge en todo punto x de cierto conjunto, esta serie se llama *convergente sobre este conjunto* y la función $S = S(x)$, definida para cada valor considerado de x por la fórmula

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

se llama *suma de esta serie* en el conjunto dado.

Si la serie (1) converge, la diferencia entre la suma S y su suma parcial S_n

$$R_n = S - S_n$$

se llama el *resto n-ésimo de la serie*. El resto R_n de la serie representa el *error* que se obtiene, si para un valor aproximado de la suma de serie S se toma la suma S_n de sus n primeros términos.

Como la suma S es el límite de la sucesión S_n, es evidente que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0.$$

Por eso, *si se toma un número suficientemente grande de términos de una serie convergente, se puede calcular su suma con el grado de precisión deseado.*

De aquí resulta claro que el primer problema fundamental de la teoría de las series consiste en la investigación **de la convergencia de la serie**. El cálculo de la suma de una serie convergente es un problema de orden secundario porque después de establecer la convergencia de una serie, en la mayoría de los casos prácticamente importantes, es fácil hallar el valor aproximado de su suma.

Aclaremos las nociones de convergencia y de divergencia de series por medio de algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Examinemos la progresión geométrica infinita

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \tag{2}$$

donde $a \neq 0$.

Se sabe que S_n es la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica, expresada por la fórmula

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n.$$

Aquí es necesario examinar por separado cuatro casos.

1) Sea $|q| < 1$. En este caso q^n tiende a cero cuando n crece infinitamente y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

En este caso, la serie (2) converge y su suma es igual a $S = \frac{a}{1-q}$.

2) Sea $|q| > 1$. En este caso cuando n aumenta infinitamente la potencia q^n crece también ilimitadamente en valor absoluto y, por consiguiente, crece ilimitadamente la suma de n primeros términos S_n. Por eso la serie (2), en este caso, diverge y no tiene suma.

3) Sea $q = 1$. La serie (2), en este caso, toma la forma siguiente

$$a + a + \ldots + a + \ldots \quad (a \neq 0).$$

Es fácil ver que $S_n = na$ y, por consiguiente, cuando n crece ilimitadamente, la suma S_n también crece ilimitadamente. Por eso la serie (2), en este caso, diverge.

4) Sea $q = -1$. En este caso la serie (2) toma la forma siguiente

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$$

La magnitud S_n será igual a cero o a a, según sea n par o impar. Está claro que para $a \neq 0$ la suma S_n no tiende a ningún límite cuando n crece indefinidamente. En este caso la serie (2) es divergente.

Por consiguiente, *la progresión geométrica infinita* (2) *es convergente, si y sólo si, su razón en valor absoluto es inferior a la unidad:* $|q| < 1$.

EJEMPLO 2. Sea que tenemos la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{3}$$

Mostremos que esta serie converge. Tomemos la suma de sus primeros n términos:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Es fácil ver que los sumandos pueden ser representados así:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Por eso

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

De donde

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1$$

De este modo, la serie (3) es convergente y su suma es igual a 1.

Las propiedades ulteriores de las series se refieren a las series numéricas, si no se menciona lo contrario.

Indiquemos ahora algunas propiedades elementales de las series.

TEOREMA 1. *La convergencia de una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *no se alterará, si todos sus términos se multiplican por un mismo número* k *distinto de cero; además, para las sumas de estas series se cumple la igualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n=k\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

La demostración de este teorema se deduce directamente del paso al límite cuando $N\to\infty$ en la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n=k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Se llama *suma* (*diferencia*) de dos series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, respectivamente, la serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n\pm v_n).$$

TEOREMA 2. *La suma (diferencia) de dos series convergentes es una serie convergente tal, que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{4}$$

Efectivamente, puesto que $\sum_{n=1}^{N} (u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{N} u_n\pm\sum_{n=1}^{N} v_n$ para todo N finito, se obtiene, en el límite cuando $N\to\infty$, la igualdad (4).

§ 3. Criterio necesario de convergencia de una serie

TEOREMA *Si la serie*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots$$

es convergente, su n-ésimo término u_n tiende a cero cuando el rango de este término crece ilimitadamente.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

y

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

De aquí,

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Como la serie dada es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

De aquí,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

lo que era necesario demostrar.

COROLARIO *Si el n-ésimo término de una serie no tiende a cero cuando su rango n crece ilimitadamente, esta serie es divergente.*

El criterio de convergencia demostrado es necesario pero, hablando en general, no es suficiente. Se pueden indicar series donde el término general u_n tiende a cero cuando $n \to \infty$, pero la serie, pese a todo, es divergente.

EJEMPLO Examinemos la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

El término general de esta serie, $u_n = \frac{1}{n}$, tiende a cero cuando n crece ilimitadamente. Sin embargo, mostremos que la serie (1) es divergente. Para eso tomemos la suma de los 2^m primeros términos de la serie (1) y agrupémoslos del modo siguiente:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ términos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ términos}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)}_{2^3 \text{ términos}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ términos}}.$$

Es fácil ver que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+$$
$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

. . . .

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{2}{2^{m-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^m}>\underbrace{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}}_{2^{m-1}\text{ términos}}=\frac{2^{m-1}}{2^m}=\frac{1}{2}.$$

De este modo, la suma de los términos entre paréntesis es superior a $\frac{1}{2}$. Como el número total de paréntesis, sin contar los dos primeros términos, es evidentemente igual a $m-1$,

$$S_{2^m}>1+\frac{m}{2}.$$

Si el número de términos $n=2^m$ en la suma S_{2^m} crece ilimitadamente, el exponente m crece también ilimitadamente. Por eso S_{2^m} tiende a infinito y, por consiguiente, la serie armónica es divergente.

De este modo el criterio necesario de convergencia que acabamos de examinar no permite, en general, establecer si una serie dada es convergente o divergente. Pasemos ahora a formular criterios que permiten en una serie de casos dar una respuesta precisa acerca de la convergencia o divergencia de la serie dada.

§ 4. Criterio de comparación de series

Para la demostración de los teoremas que siguen necesitaremos el lema siguiente.

LEMA *Si en una serie*

$$u_1+u_2+\ldots+u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots \tag{1}$$

se suprime un número finito de primeros términos, por ejemplo, p términos, se obtendrá una serie

$$u_{p+1}+u_{p+2}+u_{p+3}+\ldots \tag{2}$$

que converge (o diverge) simultáneamente con la serie (1).

DEMOSTRACION. Designemos por Q la suma de los términos suprimidos

$$Q=u_1+u_2+\ldots+u_p.$$

Sea S_n la suma de los n primeros términos de la serie (1) y S'_n la suma de los n primeros términos de la serie (2). En este caso, resulta evidentemente que $S_{n+p} = Q + S'_n$. De aquí se tiene $S'_n = S_{n+p} - Q$.

Supongamos que la serie (1) es convergente, y sea $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+p} = S.$$

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S - Q$$

y, por consiguiente, la serie (2) es también convergente.

Supongamos ahora que la serie (2) es convergente y sea $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S'$; entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+p} = S' + Q.$$

Por eso, la serie (1) es también convergente.

Acabamos de demostrar que de la convergencia de una de nuestras series se deduce la convergencia de la otra, y viceversa.

El lema queda totalmente demostrado.

COROLARIO 1. *Al investigar una serie en cuanto a su convergencia se puede despreciar un número finito de términos suyos.*

COROLARIO 2. *Si la serie (1) es convergente y S es su suma, el resto n-ésimo de esta serie $R_n = S - S_n$, es la suma de la serie $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$,* es decir,

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

Demostremos ahora el teorema siguiente.

CRITERIO DE COMPARACIÓN DE SERIES. *Si los términos de una serie*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

son positivos (o más exactamente no negativos) y no superan los términos correspondientes de la serie convergente

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{4}$$

la serie dada (3) *es también convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Introduzcamos las designaciones

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$
$$S'_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

Puesto que la serie (4) es convergente, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S',$$

donde S' es la suma de la serie (4). De acuerdo con los datos del teorema se cumplen las desigualdades $0 \leqslant u_1 \leqslant v_1$, $0 \leqslant u_2 \leqslant v_2$, ..., $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, ..

De aquí se deduce que

$$S_n \leqslant S'_n \leqslant S'.$$

Puesto que los términos de la serie (3) son positivos, cuando n aumenta, la suma S_n crece monótonamente, permaneciendo siempre inferior a S'. Como se sabe (§ 10 del cap. VII) *toda sucesión acotada creciente monótonamente, tiene límite.* Por eso, S_n tiende a un límite finito, cuando el número n crece ilimitadamente y, por consiguiente, la serie (3) es convergente.

COROLARIO. *Si los términos de una serie no son menores que los términos correspondientes de otra serie de términos positivos* [1]) *y esta segunda serie es divergente, la primera serie también es divergente.*

En efecto, si la primera serie fuese convergente, la segunda serie sería también convergente en virtud del teorema, lo que contradice nuestro planteamiento.

OBSERVACIÓN. En virtud del lema, el criterio de comparación de series (3) y (4) y su corolario, siguen siendo válidos, si las desigualdades correspondientes entre sus términos se verifican a partir de un cierto número ($n \geqslant N$).

Apliquemos este criterio a la demostración de la convergencia de ciertas series, comparándolas con las series cuya convergencia ya ha sido establecida.

EJEMPLO 1. Examinemos la serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

Después de suprimir el primer término, la comparamos con la serie convergente (3) del § 1:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Es evidente que

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3},\ \ldots,\ \frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},\ \ldots$$

Entonces, de acuerdo con el lema y el criterio de comparación, la serie (5) es convergente.

Luego, de la comparación con la serie (5) se deduce que la serie

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$$

es convergente, si $p > 2$. Se puede demostrar que esta última serie es convergente cuando $p > 1$ y es divergente cuando $p \leqslant 1$.

---

[1]) Más exactamente, de términos no negativos.

EJEMPLO 2. Examinemos la serie

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \tag{6}$$

Puesto que $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ $(n=2,\ 3,\ \ldots)$, la comparación con la serie armónica (§ 3) muestra que la serie (6) es divergente.

§ 5. Criterio de convergencia de d'Alembert

Existen numerosos criterios de convergencia de series, que permiten establecer la convergencia o la divergencia de una serie dada según el comportamiento de sus coeficientes. Examinemos uno de ellos.

CRITERIO DE CONVERGENCIA D'ALEMBERT. *Sean todos los términos de la serie*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

positivos y supongamos que durante un crecimiento ilimitado del número n existe el límite de la relación del $(n+1)$-ésimo término respecto al n-ésimo término y es igual a un número l, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$

En este caso

1°. *Si este límite l es inferior a la unidad, la serie es convergente.*

2°. *Si el límite l es superior a la unidad, la serie es divergente.*

3°. *Si el límite l es igual a la unidad, el criterio no da una respuesta concreta sobre la convergencia o divergencia de la serie, es decir, en este caso la serie puede ser tanto convergente como divergente.*

DEMOSTRACION. Sea dada la serie

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots \tag{1}$$

compuesta de números positivos y sea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

En este caso, para un n suficientemente grande, es decir, no inferior a cierto número N, tenemos

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon,$$

donde ε es un número positivo tan pequeño como se quiera dado con anticipación. De aquí

$$-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\varepsilon,$$

ó

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon, \tag{2}$$

si $n\geqslant N$.

Examinemos por separado los tres casos.

1°. Sea $l < 1$. Podemos tomar el número ε tan pequeño, que $l + \varepsilon$ será también inferior a 1; en este caso, al hacer $l + \varepsilon = q$ obtendremos

$$0 < q < 1.$$

En virtud de la desigualdad (2) tenemos $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, o

$$u_{n+1} < u_n q,$$

además, esta última desigualdad se cumplirá si $n = N, N+1, N+2, \ldots$ Dando estos valores al número n obtenemos la serie de desigualdades

$$u_{N+1} < u_N q,$$
$$u_{N+2} < u_{N+1} q < u_N q^2,$$
$$u_{N+3} < u_{N+2} q < u_N q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entonces, los términos de la serie

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \tag{3}$$

son más pequeños que los términos correspondientes de la serie geométrica

$$u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \ldots \tag{4}$$

Como la razón q de la progresión (4) es inferior a la unidad, esta serie es convergente (ejemplo 1 del § 2). En este caso, en virtud del criterio de comparación y de la nota que lo acompaña, la serie (3) es convergente, al igual que la serie inicial (1).

2°. Sea ahora $l > 1$. Podemos tomar $\varepsilon > 0$ lo más pequeño posible de modo que el número $l - \varepsilon$ será también superior a la unidad. En este caso, a partir de un n suficientemente grande tendremos, debido a la (2), $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, ó $u_{n+1} > u_n$, para $n = N, N+1, N+2, \ldots$

De aquí

$$u_N < u_{N+1} < u_{N+2} < \ldots$$

De este modo, a partir de un cierto número N los términos de la serie (1) crecen cuando crecen sus números, por ser éstos positivos. Por consiguiente u_n no tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por eso en virtud del corolario del criterio necesario de convergencia (§ 3), la serie (1) es divergente y su término general no tiende a cero.

3°. Si $l = 1$, se puede mostrar mediante ejemplos que en algunos casos la serie es convergente y en otros, divergente. En este caso debemos recurrir al teorema de comparación o a otros criterios.

OBSERVACIÓN 1. Si la serie (1) es de funciones, es decir

$$u_n = f_n(x) > 0$$

y $l = l(x)$ es el límite correspondiente, nuestro esquema 1°, 2° y 3° resulta válido para cada x.

OBSERVACIÓN 2. De la demostración del criterio de d'Alembert para el caso 2°, resulta que si *para una serie determinada*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

se cumple la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

el n-ésimo término u_n de esta serie no tiende a cero cuando su número n crece ilimitadamente.

EJEMPLO 1. Examinemos la serie

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots + \frac{a^n}{n} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

donde a es un número positivo.

Tenemos $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{n+1} : \frac{a^n}{n} = a \cdot \frac{n}{n+1}$ y por consiguiente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{n_n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = a.$$

Según el criterio de d'Alembert, la serie (5) es convergente cuando $0 < a < 1$ y es divergente cuando $a > 1$.

Si $a = 1$, el criterio de d'Alembert no da respuesta. Pero en este caso la serie (5) adquiere la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Esta es una serie armónica y, como hemos visto en el § 3, divergente.

EJEMPLO 2. Examinemos la serie

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \ldots$$

cuyo término general es

$$u_n = \frac{1000^n}{n!}.$$

Tenemos $u_{n+1} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$. De aquí,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1000^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 1000^n} = \frac{1000}{n+1}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Por eso esta serie es convergente. Notemos que en el comienzo de esta serie los términos crecen (¡hasta el 1000-ésimo término!) y luego decrecen rápidamente. Semejante serie es poco útil para los cálculos prácticos.

EJEMPLO 3. La serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

se caracteriza según el criterio de d'Alembert por el límite $l=1$. Como se sabe (ejemplo 1 del § 4), esta serie es convergente.

§ 6. Convergencia absoluta

Los criterios suficientes de convergencia de series, analizados en los párrafos precedentes, se referían a series de términos positivos. Las series de términos negativos poseen propiedades análogas.

Examinemos ahora las series con algunos términos positivos y otros negativos o iguales a cero. Ellas se llaman *series de términos de signo variable.*

TEOREMA. *Si para una serie de términos de signo variable*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{A}$$

converge la serie de los valores absolutos de estos términos

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \tag{B}$$

entonces la serie (A) *es convergente.*

DEMOSTRACION. Examinemos una serie auxiliar

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+\ldots+(u_n+|u_n|)+\ldots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|). \tag{C}$$

Puesto que

$$0\leqslant u_n+|u_n|\leqslant 2|u_n|$$

$(n=1, 2, \ldots)$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2|u_n|) \tag{B'}$$

es convergente, en virtud de la convergencia de la serie (B), la serie (C) es también convergente de acuerdo con el criterio de comparación (§ 4). Pero nuestra serie (A) es la diferencia de dos series convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

y, por consiguiente, es una serie convergente.

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. La afirmación contraria no es justa. Precisamente, *si la serie dada es convergente, la serie de valores absolutos de sus términos no es obligatoriamente convergente; esta última serie puede ser divergente.*

De este modo, todas las series convergentes se pueden dividir en dos clases.

La primera clase comprende las series convergentes para las cuales las series compuestas de valores absolutos de sus términos son también convergentes, ellas se llaman *series absolutamente convergentes.*

En la segunda clase se encuentran las series convergentes para las cuales las series compuestas de valores absolutos de sus términos son divergentes; ellas se llaman *series no absolutamente convergentes* o *series condicionalmente convergentes.*

DEFINICIÓN. *Una serie se llama* ***absolutamente convergente****, si son convergentes la propia serie, así como la serie compuesta de los valores absolutos de sus términos.*

Una serie se llama ***condicionalmente convergente****, si la propia serie es convergente, pero la serie compuesta de los valores absolutos de sus términos, es divergente.*

Por ejemplo, la serie convergente

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$$

es **absolutamente convergente**, porque la serie compuesta de valores absolutos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots,$$

es también convergente. $\left(\right.$Las dos series son progresiones geométricas cuyas razones son, respectivamente, iguales a $-\frac{1}{2}$ y $\left.\frac{1}{2}\right)$.

Por el contrario, la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots,$$

es, como veremos después (véase el § 7), una **serie no absolutamente convergente**, porque la serie compuesta de los valores absolutos de sus términos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

es divergente (serie armónica).

CRITERIO DE CONVERGENCIA ABSOLUTA DE UNA SERIE. *Sea que una serie*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{A}$$

cumple la condición

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l.$$

En este caso: 1) *si* $l < 1$, *la serie dada* (A) *es absolutamente convergente*; 2) *si* $l > 1$, *la serie* (A) *es divergente.*

En efecto, nuestra condición es el mismo criterio de d'Alembert aplicado a la serie de valores absolutos

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{B}$$

De donde se deduce que si $l < 1$, las dos series (A) y (B) son convergentes y, por consiguiente, la serie dada (A) es absolutamente convergente.

Al contrario, si $l > 1$, en virtud de la observación al criterio de d'Alembert, $|u_n|$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$. En este caso, las dos series (A) y (B) son divergentes.

§ 7. Series alternadas. Criterio de convergencia de Leibniz

Llámase *serie alternada* a la de tipo

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 + \ldots + (-1)^{n-1} v_n + \ldots {}^{1)}, \tag{1}$$

donde $v_n \geqslant 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, es decir, una serie de términos alternativamente positivos y negativos.

TEOREMA DE LEIBNIZ. *Si los valores absolutos de los términos de una serie alternada* (1) *decrecen monótonamente cuando el número de ellos aumenta, es decir,*

$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant v_4 \geqslant \ldots \tag{2}$$

y el n-ésimo término de la serie tiende a cero cuando su número n aumenta ilimitadamente, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} v_n = 0, \tag{3}$$

entonces esta serie es convergente (en general, no absolutamente).

DEMOSTRACIÓN. Tomemos la suma S_{2m} de los $2m$ primeros términos de la serie (1) y escribámosla del modo siguiente

$$S_{2m} = (v_1 - v_2) + (v_3 - v_4) + \ldots + (v_{2m-1} - v_{2m}). \tag{4}$$

Puesto que las diferencias entre paréntesis de la suma (4) son positivas o iguales a cero, debido a la condición (2), entonces

$$S_{2m} \geqslant 0.$$

Si $2m$ crece, S_{2m} no decrece, porque cada vez se añaden sumandos positivos o iguales a cero.

Por otra parte, esta suma puede ser escrita así:

$$S_{2m} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \ldots - (v_{2m-2} - v_{2m-1}) - v_{2m}. \tag{5}$$

De aquí

$$S_{2m} \leqslant v_1.$$

[1]) De un modo más preciso, la serie (1) debe ser escrita así:

$$v_1 + (-v_2) + v_3 + (-v_4) + \ldots$$

Por consiguiente, S_{2m} por ser una sucesión monótonamente creciente (o más exactamente, no decreciente) y limitada, tiende a un cierto límite S cuando $m \to \infty$ (véase el § 10 del cap. VII), es decir,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Pero es evidente que

$$S_{2m+1} = S_{2m} + v_{2m+1}$$

y, de acuerdo con la (3), tenemos

$$\lim_{m\to\infty} v_{2m+1} = 0.$$

Teniendo en cuenta este hecho obtendremos

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} v_{2m+1} = S + 0 = S.$$

De este modo, cuando n crece ilimitadamente, la suma S_n tiende a un único límite S, cualquiera que sea n, par o impar. Por eso la serie (1) es convergente.

OBSERVACIÓN. *El valor absoluto del error en el cálculo aproximado de la suma de una serie alternada convergente que satisface las condiciones del teorema de Leibniz, no supera el valor absoluto del primer término suprimido.*

Efectivamente, si en una serie alternada convergente se suprimen todos los términos después del término $(-1)^{n-1} v_n$ y se designa por ρ_n el error obtenido, tenemos

$$\rho_n = (-1)^n v_{n+1} + (-1)^{n+1} v_{n+2} + \ldots =$$
$$= (-1)^n [(v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ldots];$$

de donde

$$|\rho_n| = (v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ldots$$

o

$$|\rho_n| = v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - \ldots$$

Por consiguiente,

$$|\rho_n| \leqslant v_{n+1}.$$

EJEMPLO. La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

indicada al final del § 6 es convergente, porque ella satisface todas las condiciones de Leibniz.

§ 8. Series de potencias

Una serie de tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

es decir, una serie de potencias enteras no negativas crecientes de la variable x, cuyos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ no dependen de x, se llama *serie de potencias*. A veces se examina una serie de potencias de forma más general:

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots + a_n (x - a)^n + \ldots, \qquad (2)$$

donde a es un número constante. La serie (2) se reduce fácilmente a la serie (1), si se considera que $x - a = x'$. Por eso, en adelante nos ocuparemos exclusivamente de las series de potencias del tipo (1).

Aclaremos el problema de la convergencia de la serie de potencias (1). Dando a la variable x un valor fijo obtendremos una serie numérica convergente o divergente según el valor de x.

Se puede demostrar que para toda serie de potencias (1) existe un número no negativo finito o infinito R, llamado *radio de convergencia de la serie* tal, que si $R > 0$, la serie es convergente para $|x| < R$ y divergente para $|x| > R$. Si $|x| = R$, es decir, si $x = R$ o $x = -R$, la serie puede ser convergente o divergente. El intervalo $(-R, R)$ se llama *intervalo de convergencia* de la serie de potencias. Si $R = +\infty$ el intervalo de convergencia representa toda la recta numérica. En el caso cuando $R = 0$, la serie de potencias (1) converge solamente en el punto $x = 0$ y, hablando estrictamente, el intervalo de convergencia no existe.

En los casos más simples el radio de convergencia de la serie de potencias (1) puede ser hallado con ayuda del criterio de d'Alembert. Para eso examinemos la serie compuesta de valores absolutos de términos de la serie (1):

$$|a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x|^2 + \ldots + |a_n|\,|x|^n + \ldots \qquad (3)$$

Como sabemos de lo explicado, la serie (1) es absolutamente convergente, si la serie (3) es convergente. Para resolver el problema de convergencia de la serie (3) apliquemos el criterio de d'Alembert. Designemos el $(n + 1)$-ésimo término de la serie (3) por v_n, es decir, $v_n = |a_n|\,|x|^n$; de donde $v_{n+1} = |a_{n+1}|\,|x|^{n+1}$. Compongamos la relación

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|.$$

Supongamos que existe el límite de la relación $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ cuando $n \to \infty$. Designemos este límite por l:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l. \qquad (4)$$

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = l\,|x|. \qquad (5)$$

Es evidente que si $|x| < \frac{1}{l}$, $l\,|x| < 1$ y la serie (3) es convergente. Por consiguiente, la serie (1) es también convergente y además absolutamente.

Al contrario, si $|x| > l$, entonces $l\,|x| > 1$. En virtud de la observación 2 del § 5, las dos series (3) y (1) son divergentes.

De este modo $R = \frac{1}{l} \geqslant 0$ es el radio de convergencia de la la serie de potencias (1) y, según la relación (4), tenemos la fórmula

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{6}$$

Queda abierta la cuestión de si la serie (1) es convergente para $R > 0$ en los extremos del intervalo de convergencia $(-R, R)$, es decir, cuando $x = R$ o $x = -R$. Esta cuestión debe resolverse en cada caso particular.

EJEMPLO. Examinemos la serie

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} \ldots \tag{7}$$

Aquí $a_n = \frac{1}{n}$ y $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Según la (6) para el radio de convergencia R de la serie (7) tenemos

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Por consiguiente, la serie (7) es convergente en el intervalo $(-1, 1)$.

Para resolver el problema de convergencia de la serie (7) en los extremos del intervalo supongamos primeramente que $x = 1$. Obtendremos una serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

que es, como hemos visto, divergente.

Supongamos ahora que $x = -1$. En este caso, la serie (7) se escribirá

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

Según el teorema de Leibniz esta serie es condicionalmente convergente.

Y bien el dominio de convergencia de la serie (7) es el intervalo $[-1, 1)$.

§ 9. Derivación e integración de series de potencias

La suma de una serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

es una función definida en el intervalo de convergencia $(-R, R)$ de esta serie, donde se supone que $R > 0$.

Se puede demostrar que la función $f(x)$ es diferenciable y que su derivada $f'(x)$ puede ser hallada por la derivación término a término de la serie (1), es decir,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

para $-R < x < R$. Esto es también justo para derivadas de orden superior.

De un modo análogo la integral indefinida de la función $f(x)$ puede ser obtenida para todos los valores de x pertenecientes al intervalo de convergencia, por la integración término a término de la serie (1), es decir,

$$\int f(x)\,dx = C + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

si $-R < x < R$.

De este modo, una serie de potencias en su intervalo de convergencia se comporta respecto a las operaciones de derivación e integración como un polinomio con un número finito de términos.

§ 10. Desarrollo de una función dada en series de potencias

Para las aplicaciones prácticas es importante saber **desarrollar una función dada $f(x)$ en series de potencias**, es decir, representar la función $f(x)$ en forma de suma de una serie de potencias, porque esto permite calcular los valores de esta función con cualquier precisión.

Antes de estudiar el problema en forma general examinemos algunos casos particulares.

Examinemos la serie de potencias

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Esta serie representa una progresión geométrica de razón x. Como se ve, ella converge, si $|x| < 1$ y su suma es igual a $\frac{1}{1-x}$. Por eso se puede escribir

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (1)$$

Esta última igualdad puede considerarse como el desarrollo de la función $\frac{1}{1-x}$ en una serie de potencia ordenada respecto a las potencias crecientes de la variable x. A partir del desarrollo (1) es fácil obtener otros desarrollos que representan un gran interés.

DESARROLLO DE LA FUNCIÓN $\ln(1+x)$. Sustituyendo en el desarrollo (1) x por $-z$ tendremos

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots \tag{2}$$

Si

$$0 \leqslant |z| \leqslant |x| < 1,$$

la igualdad (2) puede ser integrada, como se dijo en el § 9, término a término respecto a z en los límites de 0 a x. Por eso multiplicando la igualdad (2) por dz e integrando término a término desde 0 hasta x obtendremos

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z} = \int_0^x dz - \int_0^x z\,dz + \int_0^x z^2\,dz - \ldots + (-1)^n \int_0^x z^n\,dz + \ldots$$

De aquí

$$\ln(1+z)\Big|_0^x = \frac{z}{1}\Big|_0^x - \frac{z^2}{2}\Big|_0^x + \frac{z^3}{3}\Big|_0^x - \ldots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x + \ldots,$$

o bien,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

si $|x| < 1$. Se puede mostrar que este desarrollo es también justo para $x = 1$ y, por consiguiente,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

DESARROLLO DE LA FUNCIÓN $\operatorname{arctg} x$. Supongamos que en el desarrollo (1) $x = -z^2$:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots$$

Multiplicando la última igualdad por dz e integrando término a término desde 0 hasta x, donde $|x| < 1$, obtendremos,

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^x dz - \int_0^x z^2\,dz + \int_0^x z^4\,dz - \ldots + (-1)^n \int_0^x z^{2n}\,dz + \ldots,$$

o

$$\operatorname{arctg} z\Big|_0^x = z\Big|_0^x - \frac{z^3}{3}\Big|_0^x + \frac{z^5}{5}\Big|_0^x - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x + \ldots$$

Puesto que $\operatorname{arctg} 0 = 0$, tenemos definitivamente

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

si $|x| < 1$. Se puede demostrar que este desarrollo se queda también justo para $x = 1$, así como para $x = -1$.

En particular, para $x = 1$, se deduce

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Vemos que numerosas funciones, por ejemplo $\ln(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$, etc., admiten el desarrollo en series de potencias respecto al argumento x. Es natural plantear el problema general sobre el desarrollo de una función dada $f(x)$ en una serie de potencias no negativas crecientes de la variable x. Este problema será estudiado en el párrafo siguiente.

§ 11. Serie de Maclaurin

Supongamos que la función dada $f(x)$ puede ser desarrollada en serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots, \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son coeficientes indeterminados y los intervalos de convergencia $|x| < R$ de esta serie no se reducen a un punto, es decir, $R > 0$.

Como fue establecido más arriba, la serie de potencias (1) puede, en su intervalo de convergencia, derivarse término a término cualquier número de veces, entendiéndose que todas las series obtenidas serán convergentes y sus sumas serán iguales a las derivadas correspondientes.

Derivando sucesivamente término a término la serie (1) un número infinito de veces obtendremos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots,\\
f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot3a_3x + 3\cdot4a_4x^2 + 4\cdot5a_5x^3 + \ldots,\\
f'''(x) &= 2\cdot3a_3 + 2\cdot3\cdot4a_4x + 3\cdot4\cdot5a_5x^2 + \ldots,\\
f^{\mathrm{IV}}(x) &= 2\cdot3\cdot4a_4 + 2\cdot3\cdot4\cdot5a_5x + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Suponiendo que en estas igualdades, así como en la (1) $x = 0$ obtendremos

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 2\cdot3a_3,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(0) = 2\cdot3\cdot4a_4, \ \ldots$$

De donde

$$a_0 = f(0) \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1\cdot2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{1\cdot2\cdot3},$$
$$a_4 = \frac{f^{\mathrm{IV}}(0)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}, \ \ldots$$

Introduciendo luego los valores de coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, ... en la serie (1) obtendremos la serie de Maclaurin [1])

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (2)$$

(compare con la fórmula (6) del § 6 del cap. XI).

§ 12. Aplicación de la serie de Maclaurin al desarrollo de ciertas funciones en series de potencias

1) DESARROLLO DE LA FUNCION e^x. Sea

$$f(x) = e^x.$$

Tenemos

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \quad f^{IV}(x) = e^x, \ldots$$

Considerando que aquí $x = 0$ obtendremos

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 1, \quad f^{IV}(0) = 1, \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la serie de Maclaurin (la fórmula (2) del § 11), tendremos definitivamente

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (1)$$

El término general de la serie (1) es $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Aplicando el criterio de d'Alembert a la serie de valores absolutos obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0;$$

por consiguiente, la serie de potencias (1) es convergente para toda x, es decir, su intervalo de convergencia es $(-\infty, +\infty)$. Se demuestra en cursos completos que para todo valor de x, la suma de esta serie es igual a la función e^x.

2) DESARROLLO DE LA FUNCIÓN sen x. Sea

$$f(x) = \text{sen}\, x,$$

de donde

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\text{sen}\, x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{IV}(x) = \text{sen}\, x, \ldots$$

[1]) En el caso general, la serie de Maclaurin compuesta formalmente para una función $f(x)$ no es obligatoriamente convergente hacia esta función.

Considerando que $x = 0$ tenemos

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{\mathrm{IV}}(x) = 0,\ \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (2) del § 11 obtendremos

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad (2)$$

donde x se mide en radianes. No es difícil convencerse de que esta serie converge para toda x. Se puede demostrar que su suma es igual a sen x.

3) DESARROLLO DE LA FUNCIÓN $\cos x$. Si

$$f(x) = \cos x,$$

tenemos

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x,\quad f''(x) = -\cos x,\quad f'''(x) = \operatorname{sen} x,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos x,\ \ldots$$

Considerando que $x = 0$ obtendremos

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{\mathrm{IV}}(0) = 1,\ \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Maclaurin (2) del § 11 hallamos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad (3)$$

donde x se mide en radianes. No es difícil convencerse de que esta serie es convergente del mismo modo que la serie (2) para todo valor de x. Se demuestra que la suma de esta serie es igual a cos x.

El desarrollo (3) puede ser obtenido a partir del desarrollo (2), derivando término a término.

4) DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON $(1+x)^m$. Sea

$$f(x) = (1 + x)^m,$$

donde m es un número entero o fraccionario, positivo o negativo. En este caso tenemos

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Considerando que $x = 0$ en todas estas fórmulas obtendremos

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1),$$
$$f'''(0) = m(m-1)(m-2), \ldots,$$
$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1), \ldots$$

Sustituyendo las expresiones de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... en la serie de Maclaurin (2) del § 11, tendremos

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n + \ldots \quad (4)$$

La fórmula del binomio de Newton para un exponente no entero o negativo es formalmente la misma que para un exponente entero positivo. Si m es un número entero positivo, el factor $m - n + 1$ es igual a cero para $n = m + 1$. Por consiguiente, la serie (4) se interrumpirá y en vez del desarrollo infinito se obtendrá una suma finita (compare con el § 5 del cap. XI).

Aplicando la fórmula

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

hallamos el intervalo de convergencia $(-R, R)$ de la serie (4). Tenemos

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n};$$
$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}.$$

De donde

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n+1}{m-n}\right|$$

y, por consiguiente,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1.$$

De este modo, la serie binomial converge dentro del intervalo

$$-1 < x < +1$$

y diverge fuera de él. La convergencia de esta serie para $x = 1$ y $x = -1$ debe estudiarse separadamente en cada caso particular.

Es más complicado demostrar que para $|x| < 1$ la suma de la serie (4) es igual a $(1 + x)^m$.

§ 13. Aplicación de las series de potencias a los cálculos aproximados

Los desarrollos obtenidos permiten calcular de modo aproximado los valores particulares de funciones, así como ciertas integrales definidas «incalculables», etc. Examinemos algunos ejemplos.

1) CÁLCULO de sen 1. Considerando que $x = 1$ en el desarrollo de sen x tenemos

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$$

Si se omiten todos los términos a partir del cuarto, el error será menor, en valor absoluto, que $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$ (porque el desarrollo del sen 1 es una serie que satisface las condiciones del teorema de Leibniz). De aquí

$$\operatorname{sen} 1 \approx \operatorname{sen} 57°18' \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0{,}8417$$

con una exactitud de hasta 0,0002.

2) CALCULO DE RAICES Sea necesario calcular $\sqrt[3]{9}$.

Escribiendo esta expresión en forma

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

y considerando que en la fórmula del binomio de Newton $m = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{8}$, tendremos

$$\sqrt[3]{9} = 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots\right] =$$
$$= 2\left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41\,472} - \ldots\right) \approx$$
$$\approx 2\,(1 + 0{,}0417 - 0{,}0017 + 0{,}0001) = 2{,}0802\,.$$

Según la tabla, $\sqrt[3]{9} = 2{,}0801$.

3) CALCULO DE LOGARITMOS NATURALES. En el § 10 hemos obtenido el desarrollo siguiente:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \ldots \qquad (1)$$

La serie (1) no puede ser aplicada para calcular logaritmos naturales de números mayores de 2, porque ella diverge cuando $x > 1$. Sin embargo, a partir de esta serie podemos obtener a otra serie que sirve para nuestro fin. Para eso, reemplacemos en la fórmula (1) x por $-x$; en este caso obtendremos

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}-\ldots \quad (2)$$

Las dos series (1) y (2) tienen un intervalo de convergencia común: $|x|<1$. Como se sabe (véase el § 1), las series convergentes pueden ser adicionadas o restadas término a término. Por eso, suponiendo que $|x|<1$ y restando la igualdad (2) de la (1), tendremos

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right). \quad (3)$$

Tomando $\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N}$ $(N>0)$, hallamos $x=\frac{1}{2N+1}$. Reemplazando estos valores en la serie (3), obtendremos

$$\ln(N+1)-\ln N=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2N+1)^7}+\ldots\right]. \quad (4)$$

Aplicando la regla de d'Alembert, es fácil convencerse de que la serie (4) converge para todo número positivo N. Por consiguiente, utilizando esta serie se pueden determinar paso a paso los logaritmos naturales de todos los números enteros positivos.

Para valores elevados de N la serie (4) converge muy rápidamente. Evaluemos para $N>0$ el error ρ_n que obtenemos, si se suprimen en la fórmula (4) todos los términos situados entre paréntesis después del n-ésimo término. Tenemos

$$\rho_n=2\left[\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+5}}+\ldots\right].$$

Es evidente que

$$\rho_n<\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\ldots\right]$$

o, calculando la suma de la progresión geométrica infinitamente decreciente que figura entre corchetes, obtendremos por último

$$\rho_n<\frac{1}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\cdot\frac{1}{N(N+1)}.$$

Poniendo, por ejemplo, en el desarrollo (4) $N=1$ y $n=3$, tenemos

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}\right)=0{,}6932;$$

en este caso, según la fórmula (5), el error es

$$\rho_3 < \frac{1}{2\cdot 7\cdot 3^5\cdot 1\cdot 2} < \frac{1}{5000},$$

es decir, tenemos tres decimales exactos.

Luego, tomando $N = 2$ y limitándonos a dos términos ($n = 2$), obtendremos

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}\right) = 1{,}0985$$

con un error

$$\rho_2 < \frac{1}{2\cdot 5\cdot 5^3\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{7500}.$$

Continuando la operación se puede calcular el logaritmo natural de cualquier número positivo con suficiente grado de precisión.

4) EMPLEO DE SERIES PARA EL CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS. Supongamos, por ejemplo, que es necesario calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\ ^{1)}.$$

La integral indefinida correspondiente

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

no puede ser expresada por funciones elementales, es decir, ésta es una integral «incalculable» y, por consiguiente, aquí no se puede aplicar la fórmula de Newton — Leibniz. Sin embargo, la integral definida inicial puede ser calculada aproximadamente con ayuda de series.

Al dividir término a término por x la serie del sen x tendremos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

De donde, integrando término a término, obtendremos

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4\,dx - \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{5!}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \ldots \approx 0{,}94611.$$

---

[1]) Aquí la función subintegral $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está definida para $x \neq 0$. Cuando $x = 0$ consideramos $f(0) = 1$ en razón de su continuidad.

Puesto que la serie es alternada y los módulos de sus términos decrecen monótonamente, al tomar los tres primeros términos el error será menor de $\frac{1}{7!\cdot 7}=\frac{1}{35\,280}<0{,}00003$.

§ 14. Series de Taylor

En algunos casos la función $f(x)$ o sus derivadas pierden sus sentidos para $x=0$, como, por ejemplo, la función $f(x)=\ln x$ o $f(x)=\sqrt{x}$. Estas funciones no pueden ser desarrolladas en series de Maclaurin. Para el desarrollo de funciones de este género se puede a veces utilizar series de potencias más generales ordenadas por potencias crecientes de la diferencia $x-a$, donde a es un número constante adecuadamente elegido.

Supongamos que una función dada $f(x)$ esté desarrollada según las potencias crecientes de la diferencia $x-a$:

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+A_3(x-a)^3+\\+A_4(x-a)^4+\ldots, \tag{1}$$

y que este desarrollo sea válido en cierto intervalo $|x-a|<R$.

Supongamos que $x-a=z$. En este caso, el desarrollo (1) se escribirá así

$$F(z)\equiv f(z+a)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots, \tag{2}$$

donde $|z|<R$. Por consiguiente, según el § 11, el desarrollo (2) es la serie de Maclaurin de la función $F(z)$. Puesto que $F^{(n)}(z)=$ $=f^{(n)}(z+a)$ $(n=1,2,\ldots)$, obtenemos

$$A_0=F(0)=f(a),\quad A_1=\frac{F'(0)}{1!}=\frac{f'(a)}{1!},$$

$$A_2=\frac{F''(0)}{2!}=\frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\quad A_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ \ldots$$

Sustituyendo con estos valores de los coeficientes los de la serie (1) tendremos

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots\\\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \tag{3}$$

Esta es *la serie de Taylor*.

En particular, tomando aquí $a=0$, obtendremos la serie de Maclaurin

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Limitándonos en la fórmula (3) a un número finito de términos, en lugar de la serie de Taylor obtendremos *el polinomio de Taylor*

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{4}$$

(véase la fórmula (1) del § 6 del cap. XI). Si la serie (3) converge en un entorno U_a del punto a y si su suma es igual a la función $f(x)$, el polinomio $P_n(x)$ da una representación aproximada de la función $f(x)$ en el entorno U_a.

EJEMPLO 1. Desarrollar el polinomio $f(x)=x^3-5x^2+8x+3$ según las potencias crecientes de la diferencia $x-2$.

Derivando la función $f(x)$ tenemos

$$f'(x)=3x^2-10x+8,\quad f''(x)=6x-10,\quad f'''(x)=6,\quad f^{(n)}(x)=0$$

para $n>3$.
Considerando $x=2$ obtenemos

$$f(2)=7,\quad f'(2)=0,\quad f''(2)=2,\quad f'''(2)=6,\quad f^{(n)}(2)=0$$

para $n>3$.
De acuerdo con la serie de Taylor (3), el desarrollo de la función $f(x)$ según las potencias crecientes de la diferencia $x-2$ tenemos la forma

$$f(x)=7+\frac{x-2}{1}\cdot 0+\frac{(x-2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{(x-2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6$$

y, definitivamente,

$$f(x)=7+(x-2)^2+(x-2)^3.$$

EJEMPLO 2. Desarrollar la función $f(x)=\ln x$ según las potencias crecientes de la diferencia $x-1$.

Tenemos

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3},\quad f^{\mathrm{IV}}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ \ldots$$

De aquí

$$f'(1)=1,\quad f''(1)=-1,\quad f'''(1)=1\cdot 2,\quad f^{\mathrm{IV}}(1)=-1\cdot 2\cdot 3,\ \ldots$$

Por consiguiente,

$$\ln x=\ln 1+1\cdot(x-1)-\frac{1}{1\cdot 2}\cdot(x-1)^2+$$
$$+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(x-1)^3-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(x-1)^4+\ldots$$

o sea,

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots$$

Este desarrollo es justo, si $0<x\leqslant 2$.

Notemos que esta serie puede ser obtenida directamente a partir de la serie para $\ln(1+x)$ (véase el § 10), tomando $\ln x=\ln(1+z)$ donde $z=x-1$.

§ 15. Series en el dominio complejo

En ciertos casos hace falta examinar series cuyos términos son **números complejos**, es decir, las series de tipo

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \ldots + (u_n + iv_n) + \ldots, \qquad (1)$$

donde u_n y v_n ($n = 1, 2, \ldots$) son números reales e $i^2 = -1$.

La serie (1) se llama *convergente*, si convergen por separado la serie compuesta de las partes reales

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (2)$$

y la serie compuesta de las partes imaginarias de sus términos

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (3)$$

Si designamos por S_n la suma de los n primeros términos de la serie (2) y por T_n la suma de los n primeros términos de la serie (3), cuando estas series son convergentes, existen los

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} T_n = T.$$

En este caso, el número complejo $S + iT$ se llama *suma de la serie* (1).

Tiene lugar el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si la serie de los módulos de los términos de la serie* (1) *es convergente, la serie* (1) *es también convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si la serie

$$\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\ldots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\ldots,$$

es convergente, entonces en virtud de las desigualdades evidentes

$$|u_n| \leqslant \sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

y

$$|v_n| \leqslant \sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

($n = 1, 2, \ldots$) y según el criterio de comparación (§ 4) y el teorema del § 6, las dos series (2) y (3) serán también absolutamente convergentes. Entonces, de acuerdo con la definición, la serie (1) es también convergente. El teorema queda demostrado.

Se examinan también en el dominio complejo las series de potencias

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

donde $c_n = a_n + ib_n$, $z = x + iy$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

En virtud del teorema precedente, semejante serie será a priori convergente, si es convergente la serie de los módulos

$$|c_0| + |c_1||z| + |c_2||z|^2 + \ldots + |c_n||z|^n + \ldots,$$

donde $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Para investigar la convergencia de esta última serie, se pueden aplicar todos los criterios conocidos, por ejemplo, el de d'Alembert.

§ 16. Fórmulas de Euler

Apliquemos los desarrollos obtenidos de e^x, sen x, cos x para deducir fórmulas muy importantes que ligan estas funciones entre sí.

Si x es un número real, como se sabe (véase el § 12) tiene lugar el desarrollo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

esta serie es convergente para cualquier valor de x.

Si $z = x + iy$, donde x e y son números reales e $i^2 = -1$, por definición, tomamos

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{1}$$

Aplicando el criterio de d'Alembert a la serie de módulos

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \ldots,$$

descubrimos que esta serie es convergente para cada valor de $|z|$ y, por consiguiente, es también convergente la serie (1). De este modo, la función exponencial e^z está definida para todos los valores complejos de z.

En particular para $z = ix$, donde x es un número real, tenemos

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \\ + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \ldots$$

Puesto que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc., reemplazando estos valores en el desarrollo de e^{ix}, obtendremos

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

o, después de separar las partes reales e imaginarias, tendremos

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\right) + \\ + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).$$

Según las fórmulas (2) y (3) del § 12, la expresión encerrada en el primer paréntesis es igual a cos x y la expresión que está en el segundo paréntesis es igual a sen x. Por eso llegamos a la fórmula notable siguiente:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \tag{2}$$

Sustituyendo aquí x por $-x$ y teniendo en cuenta que $\cos(-x) = \cos x$ y que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, hallamos

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \tag{3}$$

Acabamos de obtener las famosas *fórmulas de Euler*.

Resolviendo las fórmulas (2) y (3) respecto a $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, tendremos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En el caso general, si $z = x + iy$, se puede demostrar que

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}. \tag{4}$$

Por consiguiente,

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

EJEMPLO. $e^{1+\frac{\pi}{2}i} = e\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = ei.$

Si $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ es un número complejo dado en forma trigonométrica (§ 2 del cap. XVI), entonces en base a la fórmula (4) obtenemos *la forma exponencial del número complejo*

$$z = re^{i\varphi}, \tag{5}$$

donde $r = |z|$ y $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

§ 17. Series trigonométricas de Fourier

Recordemos (§ 6 del cap. VIII) que la función $f(x)$ se llama *continua a trozos* sobre un intervalo dado $\langle a, b\rangle$, si este intervalo puede ser subdividido en un número finito de intervalos parciales $\langle a_s, b_s\rangle$ ($s = 1, 2, \ldots, N$) tales, que en cada uno de ellos: 1) la función $f(x)$ está acotada y es continua en los puntos interiores; 2) en los extremos de intervalos existen límites unilaterales

$$f(a_s + 0) = \lim_{x_s \to a_s + 0} f(x), \quad f(b_s - 0) = \lim_{x_s \to b_s - 0} f(x) \quad (s = 1, 2, \ldots, N).$$

Llámase integral de la función $f(x)$ al número

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{s=1}^{N} \int_{a_s}^{b_s} f(x)\,dx.$$

Se puede demostrar que para una función continua a trozos en $\langle a, b \rangle$ existe una primitiva generalizada (véase el § 12 del cap. XIV)

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \quad (x \in [a, b],\ x_0 \in [a, b])$$

y, por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos funciones reales continuas a trozos en un intervalo acotado $\langle a, b \rangle$. Por analogía con la operación correspondiente del álgebra vectorial (§ 13 del cap. XVIII) se llama *producto escalar* de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ la integral

$$(\varphi, \psi) \equiv \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

OBSERVACIÓN. No es difícil comprender que el producto de dos funciones continuas a trozos en $\langle a, b \rangle$ es una función continua a trozos en $\langle a, b \rangle$ y que, por consiguiente, en nuestro caso la integral (1) existe.

El número

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \left[\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

se denomina *norma de la función* $\varphi(x)$.

Las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se llaman *ortogonales* en un intervalo dado $\langle a, b \rangle$, si

$$(\varphi, \psi) \equiv \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Examinemos *el sistema fundamental de funciones trigonométricas*

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{l},\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

de período común $T = 2l$ (l es el semiperíodo). En física, las funciones

$$u_n = a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y

$$v_n = b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

se llaman *armónicas fundamentales*; sus gráficas son sinusoides de amplitudes respectivas a_n y b_n (la armónica v_0 no se examina porque $v_0 \equiv 0$).

LEMA. *Las funciones trigonométricas fundamentales* (4) *son ortogonales de dos en dos, en todo intervalo con longitud igual al período común* $T = 2l$ *de estas funciones*, es decir, para el intervalo estándar $\langle -l, l \rangle$ las condiciones de ortogonalidad son:

$$\text{I.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

para $m \neq n$,

$$\text{II.}\quad \left(\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l},\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

para $m \neq n$,

$$\text{III.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

(m y n son números enteros arbitrarios).

Las condiciones de ortogonalidad I, II, III se verifican directamente por medio del cálculo de las integrales correspondientes, utilizando las fórmulas trigonométricas siguientes:

$$1)\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$2)\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$3)\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right].$$

Por ejemplo, para $m \neq n$ tenemos

$$\text{I.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m-n)\pi}\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{l}+\frac{l}{(m+n)\pi}\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi l}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l} = 0,$$

porque $\operatorname{sen} k\pi = 0$ para todo k.

Dejamos al lector la tarea de verificar por su cuenta las relaciones II y III.

OBSERVACIÓN. Calculemos las normas de las funciones trigonométricas fundamentales.

1) Para $n = 0$ tenemos la armónica de orden 0: $\cos 0x = 1$. En virtud de la fórmula (2), obtenemos

$$\| 1 \|^2 = \int_{-l}^{l} 1^2 \, dx = 2l,$$

es decir,

$$\| 1 \| = \sqrt{2l}. \tag{5}$$

2) Para $n > 1$ tenemos

$$\left\| \cos \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = \int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{l}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{l}\right) \Big|_{-l}^{l} = l,$$

es decir,

$$\left\| \cos \frac{n\pi x}{l} \right\| = \sqrt{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

3) Análogamente,

$$\left\| \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{l}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{l}\right) \Big|_{-l}^{l} = l,$$

es decir,

$$\left\| \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right\| = \sqrt{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Sea $f(x)$ una función continua a trozos y periódica de período $T = 2l$. Es natural tratar de representar esta función en forma de suma de un número finito o infinito de armónicas

$$u_n = a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$) (véase el § 3 del cap. VI) del mismo período $2l$ (**análisis armónico de la función**). De este modo, llegamos a *la serie trigonométrica de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\right) \tag{8}$$

(aquí, para comodidad de los cálculos ulteriores, el coeficiente de la armónica de orden 0 está tomado con el factor $\frac{1}{2}$). Históricamente este problema surgió por primera vez durante el tratamiento matemático de los resultados de las observaciones sobre la altura de la ola de marea alta en un lugar dado, esta altura se repite periódicamente en el transcurso del tiempo. El análisis armónico de la altura de la ola de marea alta ha permitido formular previsiones a largo plazo, algo de mucha importancia para la navegación marítima.

Supongamos que la serie (8) es convergente en el intervalo $\langle -l, l\rangle$ y es integrable término a término.
Integrando término a término la serie (8), tendremos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l_0}^{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]. \quad (9)$$

Puesto que

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

para $n=1, 2, \ldots$ (lo mismo resulta de las condiciones de ortogonalidad), obtenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2l = a_0 l,$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx. \quad (10)$$

Observemos que el término independiente de la serie (8)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

representa **el valor medio** de la función periódica $f(x)$.

Multiplicando ahora ambos miembros de la igualdad (8) por

$$\cos\frac{m\pi x}{l} \quad (m=1, 2, \ldots)$$

e integrndo término a término, tendremos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx\right]. \quad (11)$$

De aquí se deduce, en virtud de las condiciones de ortogonalidad I, III y de la fórmula (6), que

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = a_m\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{m\pi x}{l}\,dx = a_m l \tag{12}$$

y, por consiguiente,

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{13}$$

Análogamente, multiplicando ambos miembros de la igualdad (8) por sen $\frac{m\pi x}{l}$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots)$ e integrando término a término, hallamos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx\right]. \tag{14}$$

De aquí, en virtud de las condiciones de ortogonalidad II y III y de la fórmula (7), tenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx = b_m\int_{-l}^{l}\mathrm{sen}^2\,\frac{m\pi x}{l}\,dx = b_m l$$

y, en consecuencia,

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{15}$$

Reemplazando m por n (¡lo que es admisible de acuerdo con el sentido de las fórmulas!), de las fórmulas (13) y (15) obtenemos los siguientes valores para los coeficientes del desarrollo de (8)

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\left\{\begin{matrix}\cos\dfrac{n\pi x}{l} \\ \mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{l}\end{matrix}\right.\,dx \tag{16}$$

$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Notemos que, en virtud de la (10), el coeficiente a_0 se obtiene a partir de la fórmula (16) para $n = 0$; esto explica por qué el término independiente de la serie (8) se toma en forma de

$\frac{1}{2}a_0$. Los números a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$.

DEFINICIÓN *La serie trigonométrica* (8) *cuyos coeficientes son coeficientes de Fourier* (16) *de la función periódica dada* $f(x)$, *se llama* ***serie de Fourier*** *(o, más exactamente,* serie ***trigonométrica de Fourier****), independientemente de que la suma de esta serie sea igual o no a la función* $f(x)$.

En este sentido, se dice que la función $f(x)$ **engendra** una serie de Fourier, y se escribe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{17}$$

donde el signo $\sim$ significa «corresponde a».

Indicaremos ahora sin demostración las condiciones suficientes para que una función periódica pueda ser desarrollada en serie de Fourier.

Llamaremos a la función $f(x)$ *suave a trozos* en el intervalo $\langle a, b \rangle$, si ella es continua a trozos en $\langle a, b \rangle$ y tiene en este intervalo una derivada continua a trozos $f'(x)$.

TEOREMA DE CONVERGENCIA *Sea* $f(x)$ *una función periódica de período* $T = 2l > 0$, *definida en* $(-\infty, +\infty)$ *excepto, puede ser, en sus puntos de discontinuidad, y suave a trozos en su dominio principal* [1]).

Entonces: 1) *su serie de Fourier* (17) *converge para todo valor de* $x \in (-\infty, +\infty)$, *es decir, existe la suma de la serie de Fourier*

$$S(x) = \lim_{N \to \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \right]; \tag{18}$$

2) *la suma* $S(x)$ *de la serie de Fourier es igual al valor de la función* $f(x)$ *en los puntos de su continuidad:* $S(x) = f(x)$, *y es igual a la media aritmética de los límites a la derecha y a la izquierda de la función* $f(x)$ *en los puntos de discontinuidad* x_0 [2]), *es decir,*

$$S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]. \tag{19}$$

Puesto que para un punto de continuidad x de la función $f(x)$ tenemos

$$f(x) = f(x - 0) = f(x + 0),$$

[1]) Es decir, en cualquier intervalo de longitud igual al período de esta función.

[2]) En el dominio principal de la función periódica $f(x)$ existe solamente un número finito de estos puntos.

se puede escribir en el caso general

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]. \tag{20}$$

En adelante, supondremos que para la función $f(x)$ se cumplen las condiciones del teorema de convergencia y en lugar del signo de correspondencia $\sim$ escribiremos el signo de igualdad $=$ (¡ignorando los puntos de discontinuidad de la función!). De este modo, para la serie de Fourier de la función $f(x)$ tenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{21}$$

donde los coeficientes a_n y b_n se determinan por medio de la fórmula (16).

OBSERVACIÓN Las fórmulas (21) y (16) se simplifican, si el período de la función $f(x)$ es igual a 2π. En este caso, $l=\pi$ y tenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx), \tag{21'}$$

donde

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left\{\begin{matrix}\cos nx\\ \operatorname{sen} nx\end{matrix}\right.dx$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{16'}$$

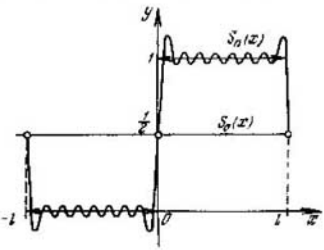

Fig. 220

EJEMPLO. Escribir la serie de Fourier de la función periódica $f(x)$ de período $T=2l$, sabiendo que (fig. 220)

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x<0,\\ 1, & 0<x<l.\end{cases}$$

Mediante la fórmula (16) obtenemos

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{l}1\cdot dx\right\}=1,$$

es decir $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$;

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0}0\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{0}^{l}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0} 0\cdot\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{0}^{l} 1\cdot\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\left(-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=-\frac{1}{n\pi}\,[(-1)^n-1],$$

es decir,

$$b_n=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ es par;}\\ 2/n\pi, & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases} \tag{22}$$

De donde, puesto que la función $f(x)$ es suave a trozos en el intervalo $(-l,\ l)$, es justo el desarrollo

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{l}+\ldots\right)\ (-l<x<l). \tag{23}$$

La fig. 220 muestra las gráficas de sumas parciales de la serie de Fourier (23) de la función $f(x)$: $S_0(x)=\frac{1}{2}$, $S_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{l}$, etc.

§ 18. Series de Fourier de funciones pares e impares

Examinemos la integral **simétrica**

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{l} f(x)\,dx, \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función continua o continua a trozos en el intervalo cerrado $[-l,\ l]$.

Efectuando en la primera integral la sustitución $x=-t$, $dx=-dt$ y teniendo en cuenta que una integral definida es independiente de la designación de la variable de integración, obtendremos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=-\int_{l}^{0} f(-t)\,dt+\int_{0}^{l} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{l} f(-x)\,dx+\int_{0}^{l} f(x)\,dx=\int_{0}^{l}[f(-x)+f(x)]\,dx. \tag{2}$$

1) Sea $f(x)$ una **función par**, es decir $f(-x)=f(x)$. En este caso, de la fórmula (2), tenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int_{0}^{l} f(x)\,dx. \tag{3}$$

De este modo *la integral simétrica de una función par es igual a la integral doble de esta función tomada por la mitad del intervalo de integración.*

2) Sea $f(x)$ una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$. En este caso, de la fórmula (2), obtenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

De este modo, *la integral simétrica de una función impar es igual a cero.*

Notemos que las afirmaciones 1) y 2) son evidentes a partir de consideraciones geométricas (fig. 221 *a* y *b*).

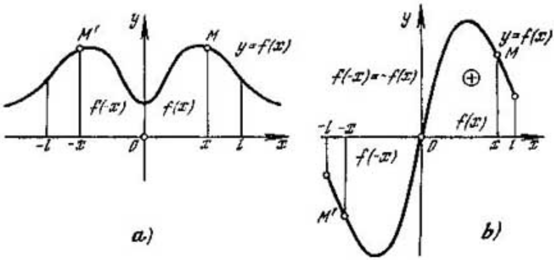

Fig. 221

TEOREMA. 1) *La serie de Fourier de una función periódica par contiene solamente cosenos de arcos múltiples*, es decir, sólo armónicas pares incluyendo el término independiente.

2) *La serie de Fourier de una función periódica impar contiene solamente senos de arcos múltiples*, es decir, contiene solamente armónicas impares.

DEMOSTRACIÓN. 1) Sean $f(x)$, una función periódica par de período $2l$, y a_n y b_n, sus coeficientes de Fourier. En virtud de la fórmula (4) y teniendo en cuenta que las armónicas sen $\frac{n\pi x}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son funciones impares, tenemos

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Por eso,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \tag{6}$$

donde, en virtud de la fórmula (3) tenemos

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (7)$$

2) Sea ahora $f(x)$ una función periódica impar de período $2l$. Puesto que $f(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son funciones impares, entonces,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Por eso,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad (8)$$

donde, en virtud de la fórmula (3), tenemos

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

El teorema queda demostrado.

§ 19. Noción sobre las series de Fourier de funciones no periódicas

Una función $f(x)$ suave a trozos **no periódica**, definida sobre el eje infinito $-\infty < x < +\infty$, **no puede ser** representada por una serie de Fourier porque la suma de esta serie, por ser la suma de armónicas de período común T, es una función periódica del mismo período T y, por consiguiente, no puede ser igual a la función $f(x)$ para todos los valores de x. Sin embargo, es posible construir la representación de esta función en forma de una serie de Fourier correspondiente sobre cualquier **intervalo acotado**.

Supongamos que el intervalo que nos interesa es $\langle -l, l\rangle$, es decir, un intervalo simétrico respecto al origen de las coordenadas (esto se puede lograr siempre mediante una traslación paralela del eje Ox).

Construyamos una función $\varphi(x)$ de período $2l$ tal, que (fig. 222)

$$\varphi(x) \equiv f(x) \quad \text{para} \quad -l < x < l. \qquad (1)$$

Suponiendo que la función $\varphi(x)$ satisface las condiciones del teorema de convergencia (§ 17), tenemos

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)\ (-\infty<x<+\infty), \quad (2)$$

donde

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\left\{\begin{matrix}\cos\frac{n\pi x}{l}\\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\end{matrix}\right.dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \quad (3)$$

De donde, en virtud de la identidad (1), obtenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)\ (-l<x<l), \quad (2')$$

donde

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\left\{\begin{matrix}\cos\frac{n\pi x}{l}\\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\end{matrix}\right.dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \quad (3')$$

Calculemos la suma $S(x)$ de la serie (2′) o de la serie correspondiente (2), en los puntos de extremo del intervalo $x=\pm l$.

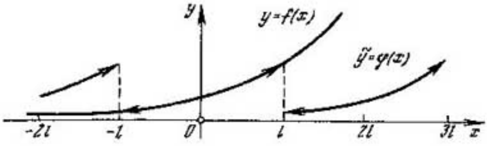

Fig. 222

De acuerdo con la fórmula general (§ 17), tenemos

$$S(l)=\frac{\varphi(l-0)+\varphi(l+0)}{2}. \quad (4)$$

Pero, teniendo en cuenta la identidad (1) y que $\varphi(x)$ es una función periódica de período $2l$, es geométricamente evidente (fig. 222) que

$$\varphi(l-0)=f(l-0), \quad \varphi(l+0)=\varphi(-l+0)=f(-l+0).$$

Por eso, de la fórmula (4) obtenemos,

$$S(l)=\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}. \quad (5)$$

Del hecho de que la suma $S(x)$ tiene la periodicidad de $2l$, se deduce

$$S(-l) = S(l). \tag{6}$$

EJEMPLO 1. La función $f(x) = e^x$ está desarrollada en serie de Fourier en el intervalo $(-1, 1)$. ¿Cuál es el valor de $S(1)$, si $S(x)$ es la suma de la serie de Fourier?

En virtud de la fórmula (5), tenemos

$$S(1) = \frac{e^{1-0} + e^{-1+0}}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2} = \operatorname{ch} 1 = 1{,}54.$$

Sea ahora necesario representar una función no periódica $f(x)$ por una serie de Fourier de período $2l$ en un «semiperíodo» $0 < x < l$.

Suponiendo que

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l, \\ f_1(x), & -l < x < 0, \end{cases} \tag{7}$$

donde $f_1(x)$ es una función arbitraria suave a trozos, obtenemos, a partir de las fórmulas (2) y (3), un conjunto infinito de series de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (0 < x < l), \tag{8}$$

que representan la función $f(x)$ en el intervalo $(0, l)$.

En particular, tomando en la fórmula (7) $f_1(x) = f(-x)$ $(-l < x < 0)$ (**"prolongación par"**), tendremos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (0 < x < l), \tag{9}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Análogamente, suponiendo que en la fórmula (7) $f_1(x) = -f(-x)$ $(-l < x < 0)$ (**"prolongación impar"**), obtendremos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad (0 < x < l), \tag{11}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

De este modo, *una función suave a trozos, definida sobre un semiperíodo, puede ser desarrollada en una serie de Fourier correspondiente* *por una infinidad de procedimientos. En particular, se puede representar esta función sobre el semiperíodo dado:* 1) *por una suma de armónicas pares, o* 2), *por una suma de armónicas impares.*

EJEMPLO 2. **Desarrollar la función $f(x) = x$ en series de cosenos de arcos múltiples en el intervalo $(0, \pi)$.**

Notemos que la función $f(x)$ es aquí impar y hace falta obtener su serie de Fourier que contenga solamente armónicas pares. Esto se puede lograr reduciendo el intervalo de desarrollo.

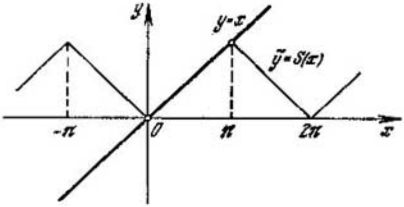

Fig. 223

Tomando $l = \pi$, obtendremos por medio de la fórmula (9)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{13}$$

Aplicando la fórmula (10) hallamos

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

y

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overset{u}{x}\,d\left(\overbrace{\frac{\operatorname{sen} nx}{n}}^{v}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{x\cdot\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\,dx\right\} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}\,[(-1)^n = 1]$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. De donde,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

De este modo, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, tenemos

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right). \tag{14}$$

La fig. 223 muestra la gráfica de la función $y = x$ y la gráfica de la suma $\tilde{y} = S(x)$ de la serie de Fourier (14). Estas gráficas coinciden cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi$, pero son distintas fuera del intervalo $[0, \pi]$.

Tomando $x = 0$ en la fórmula (14), obtenemos una serie numérica notable (serie de Euler)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{15}$$

EJERCICIOS

Estudiar la convergencia de las siguientes series aplicando la condición necesaria de convergencia y la regla de comparación directa:

1. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ 2. $0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} + \ldots$

3. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \ldots$

4. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \ldots$ 5. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$

INDICACIÓN. Comparar con la serie armónica multiplicada por $\frac{1}{2}$.

6. $1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{9\sqrt{3}} + \ldots$

Estudiar la convergencia de las siguientes series aplicando la regla de d'Alembert:

7. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots$ 8. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

9. $\frac{2}{1000} + \frac{2^2}{2000} + \frac{2^3}{3000} + \ldots$ 10. $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \frac{(3!)^2}{6!} + \ldots$

11. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \ldots$ 12. $\frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots$

Estudiar la convergencia de las siguientes series con términos de signo variable:

13. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ 14. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$

15. $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \ldots$ 16. $\frac{1}{2} + \frac{9}{4} - \frac{25}{8} - \frac{49}{16} + \frac{81}{32} + \frac{121}{64} - \ldots$

Determinar los intervalos de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento de ellas en los puntos de frontera:

17. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ 18. $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \ldots$

19. $1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$ 20. $\frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot 2^3} + \ldots$

Desarrollar en serie de Maclaurin las funciones:
21. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$. 22. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

23. Desarrollar la función $f(x) = \sqrt{x}$ según las potencias enteras crecientes de la diferencia $x - 1$.

Utilizando los desarrollos habituales, representar en forma de series de potencias las siguientes funciones:

24. $f(x) = e^{-x^2}$ 25. $f(x) = \cos^2 x$. INDICACIÓN. $\cos^2 x = \frac{(1+\cos 2x)}{2}$.

26. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 27. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

28. Utilizando el desarrollo en serie, calcular el valor aproximado de a) $\sqrt{e}$; b) sen 18°; c) $\sqrt[5]{1,2}$.

29. Calcular el valor aproximado de la integral

$$\int_0^{1/2} e^{x^2}\,dx.$$

30. Deducir una fórmula aproximada para la función

$$f(x) = \int_0^x \cos\sqrt{x}\,dx,$$

si $|x|$ es una magnitud pequeña.

31. Desarrollar en serie trigonométrica de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$; b) $f(x) = x^2$.

Capítulo XXII

Ecuaciones diferenciales

§ 1. Nociones fundamentales

En numerosos problemas de geometría, física, mecánica, ciencias naturales, etc., desempeñan un papel importante las *ecuaciones diferenciales*. Se denominan así las ecuaciones que vinculan una variable independiente x, una función buscada y y sus derivadas de diversos órdenes respecto a x. Se llama *orden* de esta ecuación el correspondiente a la derivada más elevada que figura en ella.

De este modo, una ecuación diferencial de orden n se escribe en forma general

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

esta ecuación puede, en casos particulares, no contener x, y y ciertas derivadas de orden inferior a n. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y' + \frac{2}{x} y = \operatorname{sen} x, \quad y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y''' + yy' = 0$$

son, respectivamente, de primer, segundo y tercer órdenes.

Una ecuación diferencial (1) se llama *lineal*, si su primer miembro es un polinomio de primer grado respecto a la función incógnita y y a sus derivadas y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ (y no contiene sus productos), es decir, si esta función tiene la forma

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x). \tag{2}$$

Aquí las funciones $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$, generalmente definidas y continuas sobre un cierto intervalo común, se llaman *coeficientes* de la ecuación lineal, y la función $f(x)$ se denomina *segundo miembro* o *término independiente* de la misma. Si el segundo miembro $f(x)$ de una ecuación lineal (2) es idénticamente igual a cero, esta ecuación se llama *homogénea*; en el caso contrario, denomina *no homogénea*. Las ecuaciones diferenciales lineales tienen numerosas aplicaciones.

Toda función

$$y = \varphi(x)$$

que al ser introducida en la ecuación (1) la transforma en una identidad se llama *solución* de esta ecuación. *Resolver* o *integrar* una ecuación diferencial dada significa hallar todas sus soluciones en un dominio dado. La gráfica de la solución se llama *curva integral*.

Notemos que el problema fundamental del cálculo integral, que consiste en hallar la función y, cuya derivada sea igual a la función continua dada $f(x)$, se reduce a la ecuación diferencial simple

$$y' = f(x).$$

La solución general de esta ecuación es

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{3}$$

donde C es una constante arbitraria y $\int f(x)\,dx$ es una de las primitivas de la función $f(x)$ [1]).

Eligiendo de la forma debida la constante C, a condición de que la función $f(x)$ sea continua, se puede obtener cualquier solución de esta ecuación diferencial simple.

Al integrar ecuaciones diferenciales de orden superior, surgen varias constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. Examinemos la ecuación de segundo orden $y'' = 0$. Puesto que $y'' = (y')' = 0$, resulta que $y' = C_1$. Integrando la última igualdad, tendremos

$$y = \int C_1\,dx + C_2 = C_1x + C_2. \tag{4}$$

De este modo la solución (4) contiene dos constantes arbitrarias C_1 y C_2, es decir, el número de constantes arbitrarias en la fórmula (4) es igual exactamente al orden de la ecuación. Semejante solución se llama *solución general de la ecuación*; en este caso ella representa el conjunto infinito de soluciones de la ecuación diferencial.

DEFINICIÓN 1. *Se llama* ***solución general*** *de una ecuación diferencial (1) a la solución*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\ ^{2)}$$

cuyo número de constantes arbitrarias independientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ es igual al orden de esta ecuación.

En este caso, las constantes arbitrarias se llaman *independientes*, si el número total de constantes que tiene la función φ no puede ser reducido por introducción de otras constantes arbitrarias, continuamente dependientes de las constantes dadas.

---

[1]) Más exactamente, la fórmula (3) debería escribirse así:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C, \tag{3'}$$

donde x_0 es un punto inicial del dominio dado. La fórmula de tipo (3′) es cómoda para las aplicaciones porque ella permite explicitar la constante arbitraria C. En adelante, es necesario tener en cuenta esta nota.

[2]) Se supone que la función φ es continuamente derivable un número de veces suficiente con respecto a todos sus argumentos.

Si la solución general está dada en forma implícita

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n) = 0,$$

ésta habitualmente se denomina *integral general*.

DEFINICIÓN 2 *Cualquier solución de una ecuación diferencial que es obtenida a partir de su solución general, dando valores determinados a las constantes arbitrarias, que la componen, se llama* ***solución particular*** *de esta ecuación.*

EJEMPLO 2. Examinemos la ecuación de segundo orden

$$y'' + y = 0.$$

Es fácil comprender que las funciones sen x y cos x serán soluciones de esta ecuación, porque

$$(\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad (\cos x)'' = -\cos x.$$

No es difícil verificar directamente que la función

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias independientes, es la solución de nuestra ecuación y, por consiguiente, representa su solución general. Si ponemos, por ejemplo, que $C_1 = 2$ y $C_2 = -5$, obtendremos la función

$$y_1 = 2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$$

que es una **solución particular** de la ecuación diferencial considerada.

Si al resolver una ecuación diferencial se halla cierta función, se puede verificar la certeza de la solución sustituyendo esta función en la ecuación.

EJEMPLO 3 Mostrar que la función $y = (C_1 + C_2x)\, e^x$ es solución de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Efectivamente, aquí

$$y' = (C_1 + C_2x)\, e^x + C_2e^x = (C_1 + C_2 + C_2x)\, e^x$$

e

$$y'' = (C_1 + C_2 + C_2x)\, e^x + C_2e^x = (C_1 + 2C_2 + C_2x)\, e^x.$$

Por consiguiente,

$$y'' - 2y' + y = (C_1 + 2C_2 + C_2x)\, e^x - 2\,(C_1 + C_2 + C_3x)\, e^x + \\ + (C_1 + C_2x)\, e^x \equiv 0,$$

lo que demuestra nuestra afirmación.

§ 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

El aspecto general de una ecuación diferencial de primer orden es el siguiente:

$$F(x,\ y,\ y') = 0.$$

En los casos más simples esta ecuación puede ser resuelta respecto a la derivada y':

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

La solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

donde C es una constante arbitraria. Geométricamente, la solución general (2) es una *familia de curvas integrales*, es decir, un conjunto de líneas que corresponden a distintos valores de la constante C (fig. 224). Las curvas integrales poseen la siguiente propiedad: en cada uno de sus puntos $M(x, y)$ la inclinación de la tangente satisface la condición

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y).$$

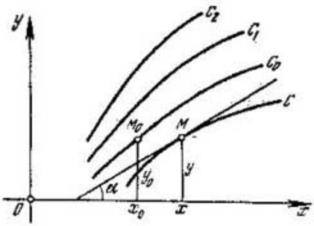

Fig. 224

Si se da un punto $M_0(x_0, y_0)$ por el cual debe pasar una curva integral, se elige por lo tanto en el caso más simple, entre una infinidad de curvas integrales, la curva que corresponde a una solución particular de nuestra ecuación diferencial.

Analíticamente, esta exigencia se reduce a una condición llamada *condición inicial*: $y = y_0$ para $x = x_0$. Si la solución general (2) es conocida, tenemos

$$y_0 = \varphi(x_0, C),$$

Partiendo de esta condición se puede en general determinar la constante arbitraria C y, por consiguiente, hallar la solución particular correspondiente. En esto consiste *el problema de Cauchy (problema inicial)*.

PROBLEMA DE CAUCHY. Hallar una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial (1) que satisfaga la condición inicial dada: $y_0 = \varphi(x_0)$, es decir, que adquiera en $x = x_0$ el valor dado $y = y_0$.

Geométricamente, los problemas de Cauchy se formulan así: *hallar una curva integral de la ecuación diferencial* (1) *que pase por un punto dado* $M_0(x_0, y_0)$.

Acotemos lo siguiente: las ecuaciones diferenciales constituyen un aparato matemático con ayuda del cual podemos estudiar los fenómenos que se desarrollan en la naturaleza. Si los datos del problema definen enteramente un fenómeno, éste debe desarrollarse de modo unívoco, es decir, la solución de la ecuación diferencial, que determina la ley de desarrollo del fenómeno, debe ser única. La solución general de la ecuación diferencial contiene constantes arbitrarias y, por consiguiente, no da respuesta determinada a la cuestión planteada. Por eso, para resolver problemas concretos las ecuaciones diferenciales deben ser completadas por condiciones suplementarias. En el caso más simple, éstas son las condiciones iniciales que nos conducen al problema de Cauchy.

En ciertos casos es provechoso escribir la ecuación diferencial de primer orden (1) en forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1'}$$

o así:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{3}$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones conocidas. La comodidad de la forma (3) consiste en que aquí las variables x e y son **equivalentes**, es decir, cada una de ellas puede ser considerada como función de la otra. Por **solución** de la ecuación (3) se entienden, en el caso general, las funciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dadas paramétricamente (t es un parámetro) y que satisfacen la ecuación (3).

No existe un método general de integración de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Se examinan generalmente sólo algunos tipos de estas ecuaciones, para cada una de las cuales se brinda un procedimiento de solución especial.

§ 3. Ecuaciones de primer grado con variables separables

DEFINICION. *Llámase ecuación diferencial de primer orden a la ecuación* ***con variables separables****, si ella es de forma*

$$X(x)\,Y(y)\,dx + X_1(x)\,Y_1(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

donde $X(x)$, $X_1(x)$, son funciones sólo de la variable x, e $Y(y)$, $Y_1(y)$, son sólo funciones de la variable y.

Para resolver la ecuación (1) dividamos sus dos miembros por el producto $Y(y)$, $X_1(x)$ suponiendo que ésto es distinto de cero. En este caso, después de simplificaciones evidentes, obtendremos

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = 0. \tag{2}$$

En la ecuación (2) la expresión que precede a dx es solamente función de x, y la expresión que precede a dy, es sólo función de y. En este caso, se dice que *las variables están separadas*. Integrando ambos miembros de la igualdad (2), tendremos

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = C. \tag{3}$$

Aquí se entiende por integrales ciertas primitivas correspondientes.

La relación (3) es la integral general expresada bajo una forma implícita de la ecuación (1).

En el caso general, al dividir por el producto $X_1(x)\,Y(y)$, arriesgamos perder aquellas soluciones de la ecuación (1) que anulan este producto.

Efectuando una sustitución directa es fácil convencerse de que la función

$$x = a, \tag{4}$$

donde a es la raíz de la ecuación $X_1(x) = 0$, es decir, $X_1(a) = 0$, es solución de la ecuación (1). También la función

$$y = b, \tag{5}$$

donde b es la raíz de la ecuación $Y(y) = 0$, es decir, $Y(b) = 0$ es también la solución de la ecuación (1).

Geométricamente, las soluciones (4) y (5), si ellas existen, son líneas rectas paralelas respectivamente a los ejes Oy y Ox.

EJEMPLO 1. Sea dada la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{6}$$

De aquí tenemos

$$x\,dy = y\,dx.$$

Supongamos que $y \neq 0$. Si dividimos ambos miembros de esta ecuación por xy, las variables serán separadas y obtendremos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando esta ecuación tendremos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln y = \ln x + \ln C.\,[1] \tag{7}$$

Aquí la constante arbitraria está tomada en forma logarítmica, lo que es legítimo porque todo número C_1 positivo o negativo puede ser representado como un logaritmo de otro número:

$$C_1 = \ln C,$$

donde

$$C = e^{C_1}.$$

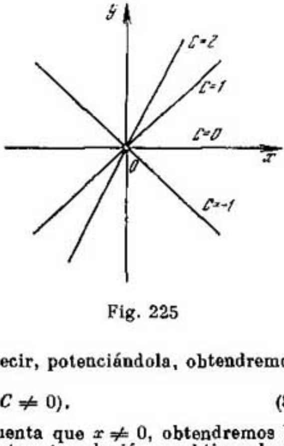

Fig. 225

Expresando y a partir de la igualdad (7) es decir, potenciándola, obtendremos definitivamente

$$y = Cx \quad (x \neq 0, \quad C \neq 0). \tag{8}$$

Tomando ahora $xy = 0$ y teniendo en cuenta que $x \neq 0$, obtendremos la solución $y = 0$ de la ecuación (6). Formalmente esta solución se obtiene de la fórmula (8) para $C = 0$.

Geométricamente, la solución general (8) representa la familia de semirrectas ($0 \leqslant |C| < +\infty$) que parte desde el origen de las coordenadas (fig. 225).

---

[1]) Hablando en rigor deberíamos escribir

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln \overline{C},$$

donde $\overline{C} > 0$. Pero nuestra «libertad» no se reflejará en el resultado final, si después de tomar la exponencial se admite considerar la constante arbitraria C como un número real. Esto se debe tener en cuenta en adelante.

EJEMPLO 2. Hallar la curva que pasa por el punto Q $(-1, 4)$ y posee la siguiente propiedad: en cada punto su subnormal tiene un mismo valor igual a 4.

Sean: $y = f(x)$, la curva buscada; MT, la tangente a esta curva en el punto M (x, y); MN, la normal (perpendicular a la tangente en el punto de tangencia (fig. 226). Llámase *subnormal* PN a la proyección del segmento de la normal MN sobre el eje Ox.

Puesto que $PM = y$ y $\angle NMP = \angle MT_x = \alpha$, entonces $PN = y \operatorname{tg} \alpha$. Pero, según la significación geométrica de la derivada, $\operatorname{tg} \alpha = y'$; por eso la expresión definitiva de la subnormal es

$$PN = yy'.$$

En virtud de las condiciones del problema

$$yy' = 4 \quad \text{ó} \quad y\frac{dy}{dx} = 4.$$

Separando las variables, obtendremos

$$y\,dy = 4\,dx.$$

Integrando los dos miembros tendremos

$$\int y\,dy = 4\int dx + C \quad \text{o sea} \quad \frac{y^2}{2} = 4x + C.$$

De aquí

$$y^2 = 8x + C_1. \tag{9}$$

Acabamos de obtener una familia de parábolas cuyos vértices se encuentran en el eje Ox.

Determinemos la constante arbitraria C_1 aprovechando el hecho de que nuestra parábola pasa por el punto dado Q $(-1, 4)$. Sustituyendo en la ecuación

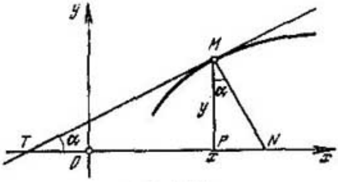

Fig. 226

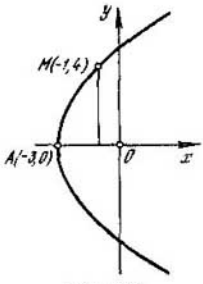

Fig. 227

(8) las coordenadas corrientes por las coordenadas del punto Q, hallamos $16 = -8 + C_1$; de donde $C_1 = 24$.

Por consiguiente, la ecuación de la parábola buscada es $y^2 = 8x + 24$, o sea

$$y^2 = 8(x + 3).$$

El vértice de parábola se encuentra en el punto A $(-3, 0)$ y su eje es el eje Ox (fig. 227).

EJEMPLO 3. La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y del aire. La temperatura del aire es igual a 20 °C. Se sabe que durante 20 minutos el cuerpo se enfría de 100° a 60°. Determinar la ley de variación de la temperatura del cuerpo en función del tiempo.

Si se designa el tiempo por t y la temperatura del cuerpo por U la velocidad de enfriamiento del cuerpo o, en otras palabras, la velocidad de variación de su temperatura será igual a la derivada $\frac{dU}{dt}$. De acuerdo con los datos del problema tenemos

$$\frac{dU}{dt}=k(U-20),$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad. Separando las variables obtendremos

$$\frac{dU}{U-20}=k\,dt.$$

Integrando los dos miembros, tendremos

$$\int\frac{dU}{U-20}=k\int dt+\ln C\,^{1)},$$

o sea,

$$\ln(U-20)=kt+\ln C.$$

De aquí, $U-20=Ce^{kt}$ y, por consiguiente,

$$U=20+Ce^{kt}. \tag{10}$$

Para determinar las constantes C y k utilizamos los datos del problema:

$$U=100° \quad \text{para} \quad t=0$$

y

$$U=60° \quad \text{para} \quad t=20.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (10), tendremos

$$\left.\begin{aligned}100&=20+C,\\ 60&=20+Ce^{20k}.\end{aligned}\right\}$$

De aquí, $C=80$, $e^{20k}=\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (10) obtendremos definitivamente

$$U=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Esta es la ley de variación de la temperatura U en función del tiempo en las condiciones indicadas.

En los ejemplos examinados 2 y 3 sobre la formulación de ecuaciones diferenciales tenemos un asunto directo con la derivada de la función buscada. Indi-

---

1) Puesto que en adelante elevaremos a una potencia, aquí es conveniente escribir $\ln C$ en lugar de C.

caremos un ejemplo donde es más cómodo razonar operando con las diferenciales de las magnitudes buscadas.

EJEMPLO 4. En un depósito que contiene 10 kg de sal por 100 l de mezcla se introducen cada minuto 30 litros de agua y se extraen 20 litros de mezcla (fig. 228, *a*). Determinar la cantidad de sal que queda en el depósito dentro de t minutos, suponiendo que el mezclado es instantáneo.

Sean: x, la cantidad de sal en el depósito al instante t, y $x + dx$, la cantidad de sal en el instante $t + dt$. Puesto que la mezcla se derrama del depósito, la

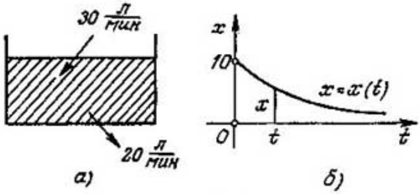

Fig. 228

cantidad x de sal disminuye con el tiempo y, por consiguiente, $dx < 0$ cuando $dt > 0$. El volumen de la mezcla que se encuentra en el depósito en el instante t será evidentemente igual a

$$v = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t.$$

Por eso, *la concentración de sal* (es decir, la cantidad de sal por unidad de volumen de mezcla) en el instante t, será igual a

$$\frac{x}{100+10t}. \tag{11}$$

La variación de la cantidad de sal $-dx$ durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño $[t, t + dt]$ se obtiene multiplicando por la concentración de sal (11) el volumen de mezcla $20\,dt$ que se derrama en el transcurso de este intervalo. De aquí obtenemos la ecuación diferencial

$$-dx = \frac{x}{100+10t} \cdot 20\,dt,$$

o sea,

$$dx = -\frac{2x}{10+t}\,dt. \tag{12}$$

Además, de los datos del problema se deduce la condición inicial

$$x\,|_{t=0} = 10. \tag{13}$$

Separando las variables en la ecuación (12) e integrando, obtenemos sucesivamente

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2}{10+t}\,dt$$

y

$$\int \frac{dx}{x} = -2 \int \frac{dt}{10+t},$$

es decir,

$$\ln x = -2 \ln (10 + t) + \ln C$$

y, por consiguiente,

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}.$$

Tomando $t = 0$ a partir de las condiciones iniciales (13), hallamos $10 = \frac{C}{100}$, es decir, $C = 1000$. Por eso, la ley de variación de la cantidad de sal x en kilogramos en el depósito, en función del tiempo t en minutos (fig. 228, b), se da por la fórmula

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}. \tag{14}$$

Notemos que conociendo la cantidad de sal restante en el depósito (ésta se calcula fácilmente midiendo el volumen del depósito y la concentración de sal de la mezcla en él) se puede determinar con ayuda de la fórmula (14) el tiempo que ha transcurrido después del inicio del proceso. Sobre este principio se basa el cálculo de la edad de los mares y océanos.

§ 4. Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

La noción de ecuación diferencial homogénea de primer orden está relacionada con las *funciones homogéneas.*

Un polinomio

$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

se llama *homogéneo* de grado n, si todos sus términos son del mismo grado n, es decir, para cada término $a_{ij}x^iy^j$ tenemos

$$i + j = n.$$

Por ejemplo,

$$P(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2 \tag{1}$$

es un polinomio homogéneo de grado 2. Notemos que si los argumentos x e y de un polinomio homogéneo de grado n se reemplazan por las magnitudes kx y ky, proporcionales, como resultado se obtendrá la multiplicación de este polinomio por la potencia n-ésima del coeficiente de proporcionalidad k. Por ejemplo, para el polinomio (1) tenemos

$$P(kx, ky) = 2(kx)^2 - 3(kx)(ky) - 5(ky)^2 =$$
$$= k^2(2x^2 - 3xy - 5y^2) = k^2 P(x, y).$$

Esta última propiedad es la base de la definición general de una función homogénea.

DEFINICIÓN 1. *Una función $P(x, y)$ se llama* ***homogénea de grado*** n, *si para todo número k tiene lugar la identidad*

$$P(kx, ky) = k^n P(x, y).$$

Examinemos ahora la ecuación diferencial

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2}$$

DEFINICIÓN 2. *Una ecuación diferencial de primer orden (2) se llama homogénea, si los coeficientes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ de las diferenciales de las variables x e y, son funciones homogéneas del mismo grado.*

Se puede demostrar que con ayuda de la sustitución

$$u = \frac{y}{x} \qquad \text{o} \quad v = \left(\frac{x}{y}\right), \tag{3}$$

donde u es una función incógnita, la ecuación diferencial homogénea (2) se reduce a una ecuación con variables separables.

EJEMPLO. Resolver la ecuación diferencial

$$(x + y)\,dx + x\,dy = 0. \tag{4}$$

Aquí $P = x + y$ y $Q = x$, son funciones homogéneas de primer grado, por eso, la ecuación (4) es homogénea. Según la indicación, tomamos

$$\frac{y}{x} = u \tag{5}$$

o

$$y = xu,$$

donde u es una función incógnita. De aquí

$$dy = x\,du + u\,dx.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4) tendremos

$$(x + xu)\,dx + x(x\,du + u\,dx) = 0$$

o

$$x\,du + (2u + 1)\,dx = 0.$$

Separando las variables obtenemos

$$\frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Para comodidad de los cálculos multiplicamos los dos miembros de la última igualdad por 2, e integrándolos término a término tendremos

$$\int \frac{2du}{2u+1} = -2\int \frac{dx}{x};$$

de dondo hallamos

$$\ln(2u + 1) = -2\ln x + \ln C \quad \text{y} \quad 2u + 1 = \frac{C}{x^2}.$$

En virtud de la fórmula (5) tenemos $\frac{2u}{x}+1=\frac{C}{x^2}$ y, por consiguiente,

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}, \tag{6}$$

donde $C_1=C/2$ es una constante arbitraria.

En el transcurso de la resolución de esta ecuación nos hemos visto obligados a efectuar la división por las funciones x y $2u+1$. Anulándolas obtenemos las soluciones posibles

1) $x=0$ y 2) $2u+1=0$; de donde $y=-\frac{x}{2}$.

Es fácil de verificar que las dos funciones 1) y 2) satisfacen la ecuación dada (4); la última de ellas se obtiene a partir de la solución general (6) para $C_1=0$.

Sea ahora una ecuación diferencial homogénea de forma

$$y'=f(x, y) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{7}$$

Escribiendo la última ecuación en forma de diferenciales, obtendremos

$$dy=f(x, y)\,dx.$$

El coeficiente de dy es igual a 1, es decir, una función homogénea de grado cero; esto significa que $f(x, y)$ debe ser también una función homogénea de grado cero.

De este modo *la ecuación diferencial* (7) *es homogénea si, y sólo si, su segundo miembro* $f(x, y)$ *es una función homogénea de grado cero* [1]).

§ 5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma (véase el § 1)

$$a(x)\,y'+b(x)\,y+c(x)=0, \tag{1}$$

donde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ son funciones dadas. Si $a(x)\neq 0$, la ecuación (1) puede ser escrita en la **forma reducida**

$$y'+p(x)\,y=f(x), \tag{2}$$

donde $p(x)=b(x)/a(x)$ y $f(x)=-c(x)/a(x)$ ($f(x)$ es *el segundo miembro de la ecuación*). Supondremos que el coeficiente $p(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ de la ecuación (2) son continuos en un cierto intervalo (a, b).

Para resolver la ecuación (2) representamos la función buscada y como el producto de dos factores:

$$y=uv, \tag{3}$$

[1]) Es decir, el segundo miembro de esta ecuación no cambia cuando se sustituyen x por kx e y por ky, donde k es un coeficiente de proporcionalidad arbitrario.

donde u es una solución no nula de la ecuación homogénea correspondiente

$$u' + p(x) u = 0 \tag{4}$$

y v es una nueva función incógnita. Como

$$y' = vu' + uv', \tag{5}$$

introduciendo las expresiones (3) y (5) en la ecuación diferencial (2), obtendremos

$$v[u' + p(x) u] + uv' = f(x) \tag{6}$$

o, en virtud de la (4), tenemos

$$uv' = f(x). \tag{7}$$

Notemos que de hecho la función u se elige de tal modo que el **coeficiente de v en la ecuación** (6) **sea nulo.**

A partir de las ecuaciones (4) y (7) se hallan sucesivamente las funciones u y v eligiendo para u un valor concreto cualquiera, distinto de cero. Introduciendo las expresiones obtenidas para u y v en la fórmula (3), hallamos la función buscada y.

OBSERVACIÓN. En práctica no hay necesidad de reducir la ecuación lineal (1) a la forma (2); se puede aplicar directamente la sustitución (3).

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$xy' + 2y = x^2. \tag{8}$$

La ecuación (8) es evidentemente lineal. Tomamos

$$y = uv, \quad y' = vu' + uv'. \tag{9}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (8), obtenemos

$$v(xu' + 2u) + xuv' = x^2.$$

Elijamos la función u de modo que

$$xu' + 2u = 0; \tag{10}$$

en este caso

$$xuv' = x^2. \tag{11}$$

De la (10) obtenemos sucesivamente

$$x\frac{du}{dx} = -2u, \quad \frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x}.$$

Integrando hallamos

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dx}{x}, \text{ es decir, } \ln u = -2\ln x + \ln C_0,$$

y, por consiguiente, eligiendo $C_0 = 1$, obtendremos

$$u = \frac{1}{x^2}. \tag{12}$$

De donde mediante la (11) tenemos $x \cdot \frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} = x^2$, $\frac{dv}{dx} = x^3$ y, de este modo,

$$v = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C, \tag{13}$$

donde C es una constante arbitraria.

Así, en virtud de las (12) y (13), hallamos definitivamente

$$y = uv = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C\right), \quad \text{es decir,} \quad y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

EJEMPLO 2. Hallar la solución de la ecuación

$$(x + y)\,y' = 1, \tag{14}$$

que satisface la condición inicial: $y = 0$ para $x = -1$.

Por su aspecto, la ecuación (14) no es lineal. Sin embargo, si x se considera función de y, entonces teniendo en cuenta que $y' = \frac{1}{x'}$ obtendremos la ecuación lineal

$$x' = x + y. \tag{15}$$

Tomamos, como siempre,

$$x = uv, \quad x' = \frac{dx}{dy} = v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (15) tendremos

$$v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy} = uv + y. \tag{16}$$

De aquí, teniendo en cuenta que según la elección de u

$$\frac{du}{dy} = u, \tag{17}$$

obtenemos

$$u\frac{dv}{dy} = y. \tag{18}$$

De la (17) hallamos la solución particular

$$u = e^y. \tag{19}$$

Por eso, de la (18) se obtiene

$$e^y\frac{dv}{dy} = y, \quad dv = ye^{-y}\,dy$$

y, en consecuencia,

$$v = \int ye^{-y}\,dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C \tag{20}$$

(hemos utilizando aquí la integración por partes). A partir de las (19) y (20) hallamos **la solución general**

$$x = uv = -y - 1 + Ce^y. \tag{21}$$

Tomando aquí $y = 0$ para $x = -1$, obtendremos $-1 = -1 + C$, es decir, $C = 0$. De este modo,

$$x = -y - 1, \quad \text{es decir,} \quad y = -(x + 1)$$

es la **solución particular buscada**.

EJEMPLO 3. La intensidad de la corriente i en el circuito eléctrico de resistencia óhmica R y de coeficiente de autoinducción L, satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E, \tag{22}$$

donde E es la fuerza electromotriz (fig. 229, a). Se pide hallar la intensidad de la corriente i al cabo de t s después de la conexión, si E varía según la ley sinusoidal

$$E=E_0\cos\omega t \tag{23}$$

e $i=0$ cuando $t=0$.

De la (22) tenemos

$$\frac{di}{dt}+\alpha i=\frac{E_0}{L}\cos\omega t, \tag{24}$$

donde, para abreviar, se considera que $\alpha=R/L$.

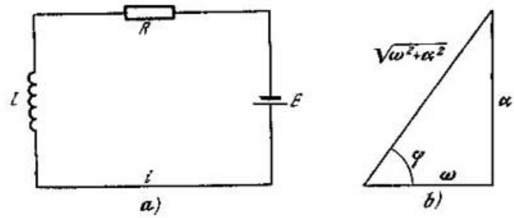

Fig. 229

Tomando $i=uv$, aplicando el procedimiento habitual obtendremos

$$\frac{du}{dt}+\alpha u=0,\quad u\,\frac{dv}{dt}=\frac{E_0}{L}\cos\omega t. \tag{25}$$

De aquí,

$$\frac{du}{u}=-\alpha\,dt,\qquad \ln u=-\alpha t$$

(¡omitimos la constante de integración!) y

$$u=e^{-\alpha t}. \tag{26}$$

De la (25) se deduce

$$e^{-\alpha t}\frac{dv}{\partial t}=\frac{E_0}{L}\cos\omega t,\qquad dv=\frac{E_0}{L}\,e^{\alpha t}\cos\omega t\,dt$$

y

$$v=\frac{E_0}{L}(I+C), \tag{27}$$

donde

$$I=\int e^{\alpha t}\cos\omega t\,dt \tag{28}$$

(una de las primitivas).

Integrando por partes dos veces, hallamos

$$I=\int e^{\alpha t}\,d\left(\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\right)=e^{\alpha t}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}-\int\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\cdot\alpha e^{\alpha t}\,dt=$$

$$=e^{\alpha t}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}+\frac{\alpha}{\omega}\int e^{\alpha t}\cdot d\left(\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)=$$

$$=e^{\alpha t}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}+\frac{\alpha}{\omega}\left[e^{\alpha t}\,\frac{\cos\omega t}{\omega}-\int\frac{\cos\omega t}{\omega}\cdot\alpha e^{\alpha t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\omega}\,e^{\alpha t}\operatorname{sen}\omega t+\frac{\alpha}{\omega^2}\,e^{\alpha t}\cos\omega t-\frac{\alpha^2}{\omega^2}\,I;$$

de donde obtenemos

$$I=\frac{\frac{1}{\omega^2}\,e^{\alpha t}\,(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t)}{1+\frac{\alpha^2}{\omega^2}}=\frac{e^{\alpha t}\,(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t)}{\omega^2+\alpha^2}. \qquad (29)$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (27), hallamos

$$v=\frac{E_0}{L}\left(e^{\alpha t}\cdot\frac{\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2}+C\right), \qquad (30)$$

donde C es una constante arbitraria.

Multiplicando las funciones u y v ((26) y (30)), obtendremos la ley de variación de la intensidad de la corriente

$$i=\frac{E_0}{L}\left(\frac{\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2}+Ce^{-\alpha t}\right). \qquad (31)$$

Para $t=0$ hallamos, a partir de la condición inicial,

$$0=\frac{E_0}{L}\left(\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}+C\right),\quad \text{es decir,}\quad C=-\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Por consiguiente,

$$i=\frac{E_0}{L\,(\omega^2+\alpha^2)}\,(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t-\alpha e^{-\alpha t}). \qquad (32)$$

Si t es suficientemente grande, la magnitud $e^{-\alpha t}$ es pequeña ($\alpha>0$) y en la fórmula (32) se puede menospreciarla. En este caso, tendremos,

$$i\approx\frac{E_0}{L\,(\omega^2+\alpha^2)}\,(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t). \qquad (33)$$

Tomando (fig. 229, b) $\omega=\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\cos\varphi$, $\alpha=\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\operatorname{sen}\varphi$, mediante la fórmula (33) obtendremos definitivamente

$$i\approx\frac{E_0}{L\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)=\frac{E_0}{\sqrt{(L\omega)^2+R^2}}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$$

donde $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\omega}$ es la fase inicial de la corriente.

§ 6. Noción sobre el método de Euler

En los párrafos precedentes examinamos los tipos más simples de ecuaciones diferenciales de primer orden que admiten soluciones en cuadraturas [1] (o como dicen a veces: que se integran en formas finales). Sin embargo, no hay un método general para hallar la solución exacta de una ecuación diferencial del primer orden arbitraria. Por eso adquieren gran importancia los **métodos aproximados de resolución** de ecuaciones diferenciales. Examinaremos el más simple de ellos, llamado *método de Euler*.

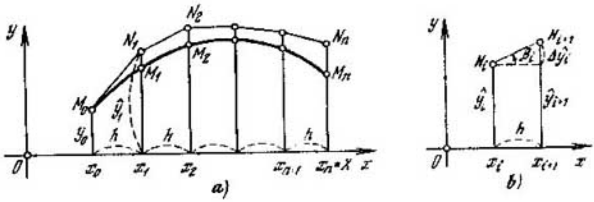

Fig. 230

Supongamos que en un segmento dado $x_0 \leqslant x \leqslant X$ hace falta hallar la solución de una ecuación diferencial del primer orden

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con el segundo miembro continuo $f(x, y)$ que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Geométricamente, esto significa que para la ecuación diferencial (1) hace falta construir una curva integral $y = y(x)$ que pase por el punto $M_0(x_0, y_0)$ (fig. 230, *a*). Debido al sentido geométrico de la derivada obtenemos que en cada punto $M(x, y)$ de la curva integral, **su pendiente** (es decir, el coeficiente angular de la tangente) satisface la condición

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y) \tag{3}$$

Puesto que el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es supuestamente continuo, se puede considerar que en un pequeño trozo de la curva integral su pendiente **es constante**, es decir, que esta curva puede ser reemplazada aproximadamente por una línea quebrada.

[1]) Es decir, las soluciones expresadas por medio de integrales indefinidas.

En práctica este procedimiento se efectúa así: el segmento $[x_0, X]$ se divide en partes suficientemente pequeñas: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, X]$ cuyo número es igual a n, y sean

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

las longitudes de los segmentos de la subdivisión correspondientes. Para simplificar supongamos que estos segmentos son iguales entre sí (aunque esto no es obligatorio). En este caso

$$h_i = \frac{X - x_0}{n} = h = \text{const}. \tag{4}$$

La magnitud h se llama *paso de subdivisión*.

Reemplacemos la curva $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ con vértices $M_i(x_i, y_i)$, por la línea quebrada $N_0N_1N_2 \ldots N_n$ con vértices $N_i(x_i, \hat{y}_i)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\hat{y}_0 = y_0$), donde $N_0 = M_0$, y de pendientes sucesivas

$$\operatorname{tg} \beta_i = f(x_i, \hat{y}_i) = \hat{y}'_i \tag{5}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \ \hat{y}'_0 = y'_0 = f(x_0, y_0))$$

(*polígono de Euler*) (fig. 230, *a*). La fig. 230, *b* nos permite escribir las fórmulas de cálculo

$$\left.\begin{array}{l} x_i = x_0 + ih, \\ \Delta\hat{y}_i = h \operatorname{tg} \beta_i = hf(x_i, \hat{y}_i), \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i \end{array}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \ \hat{y}_0 = y_0). \tag{6}$$

Notemos que, según el punto de vista mecánico, reemplazamos un proceso continuo descrito por la ecuación diferencial (1), por un **proceso de impulsos** que se desarrolla a velocidad constante en intervalos elementales $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) y cuya velocidad varía a saltos al pasar de un intervalo a otro.

Las desventajas de este método son: 1) poca precisión cuando el paso h es grande, muchos cálculos cuando el paso es pequeño; 2) acumulación sistemática de errores.

El método de Euler sirve de base para otros métodos más perfectos de solución aproximada de ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO. Aplicando el método de Euler se pide hallar sobre el segmento $[0; 0{,}5]$ la solución de la ecuación diferencial

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1. \tag{7}$$

Elijamos el paso $h = 0{,}1$. Los resultados del cálculo (con una exactitud de hasta 10^{-3}) se muestran en la tabla:

x	$\hat{y}$	$\hat{y}' = x + \hat{y}$	$\Delta\hat{y} = \hat{y}'h$
0	1,000	1,000	0,100
0,1	1,100	1,200	0,120
0,2	1,220	1,420	0,142
0,3	1,362	1,662	0,166
0,4	1,528	1,928	0,193
0,5	1,721		

De este modo, $\hat{y}\ (0,5) = 1{,}721$. No es difícil hallar la solución exacta (¡la ecuación (7) es lineal!): $y = 2e^x - (x + 1)$; de donde $y\ (0{,}5) = 2\sqrt{e} - 1{,}5 \approx$ $\approx 2 \cdot 1{,}645 - 1{,}500 = 1{,}790$.

§ 7. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden resuelta respecto a la derivada de orden superior se presenta en la forma general siguiente:

$$y'' = f\ (x,\ y,\ y'). \qquad (1)$$

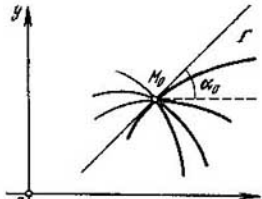

Fig. 231

La solución general

$$y = \varphi\ (x,\ C_1,\ C_2) \qquad (2)$$

de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias independientes C_1 y C_2. Geométricamente, la solución general (2) es una infinidad de curvas integrales que dependen de dos parámetros independientes C_1 y C_2. Por cada punto $M_0\ (x_0,\ y_0)$ del plano Oxy pasa en general **un haz de curvas integrales** (fig. 231). Por eso, para extraer de nuestra familia de curvas integrales una curva integral determinada Γ no es suficiente con indicar el punto $M_0\ (x_0, y_0)$ por el cual debe pasar esta última curva, sino que es necesario indicar también la dirección en la cual la curva Γ pasa por el punto M_0, es decir, dar la tangente del ángulo α_0 formado por la tangente a esta curva en el punto M_0 y la dirección positiva del eje Ox. Analíticamente, escribiendo

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = y_0'$$

llegamos a *las condiciones iniciales*: $y = y_0$, $y' = y_0'$ para x
De acuerdo con la (2) tenemos

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi\ (x_0,\ C_1,\ C_2), \\ y_0' &= \varphi_x'\ (x_0,\ C_1,\ C_2). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

El sistema (3) permite, en general, determinar las constantes C_1 y C_2 y, de este modo, hallar una **solución particular**

$$y = \varphi(x)$$

que satisfaga nuestra ecuación (1) y las condiciones iniciales dadas

$$y\,|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{e} \quad y'\,|_{x=x_0} = y'_0 \tag{4}$$

(*problema de Cauchy*). Notemos que habitualmente al resolver problemas de física concretos, además de las ecuaciones diferenciales existen unas u otras condiciones iniciales (4) porque, por razones bien comprensibles, la solución de semejante problema debe ser **unívoca.**

Con ayuda de una ecuación diferencial de segundo orden se escribe *la ecuación fundamental de la dinámica.*

Sea un punto material de masa m que se desplaza a lo largo del eje Ox bajo la acción de una fuerza variable F. Si j es la aceleración de este punto, entonces según la ley de Newton

$$mj = F. \tag{5}$$

En el caso más general la fuerza F depende del tiempo t, de la coordenada x (que caracteriza la posición del punto material sobre el eje Ox) y de la velocidad $\frac{dx}{dt}$ de este punto. Por consiguiente,

$$F = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

Por otra parte, como se sabe (§ 14 del cap. X), en el caso de un movimiento rectilíneo la aceleración j es igual a la derivada segunda del camino respecto al tiempo, es decir, $j = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Sustituyendo las magnitudes F y j en la ecuación (5) obtendremos la *ecuación diferencial de movimiento del punto*

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

Para describir enteramente el movimiento de un punto hace falta dar adicionalmente la posición inicial del mismo $x\,|_{t=t_0} = x_0$ y su velocidad inicial $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = v_0$ (*condiciones iniciales*).

§ 8. Tipos de ecuaciones diferenciales integrables de segundo orden

En el caso general, una ecuación diferencial de segundo orden no puede ser resuelta en forma finita. Examinaremos aquí algunos casos simples cuando la ecuación de segundo orden se resuelve con ayuda de **cuadraturas**, es decir, utilizando operaciones de integración indefinida.

TIPO I. Sea

$$y'' = f(x) \tag{1}$$

Integrando tendremos

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Integrando una vez más obtendremos definitivamente

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y las integrales indefinidas se interpretan como las primitivas de las funciones correspondientes.

TIPO II. Sea

$$y'' = f(y). \tag{2}$$

Supongamos que

$$y' = p.$$

Considerando p como función de y, tendremos

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}.$$

Por consiguiente, la ecuación (2) tomará la forma

$$p\,\frac{dp}{dy} = f(y).$$

Separando las variables obtendremos

$$p\,dp = f(y)\,dy.$$

Integrando la última ecuación hallamos

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y)\,dy + \frac{C_1}{2}$$

o sea,

$$p = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}.$$

Puesto que $p = \frac{dy}{dx}$, la ecuación precedente puede ser escrita así

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}.$$

De aquí, separando una vez más las variables e integrando tendremos definitivamente

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} = \pm(x + C_2).$$

No hace falta recordar esta fórmula complicada de la solución general de la ecuación del tipo II, sino que es necesario asimilar el procedimiento de integración.

TIPO III. Sea

$$y'' = f(y'). \tag{3}$$

Supongamos que

$$y' = p.$$

Entonces

$$y'' = \frac{dp}{dx}.$$

La ecuación (3) se escribirá así

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

Separando las variables e integrando tendremos, sucesivamente,

$$\frac{dp}{f(p)} = dx \quad \text{y} \quad \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1.$$

Después de determinar a partir de esta última ecuación la magnitud $p = \frac{dy}{dx}$ se puede, integrando una vez más, hallar y.

EJEMPLO 1. Determinar la ley del movimiento de un punto material de masa m lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0.

Tomemos por eje Ox la recta vertical que es la trayectoria del punto en movimiento y su dirección positiva la establecemos hacia arriba. Como origen de las coordenadas O tomemos la posición inicial de nuestro punto material.

Si se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que se aplica a nuestro punto es la fuerza de la gravedad numéricamente igual a mg y dirigida verticalmente hacia abajo. Según la ley de Newton, tenemos la siguiente ecuación diferencial de movimiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

o sea,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g. \tag{4}$$

Además, se deben satisfacer las condiciones iniciales:

$$x\,|_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0. \tag{5}$$

Efectuando la sustitución

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{y} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

obtendremos, mediante la ecuación (4),

$$\frac{dv}{dt} = -g, \quad \text{o} \quad dv = -g\,dt.$$

Integrando, tendremos

$$v = C_1 - gt.$$

Tomando ahora $t = 0$ y utilizando la segunda condición (5), hallamos $C_1 = v_0$. De aquí,

$$v = v_0 - gt \tag{6}$$

o sea,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt.$$

Integrando una vez más, tendremos

$$x = C_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Para determinar la constante C_2 notemos que, en virtud de la primera condición (5), $x = 0$ para $t = 0$. Sustituyendo este valor en nuestra última ecuación obtendremos $C_2 = 0$. Por consiguiente

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{7}$$

Esta es la ley de movimiento de un punto material lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 (sin tener en cuenta la resistencia del aire).

En particular, en el punto más elevado debe ser $v = 0$. De donde, a partir de la ecuación (6), determinamos el tiempo de elevación $T = \frac{v_0}{g}$ y de la ecuación (7), la altura de elevación correspondiente $H = \frac{v_0^2}{2g}$.

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación

$$y'' = y^{-3}.$$

Tomamos aquí $y' = p$, de donde

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtendremos

$$p\,\frac{dp}{dy} = y^{-3}.$$

Separando las variables e integrando, tendremos, sucesivamente

$$p\,dp = y^{-3}\,dy \quad \text{y} \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2}.$$

De aquí,

$$p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}} \quad (C_1 > 0)$$

y, por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}.$$

Esta es una ecuación de primer orden. Separando las variables, tenemos

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\,dx.$$

Multiplicando ambos miembros por C_1, obtendremos

$$\frac{C_1 y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\,C_1\,dx.$$

Después de integrar, tendremos

$$\int \frac{C_1 y\, dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm (C_1 x + C_2).$$

Calculemos la integral del primer miembro de la ecuación. Notando que

$$C_1 y\, dy = \frac{1}{2}\, d\,(C_1 y^2 - 1)$$

tendremos, sucesivamente,

$$\int \frac{C_1 y\, dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\,(C_1 y^2 - 1)}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int (C_1 y^2 - 1)^{-1/2}\, d\,(C_1 y^2 - 1) = \frac{\frac{1}{2}(C_1 y^2 - 1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{C_1 y^2 - 1}.$$

De este modo, hallamos $\sqrt{C_1 y^2 - 1} = \pm (C_1 x + C_2)$ o, finalmente,

$$C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

EJEMPLO 3. Hallar la solución de la ecuación $2y'y'' = 1$, que satisface las condiciones iniciales: $y = 0$, $y' = 1$ para $x = 1$.

Tomando

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx}, \text{ tenemos, } 2p\,\frac{dp}{dx} = 1.$$

Separando aquí las variables obtendremos

$$2p\, dp = dx,$$

o, después de la integración,

$$p^2 = x + C_1.$$

Para determinar la constante C_1 utilizamos las condiciones iniciales $p = y' = 1$ para $x = 1$. Tenemos

$$1 = 1 + C_1;$$

de donde $C_1 = 0$ y, por consiguiente,

$$p^2 = x.$$

Extrayendo la raíz obtendremos

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{x},$$

delante de la raíz está escrito el signo «+», porque para $x = 1$ se debe tener $p = 1$.

Separando las variables e integrando, hallamos

$$y = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_2.$$

Para determinar la constante C_2 tomamos $x = 1$ e $y = 0$; en este caso, $0 = \frac{2}{3} + C_2$, es decir, $C_2 = -\frac{2}{3}$. De este modo, la solución buscada es

$$y = \frac{2}{3}(x^{3/2} - 1).$$

§ 9. Casos de reducción del orden

Indicaremos dos casos cuando una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

se reduce a una ecuación diferencial de primer orden.

CASO 1. Sea una ecuación diferencial (1) cuyo segundo miembro **no contiene** x, es decir, la ecuación de forma

$$y'' = f(y, y'). \tag{2}$$

Tomando aquí

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

obtendremos una ecuación diferencial de primer orden

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

donde y desempeña el papel de la variable independiente.

CASO 2. Sea una ecuación diferencial (1) cuyo segundo miembro **no contiene** y, es decir, la ecuación es de forma

$$y'' = f(x, y'). \tag{3}$$

Tomando

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

obtendremos la ecuación de primer orden

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

donde p es la función incógnita.

Notemos que los tipos I y III examinados más arriba (§ 8) son respectivamente casos particulares de las ecuaciones (2) y (3).

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$y'' = \frac{y'^2}{y} \tag{4}$$

Según el caso 1, tomamos $y' = p$ e $y'' = p\,\frac{dp}{dy}$. Entonces, la ecuación (4) adopta la forma

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}.$$

De aquí 1) $p = 0$, es decir, $y = C$; o 2) $\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}$ es decir, $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ y

$$\ln p = \ln y + \ln C_1.$$

Elevando a potencia, tendremos

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1$$

y, por consiguiente,

$$\frac{dy}{y} = C_1\,dx.$$

Después de la integración, obtenemos

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2$$

y, en consecuencia,

$$y = C_2 e^{C_1 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 2. Hallar la solución de la ecuación

$$xy'' = 2x - y' \tag{5}$$

que satisface las condiciones iniciales: $y = \frac{1}{2}$ e $y' = 1$ para $x = 1$.

En la ecuación (5) tomamos $y' = p$ e $y'' = \frac{dp}{dx}$. En este caso,

$$x\frac{dp}{dx} = 2x - p,$$

o sea,

$$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{p}{x}. \tag{6}$$

La ecuación obtenida es homogénea [1]), por eso tomamos $\frac{p}{x} = u$ y, por consiguiente,

$$p = xu \quad \text{y} \quad \frac{dp}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

Sustituyendo en la ecuación (6), tendremos

$$x\frac{du}{dx} + u = 2 - u;$$

de donde

$$\frac{du}{dx} = \frac{2-2u}{x} \quad \text{ó} \quad \frac{du}{u-1} = -\frac{2dx}{x}.$$

Integrando, obtendremos,

$$\ln(u-1) = -2\ln x + \ln C_1$$

y, por consiguiente,

$$u - 1 = \frac{C_1}{x^2}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{p}{x} = 1 + \frac{C_1}{x^2} \quad \text{y} \quad p = x + \frac{C_1}{x}.$$

Para determinar la constante C_1 utilizamos las condiciones iniciales: $p = y' = 1$ para $x = 1$. Obtenemos $1 = 1 + C_1$, es decir, $C_1 = 0$, de este modo

$$p = \frac{dy}{dx} = x.$$

De aqui obtenemos

$$dy = x\,dx$$

y

$$y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2. \tag{7}$$

[1]) La ecuación (6) puede ser considerada también como una ecuación lineal.

Determinamos la constante C_2 a partir de las condiciones iniciales. Considerando que $x = 1$ e $y = \frac{1}{2}$ en la fórmula (7), obtenemos $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_2$, es decir, $C_2 = 0$. Por consiguiente, la solución particular buscada es

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

§ 10. Noción sobre la integración de ecuaciones diferenciales con ayuda de series de potencias

Para simplificar, expondremos este método en el ejemplo de una ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

donde la función $f(x, y)$ es una función **infinitamente derivable**, es decir, tiene derivadas de todos los órdenes.

Buscaremos la solución del problema (1) en forma de una serie de Taylor (§ 14 del cap. XXI)

$$y = y_0 + y'_0 (x - x_0) + \frac{y''_0}{2!} (x - x_0)^2 + \ldots, \tag{2}$$

donde, para abreviar, se toma

$$y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

El término independiente y_0 de la serie (2) se determina a partir de las condiciones iniciales (1). El coeficiente y'_0 se halla mediante la ecuación diferencial (1)

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Para hallar el coeficiente y''_0 hace falta derivar la ecuación (1) respecto a x, suponiendo que y es función de x. Tenemos

$$y'' = \frac{d}{dx} [f(x, y)],$$

de donde,

$$y''_0 = \left\{ \frac{d}{dx} [f(x, y)] \right\} \Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}},$$

etc. El problema de la convergencia de la serie (2) lo dejamos sin examinar.

Este método es también aplicable con cambios evidentes a las ecuaciones de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{3}$$

EJEMPLO. Hallar con ayuda de series de potencias la solución de la ecuación diferencial.

$$y' = xy + y^2, \quad y(0) = 1 \tag{4}$$

Tomamos

$$y = y_0 + y_0' x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \frac{y_0'''}{3!} x^3 + \ldots \tag{5}$$

De las condiciones (4), tenemos

$$y_0 = 1, \quad y_0' = 0 \cdot 1 + 1^2 = 1.$$

Derivando el segundo miembro de la ecuación (4) como una función compuesta obtendremos

$$y'' = (y + xy') + 2yy'; \tag{6}$$

de donde $y_0'' = (1 + 0) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

Luego, derivando la ecuación (6), tendremos

$$y''' = (2y' + xy'') + 2(y'^2 + yy'')$$

y, por consiguiente,

$$y_0''' = (2 + 0) + 2 \cdot (1 + 1 \cdot 3) = 10, \quad \text{etc.}$$

De este modo, a partir de la (5), nos queda

$$y = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{3} x^3 + \ldots \tag{7}$$

Los resultados de estos cálculos pueden ser agrupados en la tabla siguiente:

x	0	0,1	0,2	0,3	...
y	1	1,117	1,273	1,480	...

§ 11. Propiedades generales de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

Examinemos una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0, \tag{1}$$

cuyos coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son continuos.

Sean

$$y_1 = y_1(x) \quad \text{e} \quad y_2 = y_2(x)$$

soluciones particulares de la ecuación (1) [1].

DEFINICIÓN. *Dos soluciones y_1 e y_2 se llaman* ***linealmente dependientes*** *si se pueden elegir números constantes a_1 y a_2 simultáneamente distintos de cero, tales que una combinación lineal de estas funciones sea*

[1] La palabra «particulares» se entiende aquí en el sentido de que estas soluciones no contienen constantes arbitrarias.

idénticamente igual a cero, es decir, si

$$a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0. \tag{2}$$

En caso contrario, cuando es imposible elegir tales números, se dice que las soluciones y_1 e y_2 son *linealmente independientes.* En otras palabras, si las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes y tiene lugar la identidad (2), entonces $a_1 = a_2 = 0$.

Es evidente que *las soluciones y_1 e y_2 serán linealmente dependientes si y sólo si, son mutuamente proporcionales*, es decir, si

$$y_2 = ay_1 \tag{3}$$

(o viceversa), donde a es un coeficiente de proporcionalidad constante.

Efectivamente, si la condición (3) se cumple, se puede escribir

$$a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0,$$

donde $a_1 = a$ y $a_2 = -1 \neq 0$ y, por consiguiente, estas soluciones son linealmente dependientes.

Por el contrario, si las soluciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes tiene lugar la identidad

$$a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0,$$

donde por lo menos una de las constantes a_1 ó a_2 es distinta de cero. Suponiendo, por ejemplo, que $a_2 \neq 0$ y $a = -a_1/a_2$ obtendremos $y_2 = ay_1$.

La noción de dependencia lineal es también aplicable a todo par de funciones. Se definen análogamente la dependencia y la independencia lineal de varias funciones.

EJEMPLO. Las funciones e^{k_1x} y e^{k_2x} son **linealmente independientes** para $k_2 \neq k_1$.

En efecto admitamos que existe la relación

$$a_1e^{k_1x} + a_2e^{k_2x} \equiv 0,$$

donde por lo menos uno de los coeficientes a_1 ó a_2, por ejemplo a_2, es distinto de cero. En este caso obtendremos la identidad

$$e^{(k_2-k_1)x} \equiv -\frac{a_1}{a_2},$$

lo que es imposible porque el primer miembro de esta igualdad varía con la variación de x, mientras que su segundo miembro es constante.

Conociendo dos soluciones particulares linealmente independientes y_1 e y_2 de la ecuación (1) es fácil obtener la solución general de esta ecuación. Se puede enunciar el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si y_1 e y_2 son soluciones particulares linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo* *orden*, (1), *entonces la solución general de esta ecuación será una combinación lineal de estas soluciones particulares, es decir, la solución general de la ecuación* (1) *es de la forma*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{4}$$

donde C_1 *y* C_2 *son constantes arbitrarias* ($-\infty < C_1 < +\infty$, $-\infty < C_2 < +\infty$).

DEMOSTRACION En efecto, puesto que y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación (1), tenemos

$$y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1 \equiv 0 \tag{5}$$

y

$$y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 \equiv 0. \tag{6}$$

Sustituyendo la expresión (4) en el primer miembro de la ecuación (1) obtenemos, en virtud de las identidades (5) y (6)

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2) = \\ = C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(x)\,C_1y_1' + p(x)\,C_2y_2' + q(x)\,C_1y_1 + \\ + q(x)\,C_2y_2 = C_1\,[y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1] + \\ + C_2\,[y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2] = \\ = C_1\cdot 0 + C_2\cdot 0 \equiv 0.\end{aligned}$$

De donde se deduce que la función

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{7}$$

será solución de la ecuación (1), **cualquiera que sea** la elección de las constantes C_1 y C_2.

Si las soluciones y_1 e y_2 son linealmente independientes, la igualdad-(7) será la **solución general** de la ecuación diferencial (1) porque ella contiene dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 las cuales no pueden, en este caso, ser reducidas a una sola, es decir, éstas son independientes.

Se puede demostrar que la fórmula (7) da **todas las soluciones** de la ecuación diferencial lineal correspondiente (1).

OBSERVACIÓN Si las soluciones particulares y_1 e y_2 son linealmente dependientes, la solución (4) no será general. En efecto, supongamos que y_1 e y_2 son linealmente dependientes, es decir, que existe la relación $y_2 = ay_1$, donde a es una constante. Sustituyendo y_2 en la expresión (4) tendremos

$$y = C_1y_1 + C_2ay_1$$

o

$$y = Cy_1, \tag{8}$$

donde $C = C_1 + aC_2$. Esta solución contiene sólo una constante arbitraria C y por eso no puede ser general.

Entonces, para hallar la solución general de la ecuación (1) es suficiente conocer dos soluciones particulares linealmente independientes y_1 e y_2 de esta ecuación.

§ 12. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Sea dada una ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

cuyos coeficientes p y q son constantes.

Buscaremos una solución particular de la ecuación (1) de la forma

$$y = e^{kx}, \tag{2}$$

donde k es un número constante a determinar. De la (2) deducimos

$$y' = ke^{kx} \quad \text{e} \quad y'' = k^2e^{kx}.$$

Sustituyendo y, y', y'' en la ecuación (1) obtendremos

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

o, simplificando por el factor no nulo e^{kx}, hallamos

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

La ecuación cuadrática (3) a partir de la cual se determina el número k se llama *ecuación característica* de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes (1) dada. Notemos que para escribir la ecuación característica (3) es suficiente reemplazar en la ecuación diferencial (1) las derivadas y'', y' y la función y por las potencias correspondientes de k considerando en este caso la función y como una derivada de orden cero.

Resolviendo la ecuación característica (3) obtendremos

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{4}$$

Aquí pueden presentarse tres casos distintos.

CASO I. Si

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \tag{5}$$

en virtud de la fórmula (4), la ecuación característica (3) tiene dos raíces reales y distintas k_1 y k_2. Por consiguiente, la ecuación lineal (1) admite dos soluciones particulares distintas

$$y_1 = e^{k_1x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{k_2x}.$$

Puesto que $k_1 \neq k_2$, estas soluciones, como hemos visto, (ejemplo 1 del § 11) son linealmente independientes. Por consiguiente, la solución general para el caso I es la siguiente

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{6}$$

EJEMPLO 1. Sea

$$y'' - 2y' - 8y = 0. \tag{7}$$

Resolviendo la ecuación característica

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

hallamos sus raíces

$$k_1 = 4, \quad k_2 = -2.$$

La solución general de la ecuación (7) es de la forma

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$

CASO II Si

$$\frac{p^2}{4} - q = 0, \tag{8}$$

en virtud de la fórmula (4), la ecuación característica (3) tiene una sola raíz

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}.$$

Esta raíz se denomina *múltiple*. Por eso una solución particular de la ecuación (1) será

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Toda otra solución particular y_2, linealmente independiente de y_1, será necesariamente de la forma

$$y_2 = y_1 \cdot z(x), \tag{9}$$

donde $z = z(x)$ es una función de x no idénticamente constante. De aquí,

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} z.$$

Derivando, hallamos

$$y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} z' + e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) z = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z' - \frac{p}{2} z\right)$$

e

$$y_2'' = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z'' - \frac{p}{2} z'\right) - \frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}x} \left(z' - \frac{p}{2} z\right) =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x} \left(z'' - pz' + \frac{p^2}{4} z\right).$$

Sustituyendo y_2, y_2', y_2'' en la ecuación (1) obtendremos después de la simplificación por el factor común $e^{-\frac{p}{2}x}$

$$z'' - pz' + \frac{p^2}{4} z + pz' - \frac{p^2}{2} z + qz = 0,$$

o

$$z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) z = 0.$$

Por fin según la condición (8) tendremos

$$z'' = 0.$$

De donde

$$z' = a \quad \text{y} \quad z = ax + b,$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

Por consiguiente

$$y_2 = (ax + b)\, e^{-\frac{px}{2}}. \tag{10}$$

Puesto que nos interesa solamente la solución particular, se puede tomar $a = 1$ y $b = 0$. Entonces,

$$y_2 = xe^{-\frac{px}{2}}.$$

De este modo, la solución general de la ecuación (1) en el caso II será

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} (C_1 + C_2 x). \tag{11}$$

Notemos que en realidad la fórmula (10) ha dado ya esta solución general, porque toda solución de la ecuación (1) puede ser presentada en la forma (10).

EJEMPLO 2. Sea $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Resolviendo la ecuación característica $k^2 - 6k + 9 = 0$, hallamos la raíz múltiple $k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$. Por consiguiente, la solución general se escribirá así

$$y = e^{3x} (C_1 + C_2 x).$$

CASO III Si

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

según la fórmula (4), la ecuación característica (3) tiene dos raíces complejas conjugadas

$$k_1 = \alpha + \beta i \quad \text{y} \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

donde $\alpha = -\frac{p}{2}$ y $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

En este caso, las soluciones particulares y_1 e y_2 de la ecuación (1) serán las siguientes:

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}\text{ 1)}. \tag{12}$$

De aquí, la solución general de la ecuación (1) puede ser escrita formalmente así:

$$y = \overline{C}_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + \overline{C}_2 e^{(\alpha-\beta i)x},$$

o bien,

$$y = e^{\alpha x}(\overline{C}_1 e^{i\beta x} + \overline{C}_2 e^{-i\beta x}), \tag{13}$$

donde $\overline{C}_1$ y $\overline{C}_2$ son constantes complejas elegidas de tal modo que la expresión (13) sea real.

En la expresión (13) se pueden eliminar las magnitudes imaginarias. De acuerdo con las fórmulas de Euler (§ 16 del cap. XXI) tenemos

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x$$

De aquí,

$$y = e^{\alpha x}[(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)\cos\beta x + i(\overline{C}_1 - \overline{C}_2)\operatorname{sen}\beta x].$$

Tomando

$$\overline{C}_1 + \overline{C}_2 = C_1 \quad \text{e} \quad i(\overline{C}_1 - \overline{C}_2) = C_2,$$

obtendremos definitivamente

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \operatorname{sen}\beta x), \tag{14}$$

donde C_1 y C_2 son números reales constantes arbitrarios (debido a que las constantes $\overline{C}_1$ y $\overline{C}_2$ son arbitrarias). Esto es efectivamente la solución general bajo forma real de la ecuación (1) para el caso III.

En particular, si en la ecuación característica (3) tenemos $p = 0$ y $q = \beta^2$, las raíces $k_{1,2} = \pm\beta i$ son números imaginarios puros ($\alpha = 0$) y la solución general de la ecuación diferencial correspondiente

$$y'' + \beta^2 y = 0$$

---

1) Por *derivada de una función compleja*

$$f_1(x) + if_2(x)$$

de una variable real x, donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones reales de x e i es la unidad imaginaria, se entiende, por definición, la expresión

$$[f_1(x) + if_2(x)]' = f_1'(x) + if_2'(x).$$

Utilizando la fórmula (4) del § 16 del cap. XXI es fácil verificar que si $k = \alpha + i\beta$, entonces $(e^{kx})' = ke^{kx}$. Por consiguiente, las funciones y_1 e y_2 así como toda combinación lineal de ellas satisfacen nuestra ecuación diferencial.

será obtenida de la forma

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x. \tag{15}$$

OBSERVACIÓN. Para las aplicaciones se utiliza a veces otro tipo de la fórmula (14). Precisamente, tomando

$$C_1 = A \operatorname{sen} \varphi \quad \text{y} \quad C_2 = A \cos \varphi, \tag{16}$$

donde A y φ son nuevas constantes arbitrarias ($A \geqslant 0$), tendremos

$$y = Ae^{\alpha x} \operatorname{sen} (\beta x + \varphi). \tag{17}$$

De la (16) obtenemos

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}.$$

Si la variable x se interpreta como el tiempo, entonces desde el punto de vista físico la función (17) describe un proceso oscilatorio cuya amplitud decrece cuando $\alpha < 0$ y crece indefinidamente cuando $\alpha > 0$.

EJEMPLO 3. Sea dada la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Resolviendo la ecuación característica $k^2 - 6k + 13 = 0$, obtenemos las raíces complejas $k_{1,2} = 3 \pm 2i$. Aquí $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Por consiguiente, en

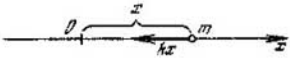

Fig. 232

virtud de la fórmula (14) la solución general se escribirá así

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x).$$

EJEMPLO 4. Un punto material de masa m es atraído por un centro fijo O con una fuerza proporcional a la distancia x del punto al centro de atracción (fuerza elástica) (fig. 232). Hallar la ley de movimiento de este punto (despreciando la resistencia del medio).

Según la ley de Newton, tenemos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad y el «—» indica que el signo de la fuerza aplicada al punto es opuesto al de su desplazamiento x. De aquí,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Acabamos de obtener una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Las raíces de la ecuación característica correspondiente

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

son imaginarias puras: $k_{1,2} = \pm \omega i$. Por eso, en virtud de la fórmula (14) ($\alpha = 0$, $\beta = \omega$) tenemos

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

Se puede tomar $C_1 = A \operatorname{sen} \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, donde A y φ son otras constantes arbitrarias. De aquí

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi),$$

es decir, el punto material efectúa en nuestras condiciones oscilaciones armónicas periódicas alrededor del centro de atracción con una *amplitud* A y *fase inicial* φ.

§ 13. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Examinemos una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden

$$y'' + yp' + qy = f(x), \tag{1}$$

donde p y q son números constantes dados y $f(x)$ (el segundo miembro de la ecuación) es una función conocida de x. Tiene lugar el teorema siguiente.

TEOREMA. *La solución general de la ecuación no homogénea* (1) *es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente*

$$\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0 \tag{2}$$

más una solución particular de la ecuación no homogénea (1).

DEMOSTRACIÓN Sea

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{3}$$

la solución general de la ecuación sin segundo miembro (2) y sea z una solución particular de la ecuación correspondiente con el segundo miembro (1). Es evidente que tenemos

$$\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0 \quad \text{y} \quad z'' + pz' + qz = f(x).$$

Sumando miembro a miembro estas ecuaciones y teniendo en cuenta que la derivada de una suma es igual a la suma de derivadas, obtendremos

$$(\bar{y} + z)'' + p(\bar{y} + z)' + q(\bar{y} + z) = f(x).$$

Está claro aquí que la función

$$y = \bar{y} + z \tag{4}$$

será solución de la ecuación (1) y que esta solución será **general** porque, según la fórmula (3), ella contiene dos constantes arbitrarias independientes C_1 y C_2.

Como sabemos hallar la solución general $\bar{y}$ de la ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes, nos queda solamente indicar un procedimiento para hallar una solución particular z de la ecuación no homogénea correspondiente (1), donde p y q son constantes.

Durante el examen de este último problema nos limitamos a estudiar los segundos miembros $f(x)$ más simples. En este caso, para hallar una solución particular de la ecuación (1) se aplica generalmente **el método de coeficientes indeterminados.**

CASO I. El segundo miembro de la ecuación (1) es una **función exponencial**

$$f(x) = ae^{mx} \qquad (a \neq 0).$$

Buscamos la solución particular z también bajo la forma de una función exponencial

$$z = Ae^{mx}, \tag{5}$$

donde A es un coeficiente indeterminado. De aquí,

$$z' = Ame^{mx} \quad \text{y} \quad z'' = Am^2e^{mx}.$$

Sustituyendo con $f(x)$ y las expresiones de z y de sus derivadas en la ecuación (1), tendremos, después de simplificar por e^{mx},

$$A(m^2 + pm + q) = a. \tag{6}$$

Son posibles dos casos: 1) m no es una raíz de la ecuación característica, es decir,

$$m^2 + pm + q \neq 0.$$

Entonces, $A = \frac{a}{m^2+pm+q}$ y, por consiguiente,

$$z = \frac{ae^{mx}}{m^2+pm+q};$$

2) el número m es raíz de la ecuación característica, es decir,

$$m^2 + pm + q = 0. \tag{7}$$

En este caso la ecuación (6) es contradictoria y, por consiguiente, la ecuación diferencial (1) no tiene solución particular de la forma (5).

En este caso: a) si m es una raíz simple de la ecuación característica (es decir, la otra raíz de esta ecuación es distinta de m), la solución particular (1) debe ser tomada de forma

$$z = Axe^{mx}$$

y, b) si m es una raíz múltiple de la ecuación característica, la solución particular de la ecuación (1) debe buscarse de la forma

$$z = Ax^2e^{mx}.$$

Esta recomendación puede ser verificada directamente.

EJEMPLO 1. Sea dada la ecuación $y'' - 5y' + 6y = e^x$.
Resolvamos primero la ecuación sin segundo miembro

$$\overline{y}'' - 5\overline{y}' + 6\overline{y} = 0.$$

La ecuación característica es aquí de la forma $k^2 - 5k + 6 = 0$. Sus raíces son $k_1 = 3$, $k_2 = 2$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación sin segundo miembro será

$$\overline{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

Puesto que $m = 1$ no es raíz de la ecuación característica, buscamos una solución particular de la ecuación con el segundo miembro bajo la forma siguiente

$$z = Ae^x,$$

donde A es un coeficiente indeterminado. Derivando tendremos

$$z' = Ae^x, \quad z'' = Ae^x.$$

Introduciendo estas expresiones en nuestra ecuación no homogénea obtendremos

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x \quad \text{o sea,} \quad 2A = 1.$$

De aquí, $A = \frac{1}{2}$. Entonces, una solución particular de la ecuación con el segundo miembro es

$$z = \frac{1}{2} e^x.$$

En virtud del teorema precedente, la solución general de esta ecuación tiene la forma siguiente

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^x.$$

CASO II. El segundo miembro de la ecuación no homogénea (1) es un **polinomio trigonométrico**

$$f(x) = M \cos \omega x + N \operatorname{sen} \omega x. \tag{8}$$

Buscamos una solución particular z de esta ecuación bajo forma de un polinomio trigonométrico

$$z = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x,$$

donde A y B son coeficientes indeterminados.

Derivando obtendremos

$$z' = -A\omega \operatorname{sen} \omega x + B\omega \cos \omega x \quad \text{y}$$

$$z'' = -A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \operatorname{sen} \omega x.$$

De aquí, sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) y agrupando los términos que tienen $\cos \omega x$ y $\operatorname{sen} \omega x$, tendremos

$$(-A\omega^2 + Bp\omega + Aq) \cos \omega x + (-B\omega^2 - Ap\omega + Bq) \operatorname{sen} \omega x \equiv$$
$$\equiv M \cos \omega x + N \operatorname{sen} \omega x.$$

Puesto que la última igualdad es una identidad, los coeficientes de $\cos \omega x$ y $\operatorname{sen} \omega x$, que figuran en los primero y segundo miembros de esta igualdad, deben ser iguales entre sí y obtendremos

$$A(q-\omega^2)+Bp\omega=M, \quad -Ap\omega+B(q-\omega^2)=N. \tag{9}$$

A partir de este sistema podemos en general calcular los coeficientes A y B. El único caso en que el sistema (9) resulta incompatible, es cuando

$$p=0 \quad q=\omega^2$$

(es decir, cuando $\pm i\omega$ son raíces de la ecuación característica). Entonces, la solución particular z debe ser buscada en la siguiente forma

$$z=x(A\cos\omega x+B\operatorname{sen}\omega x).$$

EJEMPLO 2. Sea la ecuación

$$y''-4y'+4y=\cos x. \tag{10}$$

La ecuación homogénea correspondiente será

$$\overline{y}''-4\overline{y}'+4\overline{y}=0. \tag{11}$$

Resolviendo la ecuación característica $k^2-4k+4=0$, hallamos la raíz múltiple $k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación homogénea (11) es

$$\overline{y}=e^{2x}(C_1+C_2x).$$

Buscaremos una solución particular de la ecuación (10) de la forma:

$$z=A\cos x+B\operatorname{sen} x,$$

donde A y B son coeficientes indeterminados.

Derivando, obtendremos

$$z'=-A\operatorname{sen} x+B\cos x, \quad z''=-A\cos x-B\operatorname{sen} x.$$

Sustituyendo z, z' y z'' en la ecuación (10), tendremos

$$-A\cos x-B\operatorname{sen} x+4A\operatorname{sen} x-4B\cos x+4A\cos x+4B\operatorname{sen} x=\cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y de $\operatorname{sen} x$ en el primer miembro y en el segundo, obtendremos el sistema

$$3A-4B=1, \quad 4A+3B=0.$$

Resolviendo estas ecuaciones conjuntamente hallamos $A=\frac{3}{25}$ y $B=-\frac{4}{25}$ y, por consiguiente,

$$z=\frac{3}{25}\cos x-\frac{4}{25}\operatorname{sen} x.$$

De aquí, la solución general de la ecuación (10) resulta

$$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{3}{25}\cos x-\frac{4}{25}\operatorname{sen} x.$$

EJEMPLO 3. Estudiar las oscilaciones de un punto material de masa m sometido a la acción de una fuerza elástica cuya magnitud es proporcional a la desviación x del punto respecto a la posición de equilibrio, en presencia de una fuerza perturbadora periódica igual a

$$F = F_0 \operatorname{sen} pt$$

(F_0, p, son constantes). La resistencia del medio se desprecia.

Según la ley de Newton la ecuación diferencial de movimiento del punto es la siguiente (fig. 233)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \operatorname{sen} pt$$

(k es el coeficiente de proporcionalidad), o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a \operatorname{sen} pt, \tag{12}$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $a = \frac{F_0}{m}$. La solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

como se sabe (véase el ejemplo 5 del § 10) tiene la forma (*oscilaciones libres de un punto*)

$$\bar{x} = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t, \tag{13}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Al buscar la solución particular z de la ecuación homogénea (12) se deben distinguir dos casos.

Fig. 233

CASO 1. Sea $p \neq \omega$, es decir, la frecuencia de la fuerza exterior no coincide con la de las oscilaciones libres (13).

Tomamos

$$z = A \cos pt + B \operatorname{sen} pt, \tag{14}$$

donde A y B son coeficientes indeterminados.

Sustituyendo la expresión (14) en la ecuación (12) tendremos

$$-Ap^2 \cos pt - Bp^2 \operatorname{sen} pt + \omega^2 (A \cos pt + B \operatorname{sen} pt) = a \operatorname{sen} pt,$$

o

$$A (\omega^2 - p^2) \cos pt + B (\omega^2 - p^2) \operatorname{sen} pt = a \operatorname{sen} pt.$$

De aquí,

$$A (\omega^2 - p^2) = 0, \quad B (\omega^2 - p^2) = a$$

y, por consiguiente,

$$A = 0, \quad B = \frac{a}{\omega^2 - p^2}.$$

De este modo,

$$z = \frac{a}{\omega^2 - p^2} \operatorname{sen} pt.$$

La solución general de la ecuación no homogénea (12) (*oscilaciones forzadas del punto*) se da por la fórmula

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{a}{\omega^2 - p^2} \operatorname{sen} pt \tag{15}$$

y representa una superposición de dos oscilaciones con frecuencias ω y p, siendo las amplitudes de estas oscilaciones limitadas.

CASO 2. Sea $p = \omega$, es decir, la frecuencia de la fuerza exterior coincide con la de oscilaciones libres (13).

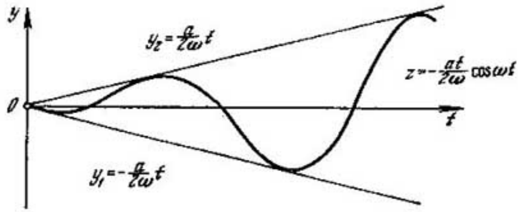

Fig. 234

Es evidente que en este caso la fórmula (15) pierde su sentido. Tomamos $z = t\,(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$; de donde

$$z' = (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) + t\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t)$$

y

$$z'' = 2\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t) + t\,(-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \operatorname{sen} \omega t).$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (12) tendremos

$$2\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t) - \omega^2 t\,(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) +$$
$$+ \omega^2 t\,(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) = a \operatorname{sen} \omega t,$$

o sea,

$$2\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t) = a \operatorname{sen} \omega t.$$

De aquí, para determinar los coeficientes indeterminados A y B tenemos el sistema

$$-2A\omega = a, \quad 2B\omega = 0.$$

Por consiguiente

$$A = -\frac{a}{2\omega}, \quad B = 0, \quad \text{esto significa que} \quad z = -\frac{at}{2\omega} \cos \omega t$$

(fig. 234). En este caso las oscilaciones forzadas del punto serán

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t - \frac{at}{2\omega} \cos \omega t. \tag{16}$$

La fórmula (16) muestra que la amplitud x de las oscilaciones crece indefinidamente con el tiempo t. De este modo, en el caso 2 una fuerza exterior de valor insignificante provoca oscilaciones ilimitadas del sistema. Este fenómeno se llama *resonancia*. La resonancia puede tener, como consecuencia física, una perturbación en el funcionamiento normal y hasta una destrucción de un sistema elástico. Son conocidos, por ejemplo, casos en que los golpeteos rítmicos de un tren cuando éste pasaba por un puente ferroviario provocaron la destrucción de este puente.

CASO 3. El segundo miembro de la ecuación lineal (1) es un polinomio del segundo grado, por ejemplo,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \tag{17}$$

Buscamos una solución particular z de esta ecuación también bajo la forma de un polinomio de segundo grado

$$z = Ax^2 + Bx + C,$$

donde A, B y C son coeficientes indeterminados.

Derivando, tendremos

$$z' = 2Ax + B \quad \text{y} \quad z'' = 2A.$$

De aquí, sustituyendo z, z' y z'' en la ecuación (1), obtendremos

$$2A + p(2Ax + B) + q(Ax^2 + Bx + C) \equiv ax^2 + bx + c,$$

o sea

$$Aqx^2 + (2Ap + Bq)x + (2A + Bp + Cq) \equiv ax^2 + bx + c.$$

Puesto que dos polinomios son idénticamente iguales cuando los coeficientes de iguales potencias de la variable x son iguales, tenemos el sistema

$$Aq = a, \quad 2Ap + Bq = b, \quad 2A + Bp + Cq = c, \tag{18}$$

para determinar los coeficientes A, B y C.

Si $q \neq 0$, este sistema permite obtener para los coeficientes A, B y C valores numéricamente determinados. De este modo, una solución particular z será perfectamente determinada.

Pero si $q = 0$ (la ecuación característica tiene una raíz simple nula), el sistema (18) es incompatible. En este caso, tomando $p \neq 0$, se debe buscar una solución particular z de forma

$$z = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Es necesario operar análogamente si $f(x)$ es un polinomio de otro grado cualquiera.

EJEMPLO 4. Sea la ecuación $y'' - 4y' + 13y = 2x + 1$.

La ecuación sin segundo miembro será

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 13\bar{y} = 0.$$

La ecuación característica es la siguiente: $k^2 - 4k + 13 = 0$, sus raíces son $k_{1,2} = 2 \pm 3i$. La solución general de la ecuación homogénea se escribe así:

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

La solución particular de la ecuación no homogénea se busca en la siguiente forma:

$$z = Ax + B.$$

De aquí, $z' = A$ y $z'' = 0$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación no homogénea, obtendremos

$$-4A + 13(Ax + B) = 2x + 1.$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de x en el primer miembro y en el segundo de la última identidad, tendremos

$$13A = 2; \quad -4A + 13B = 1.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtendremos $A = \frac{2}{13}$, $B = \frac{21}{169}$. Por consiguiente, una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$z = \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}.$$

Por eso su solución general posee la forma

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}.$$

Las constantes arbitrarias de la solución general pueden ser determinadas a partir de las condiciones iniciales.

EJEMPLO 5. Hallar la solución $y = y(x)$ de la ecuación

$$y'' = x^2 + y \tag{19}$$

tal, que

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{20}$$

Escribamos la ecuación (19) en la forma estándar

$$y'' - y = x^2. \tag{21}$$

La ecuación homogénea es aquí la siguiente:

$$\bar{y}'' - \bar{y} = 0.$$

La ecuación característica $k^2 - 1 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación homogénea es

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-x},$$

do de C_1 y C_2 son constantes.

Para hallar una solución particular z de la ecuación no homogénea (21) tomamos

$$z = Ax^2 + Bx + C.$$

Sustituyendo esta función en la ecuación (21), tendremos

$$2A - (Ax^2 + Bx + C) = x^2.$$

De aquí,

$$-A = 1, \quad -B = 0, \quad 2A - C = 0;$$

por consiguiente, $A = -1$, $B = 0$, $C = -2$ y $z = -x^2 - 2$.

La solución general de la ecuación no homogénea (19) es de la forma

$$y = \bar{y} + z$$

o

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - (x^2 + 2). \tag{22}$$

Derivando, hallamos

$$y' = C_1e^x - C_2e^{-x} - 2x. \tag{23}$$

Considerando que $x = 0$ en las fórmulas (22) y (23) y utilizando las condiciones iniciales (20) obtenemos, para determinar las constantes C_1 y C_2, el sistema

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 - C_2 = 1.$$

De aquí, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (22) obtenemos la solución buscada

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - (x^2 + 2), \quad \text{es decir} \quad y = \operatorname{sh} x - (x^2 + 2).$$

§ 14. Noción sobre las ecuaciones diferenciales que contienen derivadas parciales

Supongamos que u es una función que describe cierto proceso físico. Todo proceso se desarrolla en un tiempo t y en un espacio cuyos puntos pueden ser caracterizados por las coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z). Por eso, en el caso general u es una función de cuatro variables: $u = u(x, y, z, t)$[1]. Derivando la función u obtendremos las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, etc. Para un fenómeno dado estas derivadas están ligadas por relaciones conocidas y de este modo llegamos a **una ecuación diferencial que contiene derivadas parciales.**

Los matemáticos soviéticos han efectuado una contribución fundamental a la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. Es necesario señalar en particular los trabajos de M. Kéldych, M. Lavréntiev, I. Petrovski, S. Sóbolev, A. Tíjonov y otros.

Para las aplicaciones físicas son de especial interés las ecuaciones diferenciales en las cuales las mayores derivadas parciales sucesivas son de segundo orden (*ecuaciones diferenciales de segundo orden*). A esta categoría pertenecen las ecuaciones: de la dinámica de los gases, las hidrodinámicas, electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell) y muchas otras. Por eso, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden se llaman *ecuaciones de la física matemática*.

Indicaremos los tipos más importantes de estas ecuaciones para el caso de dos variables independientes.

I. *La ecuación ondulatoria unidimensional*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta ecuación se encuentra durante el estudio de una serie de procesos oscilatorios (vibraciones transversales de una cuerda elástica, vibraciones longitudinales de una barra, vibraciones de gas en un tubo, etc.).

[1]) En ciertos casos puede uno limitarse al análisis de un plano o de una recta; el número de variables independientes de la función u disminuye concomitantemente.

II. *Ecuación de conductibilidad térmica* (ecuación de Fourier):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

que describe el régimen térmico transitorio (*no estacionario*) de una barra (véase el § 14).

La propagación de oscilaciones eléctricas a lo largo de una línea está también ligada con esta ecuación.

III. *Ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Esta ecuación describe la distribución estacionaria de la temperatura en una placa homogénea, etc.

Para resolver estas ecuaciones en distintas condiciones fueron creados procedimientos especiales (llamados «métodos de la física matemática»).

Para simplificar nos limitamos a examinar el caso de dos variables independientes x, y:

$$u=u(x, y)$$

e introducimos las notaciones breves $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=u_y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u_{xy}$, etc. En este caso, la forma general de la ecuación diferencial de segundo orden para una función incógnita u es la siguiente:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0, \tag{1}$$

donde F es una función conocida.

Toda función $u=\varphi(x, y)$ que transforma la ecuación (1) en una identidad, se llama *solución* de esta ecuación; la representación gráfica de la solución se denomina *superficie integral*.

EJEMPLO 1. Hallar $u=u(x, y)$, si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

La ecuación (2) puede ser escrita bajo la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \tag{3}$$

De donde se deduce que $\frac{\partial u}{\partial y}$ no depende de y, es decir, es una función de la sola variable x. De esto modo, de la (3) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial y}=C_1(x), \tag{4}$$

donde $C_1(x)$ es una función arbitraria.

Integrando la ecuación (4) respecto a la variable y, obtendremos

$$u = \int C_1(x)\, dy \text{ [1]}. \tag{5}$$

o sea

$$u = C_1(x)\, y + C_2(x), \tag{6}$$

donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son funciones arbitrarias. Con ayuda de la diferenciación es fácil convencerse de que la solución general (6), que contiene las funciones arbitrarias $C_1(x)$ y $C_2(x)$, da aquí el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial (2). De este modo la solución de la ecuación diferencial (2) es una función arbitraria lineal respecto a la variable y.

Notemos que las soluciones generales de ecuaciones diferenciales ordinarias contienen constantes arbitrarias; para las ecuaciónes diferenciales con derivadas parciales sus soluciones de forma general incluyen **funciones arbitrarias**.

Concretizando las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ en la fórmula (6) obtendremos soluciones particulares de la ecuación (2). Considerando, por ejemplo, $C_1(x) = \operatorname{sen} x$, $C_2(x) = \cos x$, tendremos una solución particular $u = y \operatorname{sen} x + \cos x$, etc.

Como regla general, las ecuaciones con derivadas parciales admiten una infinidad de soluciones (véase, el ejemplo 1). Pero la solución de un problema físico descrito por una ecuación diferencial dada debe ser **unívoca**, según el sentido, de lo contrario no permite pronosticar el fenómeno físico correspondiente y, por consiguiente, posee poco interés práctico. Por eso para la solución de problemas de física deben ser empleadas, además de una ecuación diferencial, condiciones suplementarias que permitan extraer de la infinidad de soluciones de la ecuación diferencial dada la solución única que pueda formular la ley de funcionamiento del proceso físico examinado. En el caso más simple éstas son las condiciones llamadas **iniciales o de borde**. Hablando en términos generales las primeras caracterizan el proceso dado en el instante inicial, mientras que las segundas describen el comportamiento del fenómeno en la frontera del dominio examinado. Las condiciones iniciales y de borde de un problema, se llaman **condiciones de frontera**.

Si en la ecuación (1) la variable y se interpreta como el tiempo, las condiciones iniciales más simples para la función incógnita u son las siguientes

$$u(x, y_0) = f(x), \qquad u_y(x, y_0) = f_1(x), \tag{7}$$

donde $f(x)$ y $f_1(x)$ son funciones dadas. El problema de hallar la función u que satisfaga la ecuación diferencial (1) y las condiciones iniciales (7), se llama *problema de Cauchy*.

EJEMPLO 2. Hallar la solución $u = u(x, y)$ de la ecuación $u_{yy} = 0$ que satisface las condiciones iniciales siguientes:

$$u(x, 1) = x^2, \qquad u_y(x, 1) = x.$$

De la fórmula (6), tendremos

$$u = C_1(x)\, y + C_2(x), \qquad u_y = C_1(x). \tag{8}$$

[1]) En la integral (5) la variable x se supone constante; para cada x fija se puede tomar su constante arbitraria C_2. Por eso $C_2 = C_2(x)$.

Tomando $y = 1$ en la fórmula (8), obtendremos

$$x^2 = C_1(x) + C_2(x), \quad x = C_1(x); \tag{9}$$

de donde $C_1(x) = x$, $C_2(x) = x^2 - x$ y, por consiguiente,

$$u = xy + (x^2 - x). \tag{10}$$

La solución u es única.

Se dice, que un problema físico descrito por una ecuación diferencial en derivadas parciales, y con condiciones de frontera *está planteado correctamente* si: 1) tiene solución; 2) la solución es única; 3) la solución depende continuamente de las condiciones de frontera.

En efecto, antes de resolver el problema hace falta asegurarse de que él es, en general, resoluble. La historia de las ciencias conoce numerosos ejemplos en que los hombres gastaron mucha energía y mucho tiempo en búsqueda de soluciones de problemas irresolubles. Así, por ejemplo, durante más de 2000 años numerosos matemáticos trataron de resolver el problema de la «cuadratura del círculo», es decir, construir con ayuda de una regla y un compás un cuadrado de misma área que un círculo dado. Solamente a fines del siglo XIX fue demostrado que este problema era irresoluble. Análogamente, en la química resultaron infructuosas las tentativas de hallar la «piedra filosofal» capaz de transformar a cualquier metal en oro. La resolubilidad de un problema dado la garantiza el «teorema de existencia de la solución».

En cuanto a la segunda condición, las soluciones no unívocas de un problema son, como hemos dicho más arriba, de poca utilidad en la práctica. La univocidad de la solución está asegurada por el «teorema de la unicidad».

Por último, si se altera la tercera condición esto conduce a consecuencias indeseables. Desde el punto de vista práctico es malo, si variaciones infinitesimales de las condiciones iniciales o de borde (en la práctica ellas se conocen de un modo aproximado) provocan una variación considerable de la solución del problema en un dominio dado. En este caso hace falta recurrir al «teorema de la suavidad de las soluciones».

En los últimos tiempos surgió el interés por los problemas planteados incorrectamente. Resultados fundamentales en este campo han sido obtenidos por A. T

§ 15. Ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales

DEFINICIÓN. *Una ecuación diferencial se llama* **lineal** *(o con mayor precisión completamente lineal), si ella es un polinomio entero de primer grado respecto a una función incógnita y a sus derivadas y, en particular, no contiene sus productos.*

De este modo, la forma general de una ecuación diferencial de segundo grado es la siguiente:

$$A(x, y)\, u_{xx} + B(x, y)\, u_{xy} + C(x, y)\, u_{yy} + a(x, y)\, u_x + \\ + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y), \tag{1}$$

donde $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ son **coeficientes** conocidos y $f(x, y)$ es el **término independiente** dado. Si $f(x, y) \equiv 0$, entonces la ecuación lineal (1) se llama *homogénea* (sin **término** independiente); en caso contrario, la ecuación (1) se llama *no homogénea*.

Introduciendo las notaciones abreviadas

$$L[u] = A(x, y)\, u_{xx} + B(x, y)\, u_{xy} + C(x, y)\, u_{yy} + \\ + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u$$

(aquí L es el llamado *operador diferencial lineal*) se puede escribir la ecuación (1) en forma compacta

$$L[u] = f(x, y). \tag{1'}$$

La ecuación diferencial lineal homogénea

$$L[u] = 0 \tag{2}$$

posee la propiedad importante siguiente: *cualquier combinación lineal con coeficientes constantes de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, es también una solución de esta ecuación* (compárese con el § 11). En particular, *la suma de cualquier número de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, es también solución de esta ecuación* **(principio de la superposición de soluciones).**

Sin demostración, en forma general, nos limitamos a examinar un ejemplo que pone en evidencia la idea de la demostración. Sea dada una ecuación homogénea:

$$L[u] \equiv u_{xx} - x u_{yy} = 0 \tag{3}$$

y u_1, u_2 sus soluciones, es decir,

$$L[u_1] = 0, \quad L[u_2] = 0.$$

Examinemos, por ejemplo, la función

$$\hat{u} = 2u_1 - 3u_2. \tag{4}$$

De la (3) deducimos:

$$L[\hat{u}] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2u_1 - 3u_2) - x\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2u_1 - 3u_2) = \\ = 2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right) - 3\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) = 2L[u_1] - 3L[u_2] = 0.$$

De este modo, $\hat{u}$ es una solución de la ecuación (3).

§ 16. Deducción de la ecuación de la conductibilidad térmica

Examinemos una barra [1]) homogénea de sección transversal constante S y longitud l, térmicamente aislada desde los costados, y tomemos su eje por el eje Ox (fig. 235). Designemos por $u = u(x, t)$

---

[1]) En mecánica se entiende por barra todo cuerpo de una sola dimensión lineal predominante. Por ejemplo, un cohete puede ser considerado como una barra de sección variable.

$(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant +\infty)$ la temperatura de la barra en la sección de abscisa x en el instante de tiempo t [1]).

Sean $\rho = \text{const}$, la densidad de la barra, $c = \text{const}$, su calor específico, $k = \text{const}$, el coeficiente de conductibilidad térmica, $\Phi(x, t)$ la intensidad de una fuente de calor que se encuentra en la sección x en el instante t respecto a la unidad de masa y a la unidad de tiempo[2]), (por ejemplo, los aparatos que funcionan en una nave

Fig. 235

cósmica pueden ser considerados como fuente de calor). Según **la ley de Fourier** la cantidad de calor que pasa por la sección S de abscisa x en el sentido del eje Ox durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt, es igual a

$$dQ_x = -k \frac{\partial u}{\partial x} S\, dt, \tag{1}$$

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.$ es aquí el gradiente de temperatura $\left.u\right)$. El signo "$-$" en la fórmula (1) se explica por el hecho de que para $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, es decir, cuando la temperatura u aumenta junto con x, el flujo de calor está dirigido en el sentido opuesto, y viceversa.

Compongamos el balance térmico para un elemento ΔV de la barra, encerrado entre dos secciones I y II infinitamente cercanas de abscisas respectivas x y $x + dx$. Supongamos, para mayor determinación, que la temperatura u de la barra se eleva en el sentido del eje Ox. En este caso, el calor sale $(-)$ por la sección I y entra $(+)$ en la sección II. Sea dQ la cantidad de calor acumulada por el elemento ΔV durante el intervalo de tiempo dt.

Teniendo en cuenta el hecho de que la cantidad de calor producida durante el tiempo dt por fuentes térmicas que se encuentran en el elemento ΔV es igual a

$$\Phi(x, t) \cdot \rho S\, dx \cdot dt \tag{2}$$

---

[1]) Se supone que la temperatura es la misma en todos los puntos de la sección transversal de la barra.

[2]) Es decir, la cantidad de calor producido por esta fuente de calor en la unidad de tiempo por unidad de masa.

y, utilizando la fórmula (1), tendremos

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x \cdot S\,dt + k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} \cdot S\,dt + \rho S\Phi(x, t)\,dx\,dt. \qquad (3)$$

Aplicando la fórmula (§ 5 del cap. XII)

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx, \qquad (4)$$

obtendremos con exactitud de hasta infinitésimos de orden superior

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_x dx. \qquad (5)$$

Por eso, la fórmula (3) adquiere la forma

$$dQ = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S\,dx\,dt + \rho S\Phi(x, t)\,dx\,dt. \qquad (6)$$

Por otra parte, $\frac{\partial u}{\partial t}$ es la velocidad de variación de la temperatura del elemento ΔV, y por eso $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\,dt$ es la variación de su temperatura. Puesto que la masa del elemento ΔV es igual a $\rho S\,dx$, la cantidad de calor acumulada en este caso es igual a

$$dQ = c\rho S\,dx\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dt. \qquad (7)$$

Igualando entre sí las expresiones (7) y (6) y después de simplificar por el factor común $S\,dx\,dt$, obtendremos

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\Phi(x, t) \qquad (8)$$

o, introduciendo la designación tradicional

$$\frac{k}{c\rho} = a^2, \qquad (9)$$

tendremos finalmente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c}\Phi x(x, t). \qquad (10)$$

La ecuación diferencial (10) que describe la distribución de temperatura u en la barra, se llama *ecuación de la conductibilidad térmica* (*ecuación de Fourier*).

Si no hay fuentes de calor, la ecuación (10) toma la forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (11)$$

Una ecuación análoga es también correcta para la temperatura de un cuerpo.

La ecuación de la conductibilidad térmica se aplica en física, química, astronomía, construcción, etc.

§ 17. Problema sobre la distribución de la temperatura en una barra limitada

Según el § 16, la temperatura $u = u(x, t)$ en la sección x de una barra homogénea (fig. 236) al instante de tiempo t, en ausencia de fuentes de calor, satisface la ecuación de la conductibilidad térmica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l). \tag{1}$$

Supondremos que está dada la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{2}$$

Supondremos también que los extremos de la barra $x = 0$ y $x = l$ tienen constantemente la temperatura igual a la del medio ambiente que consideraremos condicionalmente igual a cero. De este modo, tenemos **condiciones de frontera** simples

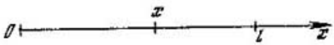

Fig. 236

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0 \tag{3}$$

para un $t \geqslant 0$ cualquiera.

En estas condiciones, hace falta determinar la distribución de la temperatura $u = u(x, t)$ en la barra, para instantes de tiempo $t \geqslant 0$.

Busquemos primeramente para la ecuación (1) soluciones no nulas del tipo especial

$$u = X(x)\, T(t), \tag{4}$$

donde $X(x)$ es una función de una sola variable x, y $T(t)$ es una función de una sola variable t. Puesto que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T,$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) obtendremos

$$XT' \equiv a^2 X'' T.$$

De aquí, separando las variables, nos queda

$$\frac{X''}{X} \equiv \frac{T'}{a^2 T}. \tag{5}$$

El primer miembro de la identidad (5) depende sólo de x, y el segundo miembro, solamente de t. Como x y t son variables independientes, esto es sólo posible cuando los dos miembros de la identidad (5) son iguales a una cierta constante. Para la comodidad de cálculos ulteriores designamos esta constante por $-\lambda^2$ [1]. Obtendremos

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2. \tag{6}$$

---

[1]) Puede uno convencerse directamente de que si se elige otro signo de esta constante, no obtendremos las soluciones necesarias.

De donde tendremos dos ecuaciones

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad T' + a^2\lambda^2 T = 0. \tag{7}$$

La primera de las ecuaciones (7) es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, las raíces de su ecuación característica $k^2 + \lambda^2 = 0$ son $k_{1,2} = \pm\lambda i$. Según las fórmulas conocidas (véase el § 12) su solución general tiene la forma

$$X(x) = A \operatorname{sen} \lambda x + B \cos \lambda x, \tag{8}$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

La segunda ecuación (3) se resuelve fácilmente mediante el método de separación de variables:

$$T(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}, \tag{9}$$

donde C es una constante arbitraria.

Multiplicando las funciones (8) y (9) tendremos

$$u = e^{-a^2\lambda^2 t}(A \operatorname{sen} \lambda x + B \cos \lambda x), \tag{10}$$

aquí se considera que $C = 1$, lo que es equivalente a la sustitución de AC por A y de BC por B.

Cualquiera que sea la elección de las constantes A, B y λ, las funciones (10) satisfacen la ecuación de la conductibilidad térmica. Hagamos que estas funciones satisfagan también las condiciones de frontera (3). Tomando $x = 0$ obtendremos

$$0 = e^{-a^2\lambda^2 t}B;$$

de donde $B = 0$ y, por consiguiente,

$$u = Ae^{-a^2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x. \tag{10'}$$

Tomando ahora $x = l$, en virtud de la condición (3) tendremos

$$0 = Ae^{-a^2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda l. \tag{11}$$

Pero $A \neq 0$, porque en caso contrario tendríamos una solución nula $u = 0$. Por eso

$$\operatorname{sen} \lambda l = 0 \tag{12}$$

y

$$\lambda l = n\pi \quad (n = 0, +1, +2, \ldots). \tag{13}$$

De aquí,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{14}$$

Los números λ_n se denominan *números característicos* del problema y su conjunto se llama *espectro del problema*. A cada número característico λ_n le corresponde una solución particular de la ecuación de la conductibilidad térmica:

$$u_n = A_n e^{-b^2 n^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{15}$$

donde, para abreviar, se toma $b = \frac{a\pi}{l}$.

Notemos que es suficiente tomar solamente n números enteros positivos ($n = 1, 2, \ldots$) porque cuando $n = 0$ tenemos $u \equiv 0$, lo que no se recomienda, y cuando $n < 0$ obtendremos soluciones de la misma naturaleza que para $n' = -n > 0$ correspondiente.

Entonces, la fórmula (15) nos da todas las soluciones particulares linealmente independientes de la forma (4) de la ecuación de la conductividad térmica (1), que satisfacen las condiciones de frontera (3). Físicamente las funciones u_n son ondas de temperatura cuyas gráficas son sinusoides que se amortiguan para $t \to \infty$ (fig. 237, a, b).

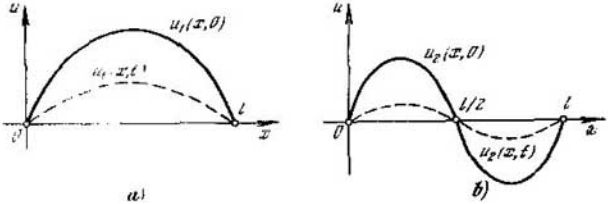

Fig. 237

Nos queda por asegurar la realización de la condición inicial (2). Como la ecuación (1) es lineal y homogénea se puede aplicar el principio de superposición de soluciones (§ 15). De aquí tendremos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{16}$$

y si la serie (16) es convergente, la función (16) es, con las condiciones conocidas, una solución de la ecuación (1). Considerando que $t = 0$ en la fórmula (16) en virtud de la condición inicial (2) tendremos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \tag{17}$$

La serie (17) representa en el segmento $[0, l]$ el desarrollo de la función $f(x)$ en serie de Fourier, según los senos de arcos múltiples. Para los coeficientes del desarrollo son justas las fórmulas (véase el § 19 del cap. XXI)

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

De este modo, la solución del problema es dada por la serie (16), cuyos coeficientes se determinan por la fórmula (18). Para los cálculos de ingeniería habitual es suficiente con tomar algunos términos de esta serie.

Notemos que la solución obtenida tiene un carácter formal, porque no fue estudiada la convergencia de la serie (16). Sin embargo, se puede mostrar que si la función $f(x)$ es suficientemente suave sobre el segmento $[0, l]$, la serie (16) es convergente y su suma $u(x, t)$ satisface tanto la ecuación diferencial (1), como la condición inicial (2) y las condiciones de frontera (3), es decir, $u(x, t)$ es la solución de nuestro problema en el sentido habitual.

El método utilizado para la resolución de este problema se llama generalmente *método de Fourier* (o método de separación de variables).

EJERCICIOS

1. Mostrar que la función $y = Ce^{-x^2}$, donde C es una constante arbitraria, es la solución de la ecuación $y' + 2xy = 0$.

2. Mostrar que la función

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, es la solución de la ecuación $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3. Hallar la curva integral de la ecuación $xy' = 2y$, que pasa por el punto M_0 (2, 3).

4. Integrar las ecuaciones con variables separadas:
a) $x\,dx + y\,dy = 0$; b) $y\,dx + x\,dy = 0$; c) $dx - x\,dy = 0$; d) $y' = 2 + y$; e) $y' = e^{x+y}$.

5. Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$; b) $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}$.

6. Hallar la curva integral de la ecuación $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ que pasa por el punto (1, 0).

7. Resolver las ecuaciones diferenciales lineales:
a) $xy' = x^3 + y$; b) $(x + y^2)\,y' = 1$.

8. Hallar la solución de la ecuación $y' \cos x + y \operatorname{sen} x = 1$, que satisfaga la condición inicial $y = 0$ para $x = 0$.

9. Hallar la curva cuya tangente en todos los puntos es perpendicular al radio polar del punto de tangencia.

10. Hallar la curva que pasa por el punto A (2, 1) y que tiene una subtangente constante (es decir, la proyección sobre el eje Ox del segmento de tangente desde el punto de tangencia al punto de intersección con el eje Ox) igual a 4.

11. La velocidad de desintegración del radio es en todo instante de tiempo proporcional a su cantidad disponible. Establecer la ley de desintegración del radio, si su cantidad inicial es Q_0 y si se sabe que dentro de 1600 años (período de semidesintegración) quedará sólo la mitad de esta cantidad.

12. Una reacción química que transforma una sustancia A en otra B se desarrolla de tal modo que a cada instante de tiempo la velocidad de disminución de la cantidad de la sustancia A es proporcional al producto de las cantidades disponibles de las sustancias A y B.

En el momento inicial la retorta contenía 800 g de sustancia A y 200 g de sustancia B; al pasar 2 horas quedaron 400 g de sustancia A. ¿Qué cantidad de sustancia A quedará en la retorta al cabo de 4 horas?

13. Calcular mediante el método de Euler y (2), si $y' = x - y$, $y(1) = 0{,}370$ $(h = 0{,}2)$.

Integrar la ecuación de segundo orden.

14. $y'' = \operatorname{sen} x$. 15. $y'' = -y$. 16. $2yy'' = 1 + y'^2$.

17. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' = x$, que pasa por el punto M_0 (0, 1) y la tangente en este punto a la recta $y = \dfrac{x}{2} + 1$.

18. Con ayuda de series de potencia, integrar las ecuaciones:

a) $y' = y + \dfrac{x^2}{4}$, $y(0) = 1$; b) $y'' = xy$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Integrar las ecuaciones diferenciales lineales de los coeficientes constantes siguientes:

19. $y'' + y' - 2y = 0$. 20. $y'' + 2y' + 2y = 0$. 21. $y'' + y' + y = 0$. 22. $y'' = y' - 0{,}25y$. 23. $y'' + y = 0$, si $y = 2$ e $y' = -1$ cuando $x = 0$.

24. $y'' - y = e^{2x}$. 25. $y'' + 4y = \text{sen}\, x$. 26. $y'' - 5y' + 6y = x^2$. 27. $y'' - 2y' + 2y = 2x$, si $y = 0$ e $y' = 0$ para $x = 0$.

28. Un punto material de masa m es atraído por una fuerza elástica, proporcional al alejamiento del punto con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad del punto. Hallar la ecuación de movimiento del punto suponiendo que la resistencia del medio ambiente es pequeña con respecto a la fuerza elástica.

Capítulo XXIII

Integrales curvilíneas

§ 1. Integral curvilínea de la primera especie

Sea K una curva plana suave (o suave a trozos[1])

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

donde t es un parámetro, y sea

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|dt|$$

su diferencial de arco. Aquí, si $\alpha \leqslant \beta$, entonces $dt > 0$ y $ds = +\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$: si $\alpha \geqslant \beta$, $dt < 0$ y $ds = -\sqrt{x'^2 + y'^2_2}\,dt$. Si $f(x, y)$ es una función continua sobre la curva K, la integral

$$\int\limits_K f(x, y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|dt| \qquad (1)$$

se denomina *integral curvilínea de primera especie*.

En el caso cuando la curva K está dada por la ecuación

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

considerando x como un parámetro, obtendremos

$$\int\limits_K f(x, y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

Supongamos que K es una curva material, es decir, que tiene masa. Sean Δs cierto arco de la curva K que contiene un punto M, y Δm la masa de este arco. Entonces, la relación $\Delta m/\Delta s$ se llama *densidad media* del arco Δs, y

$$\mu(M) = \lim_{\Delta s \to M} \frac{\Delta m}{\Delta s},$$

es decir, el límite hacia el cual tiende la densidad media del arco a condición de que el arco Δs tienda a transformarse en un punto M, se llama *densidad lineal* del arco en el punto M.

---

[1]) Es decir, las derivadas de sus coordenadas presentan, posiblemente, un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie.

Si $\mu = f(x, y)$ se considera como la densidad lineal del arco en su punto corriente $M(x, y)$, entonces

$$dm = \mu\, dS$$

es la masa de un arco infinitesimal ds (*masa elemental*) y la integral

$$m = \int_K \mu\, ds \tag{2}$$

representa la masa de la curva **(interpretación física de la integral curvilínea de primera especie).**

La integral curvilínea de primera especie posee las propiedades evidentes siguientes.

1) La integral curvilínea de primera especie no cambia su valor cuando varía el sentido del camino de integración (fig. 238), es decir,

$$\int_{K^+} = \int_{K^-},$$

donde K^+ es la curva K recorrida en el sentido dado (correspondiente, por ejemplo, al incremento del parámetro t) y K^- es la curva K recorrida en el sentido opuesto (correspondiente a un t decreciente).

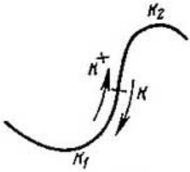

Fig. 238

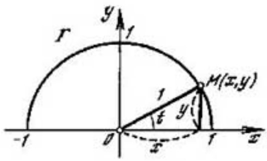

Fig. 239

2) Si el camino de integración K está dividido por un punto cualquiera en dos partes: $K = K_1 \cup K_2$ (fig. 238), entonces

$$\int_{K_1 \cup K_2} = \int_{K_1} + \int_{K_2}.$$

EJEMPLO. Hallar la masa de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$ $y \geqslant 0$ (Γ) (fig. 239) sabiendo que su densidad lineal en el punto corriente $M(x, y)$ es proporcional a la ordenada y.

Tomando como parámetro t el ángulo polar (fig. 239) obtendremos las ecuaciones paramétricas de la semicircunferencia:

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi). \tag{3}$$

La masa elemental es

$$dm = \mu\, ds = ky\, \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt, \tag{4}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

Puesto que

$$x' = -\text{sen}\, t, \quad y' = \cos t$$

y

$$dS = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = dt,$$

de la (4) tenemos

$$dm = k \,\text{sen}\, t\, dt.$$

De aquí la masa de la línea Γ será igual a

$$m = k \int_0^{\pi} \text{sen}\, t\, dx = k(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2k.$$

Se calcula del mismo modo una integral curvilínea de primera especie de una función $f(x, y, z)$ tomada a lo largo de una curva espacial suave a trozos K:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]):$$

$$\int_K f(x, y, z)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, |dt|,$$

donde

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, |dt|$$

es la diferencial del arco de la curva espacial K.

§ 2. Integral curvilínea de segunda especie

Sea

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

una curva suave (o suave a trozos) K cuya orientación está elegida (una curva semejante será llamada, para abreviar, *camino*), y sean $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ dos funciones continuas sobre la curva K. Teniendo en cuenta que las diferenciales de las coordenadas corrientes x e y de la curva K son de la forma

$$dx = x'(t)\, dt, \quad dy = y'(t)\, dt, \tag{1}$$

se llama *integral curvilínea de segunda especie* de dos funciones X e Y tomada a lo largo de la curva K a la integral

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta [X(x(t), y(t))\, x'(t) + Y(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt \tag{2}$$

(de una manera tradicional no se ponen paréntesis en la expresión izquierda y se supone que la integral $\int\limits_K$ se refiere a toda la suma)

Si el camino K está dado por la ecuación

$$y = y(x) \quad (x \in [a, b]),$$

la fórmula (2) adquiere la forma

$$\int\limits_K X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))\,y'\,x)]\,dx. \qquad (3)$$

De un modo análogo, si K está dado por la ecuación $x = x(y)$ $(y \in [A, B])$, entonces

$$\int\limits_K X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_A^B [X(x(y), y)\,x'(y) + Y(x(y), y)]\,dy. \qquad (4)$$

La integral curvilínea de segunda especie posee las propiedades siguientes:

1) Si varía el sentido del camino de integración, la integral curvilínea de segunda especie cambia de signo, es decir,

$$\int\limits_{K^-} = -\int\limits_{K^+}. \qquad (5)$$

Efectivamente, la variación del sentido del camino de integración es equivalente a la permutación de los límites de integración α y β en la integral definida (2), y esto exige el cambio del signo de la integral definida (§ 5 del cap. XIV).

2) Si el camino de integración K está compuesto de dos partes $K = K_1 \cup K_2$, entonces

$$\int\limits_{K \cup K_2} = \int\limits_{K_1} + \int\limits_{K_2}. \qquad (6)$$

EJEMPLO 1 Calcular los valores de la integral

$$I = \int\limits_K y\,dx - x\,dy$$

a lo largo de los caminos indicados: 1) la recta OA; 2) la parábola OmA de vértice O y de eje Oy; 3) la línea quebrada OBA; 4) la línea quebrada OCA (fig. 240).

SOLUCIÓN. 1) La ecuación de la recta OA es $y = 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. De aquí $dy = 2dx$ y, por consiguiente

$$I_1 = \int_0^1 (2x\,dx - x \cdot 2\,dx) = 0.$$

2) La ecuación de la parábola OmA es de la forma $y = kx^2$. Como esta parábola pasa por el punto A $(1, 2)$, $2 = k \cdot 1^2$ y esto significa que $k = 2$, es decir $y = 2x^2$. De aquí $dy = 4x\,dx$, y entonces,

$$I_2 = \int_0^1 (2x^2\,dx - x \cdot 4x\,dx) =$$

$$= -\int_0^1 2x^2\,dx = -\frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

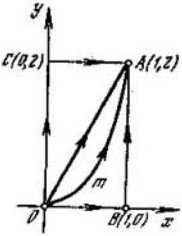

Fig. 240

3) De acuerdo con la propiedad 2 tenemos

$$I_3 = \int_{OB} (y\,dx - x\,dy) + \int_{BA} (y\,dx - x\,dy). \qquad (7)$$

Como la ecuación de OB es $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, entonces $dy = 0$.

Luego, la ecuación de BA se escribe de la forma $x = 1$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$; por eso $dx = 0$. De la fórmula (7) obtenemos

$$I_3 = \int_0^1 (0 - x \cdot 0)\,dx + \int_0^2 (y \cdot 0 - 1)\,dy = -2.$$

4) Operando de modo análogo, obtendremos

$$I_4 = \int_{OC} (y\,dx - x\,dy) + \int_{CA} (y\,dx - x\,dy) = \int_0^2 (y \cdot 0 - 0)\,dy + \int_0^1 (2 - x \cdot 0)\,dx = 2.$$

Notemos que la integral I teniendo extremos fijos del camino de integración K depende aquí de la naturaleza del camino de integración.

EJEMPLO 2. Hallar la integral

$$I = \int_K y\,dx + x\,dy$$

a lo largo de las líneas K indicadas en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN. Utilizando las ecuaciones de la línea K dadas más arriba, obtendremos sucesivamente

$$I_1 = \int_{OA} (y\,dx + x\,dy) = \int_0^1 (2x\,dx + x \cdot 2\,dx) = 4\int_0^1 x\,dx = 2x^2 \Big|_0^1 = 2,$$

$$I_2 = \int_{OmA} (y\,dx + x\,dy) = \int_0^1 (2x^2\,dx + x \cdot 4x\,dx) = 6\int_0^1 x^2\,dx = 2x^3 \Big|_0^1 = 2,$$

$$I_3=\int\limits_{OB}(y\,dx+x\,dy)+\int\limits_{BA}(y\,dx+x\,dy)=\int\limits_0^1(0+x\cdot 0)\,dx+\int\limits_0^2(y\cdot 0+1)\,dy=2,$$

$$I_4=\int\limits_{OC}(y\,dx+x\,dy)+\int\limits_{CA}(y\,dx+x\,dy)=\int\limits_0^2(y\cdot 0+0)\,dy+\int\limits_0^1(2+x\cdot 0)\,dx=2.$$

De este modo, la integral I tiene aquí un solo y mismo valor para diferentes caminos que unen los puntos O y A. La diferencia principal entre los ejemplos 1 y 2 será explicada en el § 4.

Si

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (t\in[\alpha,\ \beta])$$

es una curva K espacial suave a trozos y $X(x,\ y,\ z)$, $Y(x,\ y,\ z)$, $Z(x,\ y,\ z)$ son tres funciones continuas sobre la curva K, se llama integral curvilínea de segunda especie correspondiente a la siguiente:

$$\int\limits_K X(x,\ y,\ z)\,dx+Y(x,\ y,\ z)\,dy+Z(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta [X(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t)+Y(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t)+$$
$$+Z(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)]\,dt.$$

§ 3. Interpretación física de la integral curvilínea de segunda especie

Sea $\boldsymbol{F}=\{X(x,\ y),\ Y(x,\ y)\}$ una fuerza continuamente variable y sea

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (t\in[\alpha,\ \beta])$$

el camino recorrido por el punto de aplicación de esta fuerza (fig. 241); designemos por $\boldsymbol{ds}=\overrightarrow{MM'}$ un vector infinitesimal del desplazamiento del punto corriente $M(x,\ y)$ de la curva K hacia un punto infinitamente cercano $M'\{x+dx,\ y+dy\}$ (despreciamos aquí los infinitésimos de orden superior a $\boldsymbol{ds}$). Tenemos $\boldsymbol{ds}=\{dx,\ dy\}$. Como sobre un camino infinitamente pequeño $\boldsymbol{ds}$, la fuerza continua $\boldsymbol{F}$ puede ser considerada como constante (véanse los §§ 12 y 13 del cap. XVIII), entonces el trabajo elemental de esta fuerza es igual a

$$dA=\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{ds}=X\,dx+Y\,dy. \tag{1}$$

Integrando la expresión (1) a lo largo de la curva K obtendremos el trabajo de la fuerza

$$A=\int\limits_K X\,dx+Y\,dy. \tag{2}$$

La expresión (2) es evidentemente la integral curvilínea de segunda especie correspondiente.

Y bien, *la integral curvilínea de segunda especie expresa el trabajo de una fuerza variable a lo largo del camino de integración, las proyecciones de esta fuerza sobre los ejes de las coordenadas son los coeficientes correspondientes de las diferenciales de las variables.*

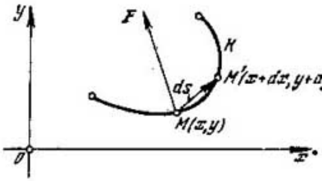

Fig. 241

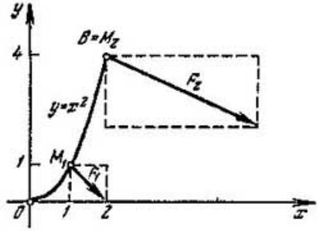

Fig. 242

EJEMPLO. Calcular el trabajo A de la fuerza variable $F=\{y, -x\}$ cuyo punto de aplicación describe la parábola OB (fig. 242):

$$y=x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2). \tag{3}$$

De acuerdo con la fórmula (2), tenemos

$$A=\int\limits_{OB} X\,dx+Y\,dy=\int\limits_{OB} y\,dx-x\,dy.$$

Mediante la ecuación (3) obtenemos $dy=2x\,dx$, por eso,

$$A=\int\limits_0^2 x^2\,dx-x\cdot 2x\,dx=-\int\limits_0^2 x^2\,dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=-2\frac{2}{3}\text{ unidades.}$$

De un modo análogo, el trabajo de una fuerza espacial

$$F=\{X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)\}$$

a lo largo del camino K: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ se expresa por la integral curvilínea de segunda especie

$$A=\int\limits_K X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

§ 4. Condición para que una integral curvilínea de segunda especie sea independiente de la naturaleza del camino de integración

Sean $X=X(x, y)$, $Y=Y(x, y)$ dos funciones continuas en un dominio G (fig. 243). Examinemos dos puntos cualesquiera $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ del dominio y todos los caminos posibles $M_1\alpha M_2$,

$M_1\beta M_2$, $M_1\gamma M_2$, . . ., que unen estos puntos (M_1 es el **comienzo del camino** y M_2 es el **fin del camino**) y sin salir de los límites del dominio G. Puede ocurrir que

$$\int\limits_{M_1\alpha M_2} X\,dx+Y\,dy=\int\limits_{M_1\beta M_2} X\,dx+Y\,dy=\int\limits_{M_1\gamma M_2} X\,dx+Y\,dy=\ldots \tag{1}$$

En este caso se dice que la integral curvilínea de segunda especie

$$I=\int\limits_{\widehat{M_1M_2}} X\,dx+Y\,dy \tag{2}$$

no depende del tipo del camino de integración en el dominio dado G.

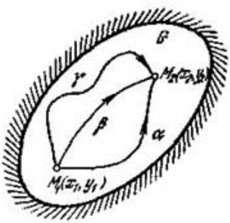

Fig. 243

Si se cumplen las condiciones (1), no es necesario indicar el camino de integración para la integral (2), es suficiente señalar solamente los puntos inicial $M_1\,(x_1,\ y_1)$ y terminal $M_2\,(x_2,\ y_2)$ de este camino. Por eso se utiliza en este caso la designación

$$I=\int\limits_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} X\,dx+Y\,dy. \tag{3}$$

Es justo el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si en un dominio G la expresión a integrar $X\ dx+Y\ dy$ es una diferencial total*[1]) *de cierta función $U=U\,(x,\ y)$, es decir, si*

$$dU=X\ dx+Y\ dy \text{ para } (x,\ y)\in G, \tag{4}$$

la integral curvilínea (2) *no depende del camino de integración en el dominio G.*

DEMOSTRACION. Sea

$$x=\varphi\,(t),\quad y=\psi\,(t)\quad (t\in[t_1,\ t_2]) \tag{5}$$

un camino arbitrario K en el dominio G que une los puntos $M_1\,(x_1,y_1)$ y $M_2\,(x_2,\ y_2)$ y

$$\left.\begin{aligned}\varphi\,(t_1)=x_1\quad \psi\,(t_1)=y_1;\\ \varphi\,(t_2)=x_2\quad \psi\,(t_2)=y_2.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

De la fórmula (4), tenemos

$$Xdx+Ydy=dU[\varphi(t),\ \psi\,(t)]. \tag{7}$$

[1]) Sobre la condición de existencia de una diferencial total, véase el § 9 del cap. XX.

De aquí obtenemos

$$I=\int_{t_1}^{t_2} dU\,[\varphi(t),\ \psi(t)]=U\,[\varphi(t),\ \psi(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}=U\,[\varphi(t_2),\ \psi(t_2)]-$$
$$-U\,[\varphi(t_1),\ \psi(t_1)]. \tag{8}$$

Luego, utilizando las relaciones (6), tendremos

$$I=U(x_2,\ y_2)-U(x_1,\ y_1)=U(M_2)-U(M_1). \tag{9}$$

De este modo, la integral I no cambia su valor, cualquiera que sea la elección de funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$ y, por consiguiente, esta integral no depende de la naturaleza del camino que une los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$.

COROLARIO 1. *Si la relación* (4) *se cumple, en virtud de la* (9) *tenemos*

$$\int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} X\,dx+Y\,dy=U(x_2,\ y_2)-U(x_1,\ y_1) \tag{10}$$

(fórmula de Newton—Leibniz generalizada).

COROLARIO 2. *Si la expresión subintegral $X\,dx+Y\,dy$ es una diferencial total y si el camino de integración K es cerrado, entonces*

$$\oint_K X\,dx+Y\,dy=0$$

(el círculo pequeño en la integral significa la integración a lo largo de un camino cerrado).

EJEMPLO. Hallar

$$I=\int_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)} y\,dx+x\,dy.$$

Puesto que $y\,dx+x\,dy=d(xy)$, entonces, independientemente de la naturaleza del camino que une los puntos $M_1(1,\ 2)$ y $M_2(3,\ 4)$, tenemos

$$I=\int_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)} d(xy)=xy\Big|_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)}=3\cdot4-1\cdot2=10.$$

§ 5. Trabajo de una fuerza potencial

El teorema del párrafo precedente posee una interpretación física. Sea

$$F=\{X(x,\ y),\ Y(x,\ y)\}$$

un campo de fuerzas definido en un dominio G.

Como ejemplo de campo de fuerzas se puede citar el campo de fuerza de gravedad cerca de la superficie de la Tierra, donde todo punto material de masa m está sometido a la acción de una fuerza de gravedad numéricamente igual a mg (g es la aceleración de la fuerza de gravedad). Un ejemplo más general de campo de fuerzas es el campo de gravitación creado por una masa M. Según la ley de Newton un punto material de masa m situado en este campo a la distancia r del centro de atracción está sometido a la acción de una fuerza numéricamente igual a $k\frac{mM}{r^2}$ (k es la constante de la gravitación) y dirigida hacia el centro de atracción. Otro ejemplo de campo de fuerzas es el campo eléctrico de Coulomb.

Si existe una función $U = U(x, y)$ tal, que

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},$$

se dice que éste es un *campo potencial* (en otras palabras, que F es una fuerza potencial) y la función U se llama *potencial del campo.*

En este caso es evidente que

$$X\,dx+Y\,dy=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy=dU.$$

De donde, para el trabajo A efectuado por la fuerza F a lo largo del camino que une los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$, tenemos

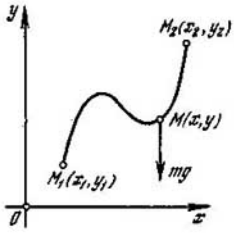

Fig. 244

$$A=\int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} X\,dx+Y\,dy=\int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} dU=$$
$$=U(x_2,\ y_2)-U(x_1,\ y_1),$$

es decir, *el trabajo de la fuerza potencial no depende de la naturaleza del camino y es igual a la diferencia de potenciales de la fuerza para los puntos de partida y de llegada de este camino.*

En particular, si el camino es cerrado, entonces el trabajo $A = 0$.

EJEMPLO. Calcular el trabajo A producido por la fuerza de gravedad para desplazar en el plano vertical Oxy (cerca de la superficie de la Tierra) un punto de masa m de la posición $M_1(x_1, y_1)$ a la posición $M_2(x_2, y_2)$ (fig. 244).

Si el eje Ox es horizontal y el eje Oy es vertical, las proyecciones de la fuerza de la gravedad que actúa sobre el punto material de masa m son iguales a

$$X=0, \quad Y=-mg.$$

Tenemos

$$X\,dx+Y\,dy=-mg\,dy=d(-mgy).$$

Por eso, como potencial del campo de gravedad se puede tomar

$$U=-mgy.$$

De donde se deduce que el trabajo de la fuerza de la gravedad, independientemente del camino $\widehat{M_1M_2}$, será igual a

$$A = -mgy\Big|_{(x_1,\, y_1)}^{(x_2,\, y_2)} = -mg\,(y_2 - y_1).$$

OBSERVACIÓN. Resultados análogos son también justos para la integral curvilínea tomada a lo largo de una curva de espacio. En particular, si

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU\,(x,\ y,\ z),$$

entonces

$$\int\limits_{(x_1,\, y_1,\, z_1)}^{(x_2,\, y_2,\, z_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = U\,(x_2,\ y_2,\ z_2) - U\,(x_1,\ y_1,\ z_1).$$

EJERCICIOS

1. Calcular las integrales curvilíneas de primera especie:

a) $\int\limits_K (x+y)\,ds$, donde K es el segmento de la recta $y = 2x - 1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 2)$;

b) $\int\limits_K x\,ds$, donde K es el arco de parábola $y = \frac{x^2}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

c) $\int\limits_K x^2y^2\,ds$, donde K es la circunferencia $x = R\cos t$, $y = R\,\mathrm{sen}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

d) $\int\limits_K \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\,ds$, donde K es el arco de la cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.

2. Hallar el área de la superficie de una «cerca» construida sobre la periferia K de un cuadrado de lados $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, cuya altura en el punto $(x,\ y) \in K$ es igual a $z = x^2 + y^2$.

3. Calcular la masa de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, si su densidad en el punto $(x,\ y)$ es igual a $\rho = \frac{y^2}{R^2}$.

4. Determinar las coordenadas del centro de gravedad $C\,(x_0,\ y_0)$ de la semicircunferencia homogénea K: $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$.

INDICACIÓN. Se demuestra en mecánica que las coordenadas del centro de gravedad de una curva homogénea K se expresan mediante las fórmulas

$$x_0 = \frac{1}{L}\int\limits_K x\,ds, \qquad y_0 = \frac{1}{L}\int\limits_K y\,ds,$$

donde L es la longitud del arco de la curva.

5. Calcular el momento de inercia I_y del arco de la parábola semicúbica $y = x^{3/2}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\right)$, respecto al eje Oy.

INDICACIÓN.

$$I_y = \int\limits_K x^2\,ds.$$

6. Calcular el momento de inercia I_x del arco de la cicloide K: $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ respecto al eje Ox.
INDICACIÓN.

$$I_x = \int\limits_K y^2\,ds.$$

7. Calcular las integrales curvilíneas de segunda especie:

a) $\int\limits_K y^2\,dx - x^2\,dy$, donde K es el arco de la parábola $y = 1 - x^2$ situado entre los puntos $M(-1, 0)$ y $N(1, 0)$;

b) $\int\limits_K \dfrac{dx - dy}{\sqrt{xy}}$, donde K es el segmento de la recta $x + y = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

c) $\oint\limits_K \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, donde K es la circunferencia $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

8. Calcular la integral $\oint\limits_K y\,(y\,dx - x\,dy)$, donde K es el contorno del triángulo de vértices $O\,(0, 0)$, $A\,(2, 1)$ y $B\,(1, 2)$ que recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

9. Calcular las siguientes integrales curvilíneas de segunda especie independientemente del camino de integración

a) $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(-3,4)} x\,dx - y\,dy$; c) $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ $(y > 0)$;

b) $\displaystyle\int_{(2,3)}^{(1,6)} y\,dx - x\,dy$; d) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^{x+y}\,(dx + dy)$.

10. Calcular el trabajo de la fuerza con proyecciones $X = y$, $Y = -x$ a lo largo de la elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$.

11. Calcular el trabajo de la fuerza $F = \{-kx, -ky\}$ cuando su punto de aplicación se desplaza de la posición $M_1\,(a, 0)$ a la posición $M_2\,(0, b)$.

12. Calcular el trabajo de la fuerza de proyecciones $X = \operatorname{sen}(x + y)$, $Y = 0$ a lo largo del contorno del triángulo de vértices $O\,(0, 0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $N\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ cuando él se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

13. Calcular el trabajo de la fuerza de proyecciones

$$X = \frac{x}{r^2}, \quad Y = \frac{y}{r^2},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuando su punto de aplicación se desplaza de la posición $M\,(a, 0)$ a la posición $M_2\,(0, b)$ $(a > 0, b > 0)$.
INDICACIÓN. Utilizar la fórmula $x\,dx + y\,dy = r\,dr$.

14. Calcular la integral

$$\int_{(1,2,3)}^{(4,5,6)} x\,dx + z\,dy + y\,dz.$$

Capítulo XXIV

Integrales dobles y triples

§ 1. Noción de integral doble

En la teoría de la integral definida para calcular el área de un trapecio curvilíneo hemos introducido la noción de suma integral cuyo límite es la integral definida (§ 9 del cap. XIV). Resolviendo el problema referente al cálculo del volumen de un cuerpo nos veremos obligados a introducir la noción de **suma integral bidimensional** cuyo límite se llama *integral doble*.

PROBLEMA. Calcular el volumen de un cuerpo limitado por arriba por una superficie continua $z = f(x, y)$ $(f(x, y) \geqslant 0)$, por debajo por un dominio cerrado finito S del plano Oxy y de los costados por una superficie cilíndrica construida sobre la frontera del dominio S y que tiene generatrices perpendiculares al plano Oxy (fig. 245).

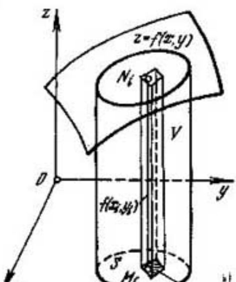

Fig. 245

Un cuerpo semejante se llama, por construcción, *cilindroide*. En el caso particular cuando la base superior del cilindroide es un plano paralelo a su base inferior, el cilindroide se denomina *cilindro*. Como ejemplo de un cilindro se puede citar el cilindro circular que se estudia en la escuela secundaria. Generalizando los razonamientos que se usan por lo común para hallar el volumen de un cilindro, no es difícil mostrar que el volumen V de un cilindro con área de la base S y altura H es igual a $V = SH$.

Para calcular el volumen V de un cilindro dado dividamos su base S en un número finito de regiones elementales ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n (en general curvas). En cada región ΔS_i de éstas elijamos un punto $M_i (x_i, y_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y construyamos una columna cilíndrica recta de base ΔS_i y de altura $M_iN_i = f(x_i, y_i)$ igual al lado de la superficie en el punto elegido. Según la fórmula del volumen del cilindro, el volumen de semejante columna es evidentemente igual a

$$f(x_i, y_i)\,\Delta S_i, \qquad (1)$$

donde ΔS_i[1] es el área de superficie de la región elemental correspondiente. La suma de los volúmenes de estas columnas cilíndricas resulta el volumen de un cuerpo escalonado que reemplaza aproximadamente al cuerpo curvilíneo dado. En este caso, cuanto más pequeños son los diámetros de las regiones ΔS_i, tanto mejor es en general la aproximación. Por eso, el volumen de nuestro cilindroide se expresa aproximadamente por la suma

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i. \tag{2}$$

La fórmula (2) permite calcular el volumen V con la precisión deseable a condición de que el número de regiones ΔS_i sea suficiente-

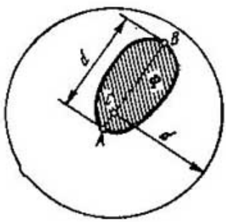

Fig. 246

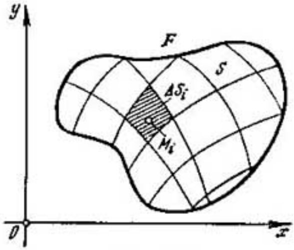

Fig. 247

mente grande y sus dimensiones lineales sean muy pequeñas. Designemos por d_i *el diámetro* de ΔS_i, es decir, su dimensión lineal más grande. Más exactamente por el diámetro d de una figura Φ (longitud del arco, elemento de superficie, etc.) limitada y cerrada (es decir, con su frontera asociada) se entiende la longitud de su cuerda AB más grande, donde $A \in \Phi$ y $B \in \Phi$ (fig. 246)[2]). Se deduce de esta definición que la figura Φ de diámetro d está enteramente encerrada en un círculo de radio d circunscrito a partir de cualquier punto suyo C como del centro. Por eso, si $d \to 0$, la figura Φ «tiende a transformarse en un punto». Se define del mismo modo el diámetro de un cuerpo en el espacio.

Sea $d = \text{máx } d_i$ el mayor de los diámetros de regiones $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Suponiendo que el número n de regiones que intervienen en la fórmula (2) se aumenta indefinidamente ($n \to \infty$) y que el diámetro de la región más grande se vuelve sumamente pequeño ($d \to 0$) obtenemos en el límite una fórmula exacta para el volumen del ci-

---

[1]) Para la comodidad designamos aquí las regiones elementales y sus áreas con las mismas letras. La diferencia entre ellas se aprecia del contexto.

[2]) Las regiones ΔS_i se pueden suponer cerradas.

lindroide

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta S_i{}^{1)}. \tag{3}$$

La expresión que se encuentra en el segundo miembro de la fórmula (3) se llama *integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al dominio S* y se anota del modo siguiente

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta S_i=\iint_S p(x,\ y)\,dS. \tag{4}$$

Por eso para el volumen de cilindroide tenemos finalmente

$$V=\iint_S f(x,\ y)\,dS. \tag{5}$$

Generalizando la construcción utilizada para el cálculo del volumen de un cilindroide, llegamos a las definiciones siguientes.

DEFINICION 1. *Llámase* ***suma integral bidimensional*** (2) *extendida a un dominio dado S de una función dada $f(x, y)$, a la suma de los productos pares de las áreas de las regiones elementales ΔS_i del dominio S por los valores $f(x_i, y_i)$ que la función $f(x, y)$ toma en los puntos elegidos en estas regiones* (fig. 247).

DEFINICION 2. *Llámase* ***integral doble*** (4), *extendida a un dominio dado S de una función $f(x, y)$, al límite de la suma integral bidimensional correspondiente* (2), *cuando el número n de regiones elementales ΔS_i crece infinitamente y su diámetro máximo d tiende a cero siempre que este límite exista y no dependa del modo de subdivisión del dominio S en las ΔS_i ni de la elección de los puntos en estas regiones.*

En la fórmula (4) $f(x, y)$ se denomina *función a integrar o subintegral*; S se llama *dominio de integración* y dS se llama *elemento del área*.

Es justo el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si S es un dominio con la frontera Γ suave a trozos acotada y cerrada*[2] *y la función $f(x, y)$ es continua sobre este dominio S, entonces la integral doble*

$$\iint_S f(x,\ y)\,dS=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta S_i, \tag{6}$$

es decir, el límite de la suma integral bidimensional correspondiente existe y no depende ni del modo de subdivisión del dominio S en las regiones elementales ΔS_i, ni de la elección de los puntos en estas regiones.

En adelante supondremos que las condiciones de este teorema se cumplen.

---

1) Hablando más exactamente, por **definición**, se llama *volumen* del cilindroide al límite (3), si existe.

2) Es decir, la frontera Γ pertenece al dominio S (véase el § 11 del cap. XX).

En la fórmula (6) no es necesario indicar que $n \to \infty$ porque del hecho de que $d \to 0$ se deduce evidentemente que $n \to \infty$.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la integral doble (6) representa el volumen de un cilindroide recto que tiene como base el dominio S y está limitado por arriba por una superficie $z = f(x, y)$ **(interpretación geométrica de la integral doble).**

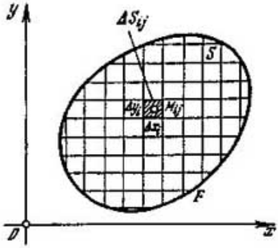

Fig. 248

Como el valor de una integral doble no depende de la naturaleza de las regiones elementales, en adelante, al resolver problemas utilizaremos esta circunstancia eligiendo las redes más convenientes. Resulta que es frecuentemente cómodo utilizar una **red rectangular** formada por la intersección de dos sistemas de rectas paralelas respectivamente a los ejes de las coordenadas Ox y Oy (fig. 248). En este caso las regiones elementales ΔS_{ij}[1]) están representadas por rectángulos de lados Δx_i y Δy_j excepto acaso las regiones adyacentes a la frontera Γ. Para subrayar que se utiliza una red rectangular en la notación de la integral (4) se toma

$$dS = dx\, dy \tag{7}$$

(*elemento bidimensional del área en coordenadas rectangulares*) y se escribe

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \to 0 \\ \max|\Delta y_j| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\, \Delta x_i \Delta y_j, \tag{8}$$

donde $(x_i, y_j) \in \Delta S_{ij}$ y la suma (8) se extiende a todos los valores de i y j para los cuales $\Delta S_{ij} = \Delta x_i\, \Delta y_j$ (se puede mostrar que las regiones elementales no rectangulares que son continuas a la frontera Γ suave a trozos no influyen sobre el valor del límite (8))

En los párrafos que siguen examinaremos los principales procedimientos del cálculo de una integral doble.

§ 2. Integral doble en coordenadas cartesianas rectangulares

Supongamos, para mayor determinación, que la región de integración S es un trapecio curvilíneo (fig. 249)

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \tag{1}$$

[1]) Las regiones elementales tienen aquí índices dobles: i indica el número de la franja vertical; j, el número de la franja horizontal que contiene la región dada, al igual que un billete de teatro donde se indica el número de la fila y el del asiento.

donde $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ son funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$. Este dominio se llama **estándar** respecto al eje Oy. Notemos que la vertical que pasa por el punto x del eje Ox para $a < x < b$ interseca la frontera Γ del dominio S solamente en dos puntos $M_1(x, y_1)$ («punto de entrada») y $M_2(x, y_2)$ («punto de salida»).

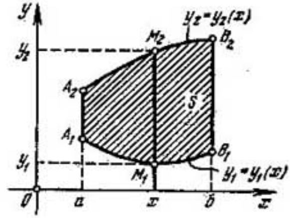

Fig. 249

Sean $f(x, y)$ una función continua sobre un dominio S y

$$I = \iint_S f(x, y)\,dx\,dy \qquad (2)$$

la integral doble de esta función.

1) Supongamos primeramente que $f(x, y) \geqslant 0$ en el dominio S. La integral doble I representa en este caso el volumen del cilindroide (fig. 250) limitado por abajo por el dominio S, por arriba, por una superficie $z = f(x, y)$ y desde los costados por una superficie cilíndrica recta.

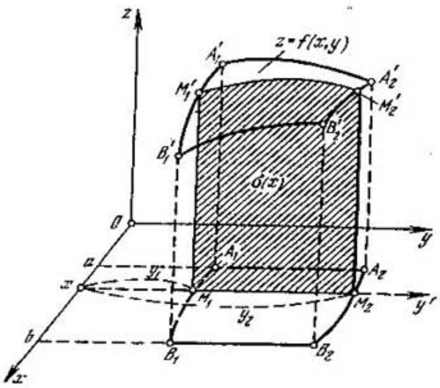

Fig. 250

Apliquemos, para calcular el volumen I, el método de secciones (§ 5 del cap. XV). A saber, sea $\sigma(x)$ el área de la sección del cilindroide por el plano $M_1M_2M_2'M_1'$ perpendicular al eje Ox en su punto $x \in [a, b]$ (fig. 250).

En este caso tenemos

$$I = \int_a^b \sigma(x)\,dx. \tag{3}$$

Pero $\sigma(x)$ es la superficie de un trapecio curvilíneo limitado por abajo por un segmento $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ del eje $O'y' \parallel Oy$ y por arriba, por una curva $z = f(x, y)$, $x = \text{const}$.

Por eso

$$\sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{4}$$

Se puede demostrar que en nuestras condiciones la función $\sigma(x)$ es continua cuando $x \in [a, b]$.

Introduciendo la expresión (4) en la fórmula (3) obtendremos definitivamente

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{5}$$

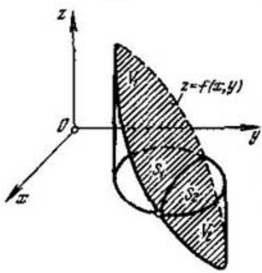

Fig. 251

De este modo la integral doble es igual a **la integral reiterada** correspondiente (5), es decir, el cálculo de la integral doble se reduce a dos cuadraturas. Notemos que calculando la integral interior en la fórmula (5) la variable x se considera como una constante.

2) En el caso en que $z = f(x, y)$ es una función de signo variable, por ejemplo, $f(x, y) \geqslant 0$ para $(x, y) \in S_1$ y $f(x, y) < 0$ para $(x, y) \in S_2$ $(S_1 \cup S_2 = S)$, la integral doble (2) es igual a la **suma algebraica** de los volúmenes V_1 y V_2 de los cilindroides construidos respectivamente sobre las bases S_1 y S_2 (fig. 251):

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = V_1 - V_2 \tag{6}$$

Se puede demostrar que la fórmula (5) resulta también verídica en este caso.

Apuntemos un caso particular importante: sea S un rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$ (fig. 252) y $f(x, y) = X(x)\,Y(y)$, donde $X(x)$ es una función continua en $[a, b]$ que depende solamente de x, y que $Y(y)$ es una función continua en $[A, B]$ dependiente sólo de y. En virtud de la fórmula (5) tenemos

$$\iint_S X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_A^B X(x)\,Y(y)\,dy = \int_a^b X(x)\,dx \int_A^B Y(y)\,dy. \tag{7}$$

Pero la integral interior en la fórmula (7) es un número constante y por eso se puede sacarla de la integral exterior y obtendremos

$$\iint_S X(x)\, Y(y)\, dx\, dy = \int_a^b X(x)\, dx \cdot \int_A^B Y(y)\, dy, \tag{8}$$

es decir, la integral doble (8) es igual al producto de dos integrales simples.

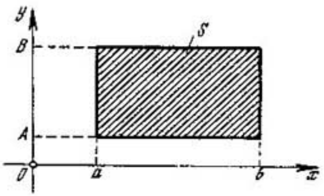

Fig. 252

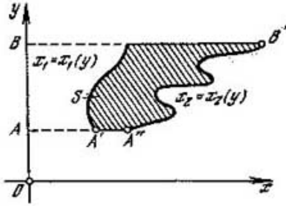

Fig. 253

OBSERVACIÓN 1. Si S es un dominio estándar respecto al eje Ox, es decir, si (fig. 253)

$$A \leqslant y \leqslant B, \quad x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),$$

obtenemos, por analogía con la fórmula (5),

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_A^B dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{9}$$

En particular, si el dominio S es un rectángulo: $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, tenemos

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_A^B f(x, y)\, dy$$

y

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_A^B dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

De aquí obtenemos

$$\int_a^b dx \int_A^B f(x, y)\, dy = \int_A^B dy \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

es decir, *si los límites de integración en la integral reiterada de una función continua son finitos y constantes, el resultado de la integración es independiente del orden de integración.*

OBSERVACIÓN 2. Si el dominio S no es estándar, lo subdividen (si es posible) en un número finito de dominios $S_1, S_2, \ldots, S_p$ estándares respecto a los ejes de coordenadas Ox u Oy y partiendo de las propiedades de límites, se toma

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \ldots + \iint\limits_{S_p},$$

y luego se utilizan las fórmulas (5) ó (9).

EJEMPLO 1. Calcular

$$I = \iint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

donde S es un cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Precisando los límites de integración tendremos

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2)\,dy = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Geométricamente, la integral I representa el volumen de un cilindroide cuya base es un cuadrado y que está limitado por arriba por la parábola de revolución $z = x^2 + y^2$ (fig. 254).

EJEMPLO 2. Calcular la integral doble

$$I = \iint\limits_S xy^2\,dx\,dy,$$

donde S es un rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 3$.

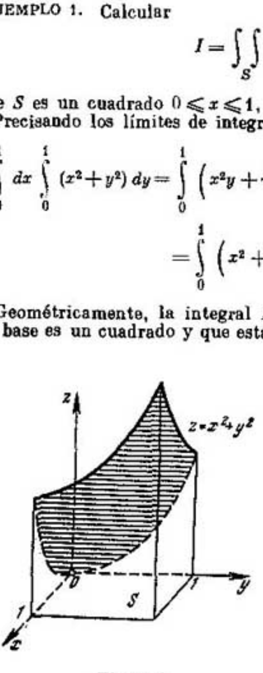

Fig. 254

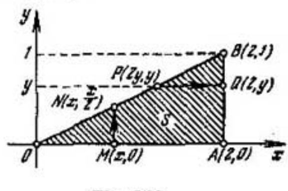

Fig. 255

Introduciendo los límites de integración y separando las variables tendremos

$$I = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_{-2}^{3} y^2\,dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{27+8}{3} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}.$$

EJEMPLO 3. Calcular

$$I=\iint\limits_{S} x^2y\,dx\,dy, \tag{10}$$

donde S es el triángulo de vértices O (0, 0), A (2, 0) y B (2, 1) (fig. 255).

El dominio S está acotado por las rectas $y=0$, $y=\frac{x}{2}$, $x=2$ y es estándar tanto respecto al eje Oy como respecto al eje Ox.

Para la vertical MN el «punto de entrada» en el dominio S es M $(x, 0)$ y el «punto de salida» es $N\left(x, \frac{x}{2}\right)$ $(0<x<2)$. De este modo, cuando x está fijada, la variable y varía en el dominio S de 0 a $\frac{x}{2}$. Por eso integrando en la integral doble (10) primeramente respecto a y para $x=$ constante y después respecto a x tendremos, según la fórmula (5)

$$I=\int_0^2 x^2\,dx\int_0^{x/2} y\,dy=\int_0^2 x^2\,dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}\int_0^2 x^4\,dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=2}=\frac{4}{5}. \tag{11}$$

De un modo análogo, para la horizontal PQ el punto P $(2y, y)$ es el «punto de entrada» en el dominio, y Q $(2, y)$ $(0<y<1)$ es el «punto de salida». Por consiguiente, cuando y está fijada la variable x varía de $2y$ a 2 para los puntos del dominio S. Integrando en la integral doble (10) primeramente respecto a x para $y=$ constante y después respecto a y obtendremos, en virtud de la fórmula (9),

$$I=\int_0^1 y\,dy\int_{2y}^2 x^2\,dx=\int_0^1 y\,dy\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=2y}^{x=2}=\frac{8}{3}\int_0^1 (y-y^4)\,dy=$$

$$=\frac{8}{3}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}. \tag{12}$$

Hemos obtenido, como era de esperar, el mismo resultado, pero el segundo procedimiento de cálculo resultó ser un poco más complicado.

EJEMPLO 4. Invertir el orden de integración en la integral reiterada

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,\ y)\,dy.$$

El dominio de integración S está limitado por las curvas $y=x^2$, $y=x$ y $x=0$, $x=1$ (fig. 256). De donde cambiando los papeles de ejes de coordenadas obtenemos

$$x=\sqrt{y}\geqslant 0,\quad x=y\quad \text{e}\quad y=0,\quad y=1.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,\ y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx.$$

EJEMPLO 5. Colocar los límites de integración en la integral doble

$$I = \iint\limits_{S} f(x,\ y)\,dx\,dy, \tag{13}$$

sabiendo que el dominio de integración S es un anillo circular limitado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ (γ) y $x^2 + y^2 = 4$ (Γ) (fig. 257).

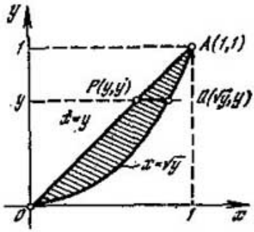

Fig. 256

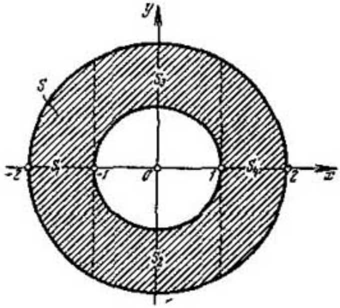

Fig. 257

El dominio S no es estándar. Para definir los límites de integración en la integral (13) partimos el dominio S en cuatro dominios estándares respecto al eje Oy: S_1, S_2, S_3, S_4 como está indicado en la figura. Utilizando las ecuaciones de la circunferencia

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}\ (\gamma) \quad \text{e} \quad y = \pm \sqrt{4 - x^2}\ (\Gamma)$$

tenemos

$$I = \iint\limits_{S_1} f(x,\ y)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2} f(x,\ y)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_3} f(x,\ y)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{S_4} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$$

Disponiendo los límites de integración en otro orden obtendremos una fórmula análoga.

§ 3. Integral doble en coordenadas polares

Sea

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(x, y)\, dS \tag{1}$$

una integral doble en la cual queremos pasar, con los supuestos habituales, a las coordenadas polares r y φ, tomando

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi. \tag{2}$$

Subdividamos el dominio de integración S en regiones elementales ΔS_{ij} con ayuda de líneas de coordenación $r = r_j$ (circunferencias) y $\varphi = \varphi_i$ (rayos) (fig. 258). Introducimos la notación

$$\Delta r_j = r_{j+1} - r_j, \quad \Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i.$$

Como la circunfrencia es perpendicular (ortogonal) a los radios, las regiones interiores ΔS_{ij} pueden ser consideradas con precisión hasta infinitésimos de un orden superior respecto a su superficie como rectángulos de lados $r_j\, \Delta\varphi_i$ y Δr_j; por eso el área de cada región es igual a

$$\Delta S_{ij} \approx r_j\, \Delta\varphi_i\, \Delta r_j. \tag{3}$$

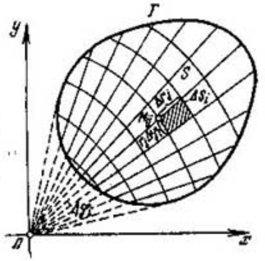

Fig. 258

En cuanto a las regiones ΔS_{ij} de forma irregular, contiguas a la frontera Γ del dominio de integración S, estas regiones no afectarán el valor de la integral doble (compárese con la fórmula (9) del § 1) y por eso las despreciamos.

Para simplificar, tomemos como punto $M_{ij} \in \Delta S_{ij}$ el vértice de la región ΔS_{ij} de coordenadas polares r_j y φ_i. En este caso las coordenadas rectangulares del punto M_{ij} son iguales a

$$x_{ij} = r_j \cos \varphi_i, \quad y_{ij} = r_j \operatorname{sen} \varphi_i$$

y, por consiguiente,

$$f(x_{ij}, y_{ij}) = f(r_j \cos \varphi_i,\ r_j \operatorname{sen} \varphi_i). \tag{3'}$$

La integral doble (1) es el límite de la suma integral bidimensional. Se puede demostrar que las adjunciones a los términos de esta suma son infinitamente pequeñas de orden superior y no influyen sobre el valor del límite. Por eso teniendo en cuenta las fórmulas (3) y (3′) obtenemos

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \lim_{d\to 0} \sum_{i,\,j} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta S_{ij} =$$

$$= \lim_{d\to 0} \sum_{i,\,j}' f(r_j \cos\varphi_i,\ r_j \operatorname{sen}\varphi_i)\, r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j, \qquad (4)$$

donde d es el diámetro máximo de las regiones ΔS_{ij} y la suma se extiende a todas las regiones elementales del tipo indicado arriba que pertenecen enteramente al dominio de integración S. Por otra parte, las magnitudes φ_i y r_j son números y pueden ser considerados como coordenadas cartesianas rectangulares de ciertos puntos del plano $O\varphi r$. De este modo, la suma (4) es una suma integral para la función

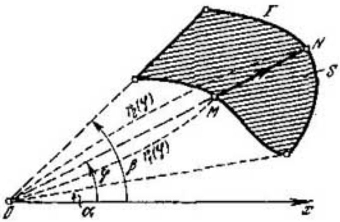

Fig. 259

$$f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\,r$$

correspondiente a la red rectangular con elementos lineales $\Delta\varphi_i$ y Δr_j. Por consiguiente,

$$\lim_{d\to 0} \sum f(r_j \cos\varphi_i,\ r_j \operatorname{sen}\varphi_i)\, r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j =$$

$$= \iint_S f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\, r\,d\varphi\,dr. \qquad (5)$$

Comparando las fórmulas (4) y (5) obtendremos definitivamente

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \iint_S f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\, r\,d\varphi\,dr. \qquad (6)$$

La expresión

$$dS = r\,d\varphi\,dr \qquad (7)$$

se llama *elemento de área bidimensional en coordenadas polares* (compárese con el § 2 del cap. XV). Entonces, *para pasar a las coordenadas polares, en la integral doble* (1) *es suficiente con reemplazar las coordenadas x e y con ayuda de las fórmulas* (2) *e introducir la expresión* (7) *en lugar del elemento de área dS.*

Para calcular la integral doble (6) hace falta reemplazarla por dos integrales simples sucesivas. Supongamos que el dominio de integración S esté definido por las desigualdades

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi),$$

donde $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ son funciones continuas unívocas sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ (fig. 259). Por analogía con las coordenadas rectangulares (véase el § 2) tenemos

$$\iint_S F(r, \varphi)\, d\varphi\, dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi)\, dr, \tag{8}$$

donde

$$F(r, \varphi) = rf(r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi).$$

EJEMPLO 1. Pasando a las coordenadas polares φ y r calcular la integral doble

$$I = \iint_S \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

donde S es el primer cuadrante del círculo de radio $R = 1$ con centro en el punto O (0, 0) (fig. 260).

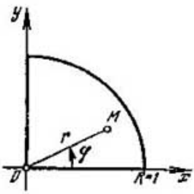

Fig. 260

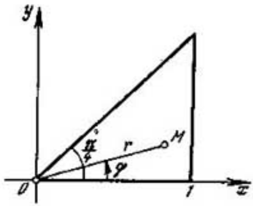

Fig. 261

Puesto que $\sqrt{x^2+y^2} = r$, aplicando la fórmula (6) obtenemos

$$I = \iint_S \frac{r\, d\varphi\, dr}{r} = \iint_S d\varphi\, dr.$$

El dominio S se determina por las desigualdades $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. Por eso, en virtud de la fórmula (8), tenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 2. Pasar a las coordenadas polares en la integral

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy. \tag{9}$$

El dominio de integración es aquí un triángulo S limitado por las rectas $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ (fig. 261).

Las ecuaciones de estas rectas en coordenadas polares se escriben del modo siguiente: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $r \cos \varphi = 1$ y, por consiguiente, el dominio S se define por las desigualdades

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi.$$

De aquí, mediante las fórmulas (6) y (8) teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2+y^2}=r$, tenemos

$$I = \iint_S r \cdot r \, d\varphi \, dr = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sec\varphi} r^2 \, dr.$$

§ 4. Integral de Euler — Poisson

Con ayuda de las coordenadas polares es fácil calcular *la integral de Euler—Poisson*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx, \tag{1}$$

muy importante en la teoría de las probabilidades.

Puesto que la integral definida no depende de la designación de la variable se puede evidentemente escribir también

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy. \tag{2}$$

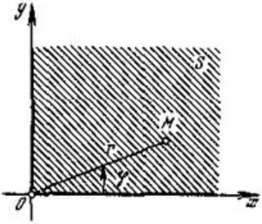

Fig. 262

Multiplicando las fórmulas (1) y (2) y teniendo en cuenta el hecho de que el producto de estas integrales simples puede ser considerado como una integral doble del producto de funciones subintegral (véase la fórmula (8) del § 2) tendremos

$$I^2 = \iint_S e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy, \tag{3}$$

donde el dominio S se define por las desigualdades

$$0 \leqslant x < +\infty, \quad 0 \leqslant y < +\infty$$

y, por consiguiente, representa el primer cuadrante del plano de coordenadas Oxy (fig. 262)[1]).

Pasando la integral (3) a coordenadas polares, obtendremos

$$I^2 = \iint_S e^{-r^2} r \, d\varphi \, dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} re^{-r^2} \, dr =$$

$$= \varphi \,\Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

[1]) Hablando rigurosamente la (3) es una integral impropia que exige una definición especial. Sin embargo, la realización de operaciones formales conduce a resultados correctos.

De aquí, teniendo en cuenta que I es positivo, hallamos

$$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Del hecho de que la función $y=e^{-x^2}$ es par, deducimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

que representa el área de una superficie limitado por el eje Ox y la curva de Gauss $y=e^{-x^2}$ (véase la fig. 120 del § 8 del cap. XI).

§ 5. Teorema de la media

Sea $f(x, y)$ una función continua en un dominio cerrado acotado S, y $m=\min\limits_{S} f(x, y)$, $M=\max\limits_{S} f(x, y)$, respectivamente, los valores más pequeño y más grande que la función $f(x, y)$ toma en el dominio S. Para la suma integral bidimensional de esta función extendida al dominio S tenemos las estimaciones

$$mS\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i\leqslant MS, \tag{1}$$

donde $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i$ es el área del dominio S. De aquí, pasando en las desigualdades (1) al límite cuando $d=\max\limits_{i} d(\Delta S_i)\to 0$ y teniendo en cuenta la existencia de la integral doble, obtendremos

$$mS\leqslant\iint_{S} f(x, y)\,dS\leqslant MS. \tag{2}$$

El número

$$\mu=\frac{1}{S}\iint_{S} f(x, y)\,dS \tag{3}$$

se llama *valor medio* de la función $f(x, y)$ en el dominio S. De las desigualdades (2) se deduce que $m\leqslant\mu\leqslant M$.

La fórmula (3) puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\iint_{S} f(x, y)\,dS=\mu S \tag{4}$$

$(m\leqslant\mu\leqslant M)$. De este modo *la integral doble es igual al valor medio de la función subintegral, multiplicado por el área del dominio de integración.*

No es necesario pensar que la fórmula (4) da un procedimiento universal para calcular una integral doble. Sucede que, como regla, el valor medio de una función se define mediante una integral doble. Por eso tiene aquí sentido real la estimación (2).

EJEMPLO. Estimar la integral

$$I=\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

donde S es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Para la función $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ tenemos

$$m=\min_S f(x,y)=f(0,0)=0 \text{ y } M=\max_S f(x, y)=f(1, 1)=\sqrt{2}.$$

Puesto que $S=1$, tenemos

$$0 \leqslant I \leqslant \sqrt{2}=1{,}41.$$

Se puede considerar que

$$I \approx \frac{1}{2}(0+1{,}41)=0{,}71.$$

Esta estimación es aproximada, porque el valor exacto de la integral es

$$I=\frac{1}{3}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 0{,}79.$$

La evaluación obtenida de la integral I puede ser más exacta, si el dominio de inegración S se divide en partes suficientemente pequeñas y aplicamos a cada una de ellas el teorema de la media.

§ 6. Aplicaciones geométricas de la integral doble

Como hemos mostrado en el § 1 el volumen de un cilindroide recto de base S en el plano de coordenadas Oxy limitado por arriba por una superficie continua $z=f(x, y)$ es igual a

$$V=\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

EJEMPLO 1. Hallar el volumen V de cuerpo limitado por las superficies

$$z=x^2, \quad z=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad x+y=1.$$

El cuerpo buscado tiene como base el triángulo S situado en el plano Oxy y formado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$; este cuerpo está limitado desde arriba por el cilindro parabólico $z=x^2$ (fig. 263). De aquí, en virtud de la fórmula (1), obtendremos

$$V=\iint\limits_S x^2\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2\,dy=\int_0^1 dx\cdot x^2y\,\Big|_{y=0}^{y=1-x}=$$

$$=\int_0^1 x^2(1-x)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Si en la fórmula (1) tomamos

$$f(x, y) \equiv 1,$$

obtendremos el volumen del cilindro de altura $z = 1$ numéricamente igual al área S de su base. Por eso el área de un dominio plano S es igual a

$$S = \iint_S dx\,dy. \tag{2}$$

La fórmula (2) puede ser escrita también de la forma

$$S = \iint_S dS. \tag{3}$$

EJEMPLO 2. Calcular el área de la superficie limitada por las hipérbolas $y = \frac{a^2}{x}$, $y = \frac{2a^2}{x}$ $(a > 0)$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$ (fig. 264).

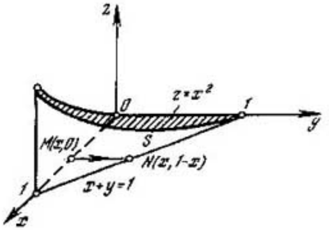

Fig. 263

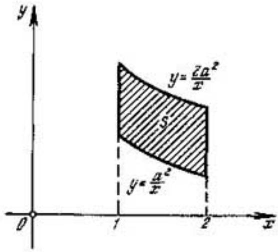

Fig. 264

Aplicando la fórmula (2) obtenemos

$$S = \int_1^2 dx \int_{a^2/x}^{2a^2/x} dy = \int_1^2 \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x}\right) dx = a^2 \int_1^2 \frac{dx}{x} = a^2 \ln x \,|_1^2 = a^2 \ln 2 \approx 0{,}7a^2.$$

§ 7. Aplicaciones físicas de la integral doble

Sea S una placa material. Si ΔS es una parte de la placa S de masa Δm que contiene un punto M, entonces la relación

$$\frac{\Delta m}{\Delta S}$$

se llama *densidad superficial media* del trozo de la placa ΔS, y el límite de esta relación, con la condición de que el diámetro $d(\Delta S) \to 0$, se denomina *densidad superficial* $\rho(M)$ de la placa S

en el punto M:

$$\rho(M)=\lim_{d(\Delta S)\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta S}.$$

La densidad superficial $\rho(M)$ de la placa S es evidentemente función del punto M. Las nociones de densidad superficial media de la placa en un punto dado son enteramente análogas a las nociones de densidad lineal media del arco y de densidad lineal del arco en un punto, expuestas en el § 1 del cap. XXIII.

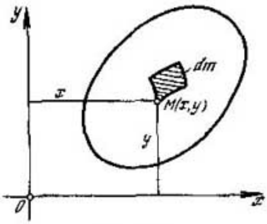

Fig. 265

Supongamos que la densidad superficial de la placa S en el punto corriente $M(x, y)$ es $\rho=\rho(x, y)$, donde $\rho(x, y)$ es una función continua conocida. Examinemos un elemento infinitamente pequeño dS de placa que contiene un punto M (fig. 265). Puesto que en los límites de este elemento la placa puede considerarse como homogénea de densidad ρ, entonces la masa del elemento dS (*masa elemental*) es igual a

$$dm=\rho dS. \tag{1}$$

Integrando la expresión (1) sobre toda la placa S hallamos la *masa de la placa*

$$m=\iint_S \rho\, dS. \tag{2}$$

Examinando dm como un punto material distante de los ejes de coordenadas Ox y Oy, respectivamente, y y x, obtendremos los *momentos estáticos elementales de la placa*

$$dS_x=y\,dm=y\rho(x, y)\,dS$$

y

$$dS_y=x\,dm=x\rho(x, y)\,dS.$$

De aquí, integrando estas expresiones sobre toda la placa S, hallamos los *momentos estáticos de la placa S respecto a los ejes de coordenadas*

$$\left.\begin{aligned} S_x&=\iint_S y\rho(x, y)\,dS,\\ S_y&=\iint_S x\rho(x, y)\,dS.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Se demuestra en mecánica que el momento estático de una placa respecto a un eje cualquiera coincide con el momento estático de una masa puntual igual a la masa de la placa concentrada en su centro de gravedad respecto al mismo eje (*teorema de Varignon*). Designando por (x_0, y_0) las coordenadas del centro de masas de la placa S, tendremos

$$S_y = mx_0, \quad S_x = my_0;$$

y, por consiguiente,

$$x_0 = \frac{S_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y)\,dS, \quad y_0 = \frac{S_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y)\,dS, \qquad (4)$$

donde m es la masa (2) de la placa.

De un modo análogo obtenemos para *los momentos de inercia elementales* de la placa S respecto a los ejes de coordenadas Ox y Oy las expresiones siguientes

$$dI_x = y^2 dm = y^2\rho(x, y)\,dS, \quad dI_y = x^2\,dm = x^2\rho(x, y)\,dS.$$

De aquí, después de la integración sobre la placa S tendremos los *momentos de inercia de la placa S respecto a los ejes de coordenadas*

$$I_x = \iint_S y^2\rho(x, y)\,dS, \quad I_y = \iint_S x^2\rho(x, y)\,dS. \qquad (5)$$

El momento de inercia polar elemental se determina por la fórmula

$$dI_0 = r^2\,dm = (x^2 + y^2)\,\rho\,(x, y)\,dS,$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$ es el cuadrado de la distancia de la masa dm al origen de las coordenadas. Integrando la última expresión sobre la placa S obtenemos *el momento de inercia polar de la placa*

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2)\,\rho\,(x, y)\,dS. \qquad (6)$$

De las fórmulas (5) y (6) se deduce que

$$I_0 = I_x + I_y. \qquad (7)$$

Tomando $\rho\,(x, y) \equiv 1$ en las fórmulas de los momentos obtendremos los momentos de inercia correspondientes de la figura geométrica S. Recordemos que para el cálculo en coordenadas cartesianas rectangulares se supone habitualmente que $dS = dx\,dy$, y en el caso de coordenadas polares tenemos $dS = r\,d\varphi\,dr$.

EJEMPLO 1. Determinar las coordenadas del centro de masas de una placa cuadrada S: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$ cuya densidad superficial en el punto $M\,(x, y)$ es igual a $\rho = x + y$.

Aplicando la fórmula (2) hallamos la masa de la placa

$$m=\iint\limits_S \rho\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 (x+y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=\int\limits_0^2 (2x+2)\,dx=(x^2+2x)\Big|_{x=0}^{x=2}=8.$$

Mediante la fórmula (3) determinamos los momentos estáticos de la placa S respecto a los ejes de las coordenadas

$$S_x=\iint\limits_S y\rho\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 (xy+y^2)\,dy=\int\limits_0^2 dx\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=$$

$$=\int\limits_0^2\left(2x+\frac{8}{3}\right)dx=\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=4+\frac{16}{3}=9\,\frac{1}{3},$$

$$S_y=\iint\limits_S x\rho\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 (x^2+xy)\,dy=\int\limits_0^2 dx\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=$$

$$=\int\limits_0^2 (2x^2+2x)\,dx=\left(\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=\frac{16}{3}+4=9\,\frac{1}{3}.$$

La igualdad de los momentos S_x y S_y puede ser prevista en razón de la simetría del problema.

Según las fórmulas (4) el centro de masas de la placa S tiene las coordenadas

$$x_0=\frac{S_y}{m}=\frac{28}{3\cdot 8}=\frac{7}{6}=1\,\frac{1}{6},$$

$$y_0=\frac{S_x}{m}=1\,\frac{1}{6}.$$

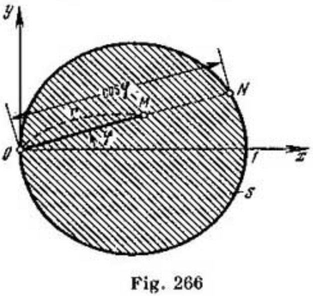

Fig. 266

EJEMPLO 2. Hallar el momento de inercia I_x respecto al eje Ox de la superficie del círculo S: $x^2+y^2\leqslant x$ (fig. 266).

Suponiendo que $\rho=1$ obtenemos en virtud de la primera fórmula (5)

$$I_x=\iint\limits_S y^2\,dS. \tag{8}$$

Resolvemos este problema en coordenadas polares. Tenemos

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\operatorname{sen}\varphi$$

y

$$dS=r\,d\varphi\,dr.$$

La ecuación de la frontera Γ del dominio S es

$$x^2+y^2=x.$$

De donde pasando a las coordenadas polares obtendremos

$$r^2=r\cos\varphi.$$

Por consiguiente al simplificar por el factor no esencial r tenemos

$$r=\cos\varphi.$$

Como $r\geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. De este modo para cada $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ fijado el radio r varía en los límites de $0\leqslant r\leqslant\cos\varphi$. Pasando a las coordenadas polares en la fórmula (8) obtendremos

$$I_x=\iint_S r^2\operatorname{sen}^2\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\,dr=\frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi.$$

Como se sabe

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\quad\text{y}\quad\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi=\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\varphi,$$

por eso

$$I_x=\frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\varphi\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{32}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2\varphi\,d\varphi+\frac{1}{32}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2\varphi\cos 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{64}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{64}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2\varphi\,d(\operatorname{sen}2\varphi)=$$

$$=\frac{1}{64}\left(\varphi-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{64}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 2}{3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{64}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-0\right)+0=\frac{\pi}{64}.$$

§ 8. Noción de integral triple

Por analogía con la integral doble se define la llamada *integral triple*. Sea V un dominio cerrado acotado dado en un espacio cartesiano $Oxyz$ y sea $f(x, y, z)$ una función acotada definida en V. Dividamos el volumen V en un número finito de regiones elementales ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n y en cada una de ellas elijamos un punto

$$M_i(x_i, y_i, z_i)\in\Delta V_i\quad(i=1, 2, \ldots, n)$$

(fig. 267). La suma

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i,\tag{1}$$

donde ΔV_i es el volumen de la i-ésima región, se llama *suma integral tridimensional.*

Designemos por d el diámetro mayor de las regiones ΔV_i[1]. Por subdivisiones sucesivas del dominio V haremos decrecer indefinidamente los volúmenes de ΔV_i. En este caso, el límite de la suma integral (1) cuando $d \to 0$, si este límite existe y no depende de la forma de las regiones elementales ΔV_i, ni de la elección de los puntos M_i en estas regiones, se llama *integral triple de la función $f(x, y, z)$ extendida al dominio V* y se designa del modo siguiente

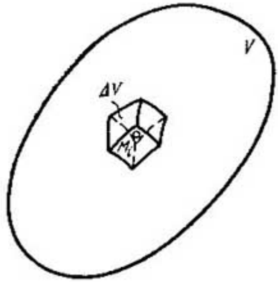

Fig. 267

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i. \qquad (2)$$

Se demuestra que la integral triple (2) existe, si la función subintegral $f(x, y, z)$ es continua en el dominio de integración V cerrado acotado, cuya frontera es suave a trozos.

Si el dominio V está repleto de masa y si $f(x, y, z)$ representa una densidad volumétrica continuamente repartida en el punto corriente $M(x, y, z)$, entonces $f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$, donde $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ representa con exactitud de un infinitésimo de un orden superior al volumen máximo de ΔV_j $(j = 1, \ldots, n)$, es la masa de la región elemental ΔV_i. Por consiguiente, la suma integral (1) es aproximadamente igual a la masa m que rellena el dominio V. Cuando $d \to 0$ resulta que el límite de la suma S_n será igual a la masa m. De aquí deducimos *la interpretación* **física** *de la integral triple*: si $f(x, y, z)$ es la densidad continua de repartición de la masa en el espacio $Oxyz$, entonces la integral triple

$$m = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV \qquad (3)$$

representa la masa que rellena el dominio de integración V. En el caso particular cuando la densidad $f(x, y, z) \equiv 1$, la masa del dominio V es numéricamente igual a su volumen. Por eso, el volumen del dominio V se expresa por una integral triple

$$V = \iiint\limits_V dV. \qquad (4)$$

[1] Sobre la noción de diámetro véase el § 1.

Si la integral triple (2) se calcula en coordenadas rectangulares x, y, z se toman para ΔV_{ijk} paralelepípedos rectangulares de lados Δx_i, Δy_j, Δz_k y de caras paralelas a los planos de las coordenadas, es decir, se considera que

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k.$$

En este caso *el elemento de volumen* dV se considera igual a

$$dV = dx\,dy\,dz \tag{5}$$

(*elemento de volumen en coordenadas rectangulares*) y la integral triple (2) se escribe de la forma siguiente

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

En particular, para el volumen de un cuerpo obtenemos la fórmula

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \tag{6'}$$

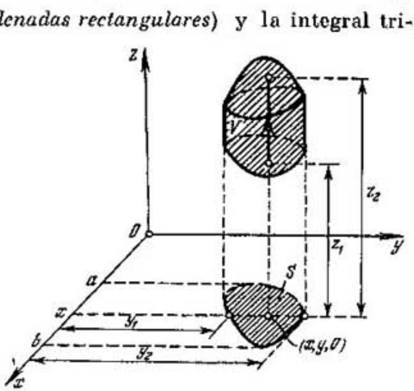

Fig. 268

En el caso más simple, el cálculo de la integral triple (6) se reduce **a tres cuadraturas.** A saber, supongamos que el dominio de integración V es estándar respecto al eje Oz (compárese con el § 2), es decir, está limitado por abajo y por arriba, respectivamente, por las superficies continuas unívocas

$$z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y),$$

y que la proyección del dominio V sobre el plano de coordenadas Oxy es un dominio plano S (fig. 268).

De aquí resulta que para valores fijos $(x, y) \in S$ los lados correspondientes z de los puntos del dominio V varían dentro de los límites de $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$. Por analogía con la integral doble (§ 6), tendremos

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{7}$$

Además, si la proyección S es estándar respecto al eje Oy y se define por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones continuas unívocas en el segmento $[a, b]$, entonces

$$\iint_S dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (8)$$

De las fórmulas (7) y (8) obtenemos definitivamente

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (9)$$

De este modo el cálculo de la integral triple se reduce al cálculo de tres cuadraturas.

Notemos que si el dominio de integración V es estándar respecto a todos los ejes de coordenadas Ox, Oy y Oz, los límites de integración para la integral triple (6) pueden ser puestos de $3! = 6$ procedimientos diferentes.

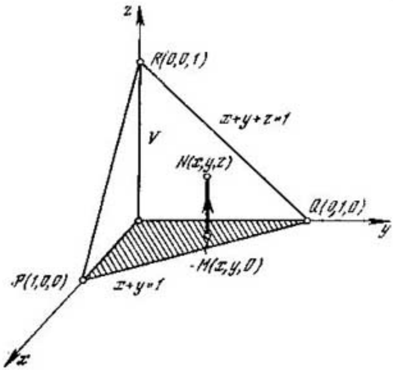

Fig. 269

EJEMPLO Calcular la integral

$$I = \iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la pirámide $OPQR$ limitada por los planos siguientes:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$
$$x + y + z = 1$$

(fig. 269).

La proyección del dominio V sobre el plano de coordenadas $Oxyz$ es el triángulo S limitado por las rectas

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$$

Para $(x, y) \in S$ la z-coordenadas de los puntos $(x, y, z) \in V$ satisfacen la desigualdad $0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$. Por eso

$$I = \iint_S xy\,dx\,dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \iint_S xy\,dx\,dy \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_S xy\,(1 - x - y)^2\,dx\,dy.$$

Introduciendo los límites de integración para el triángulo S obtendremos

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y\left[(1-x)^2-2(1-x)\,y+y^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^1 x\left[(1-x)^2\cdot\frac{y^2}{2}-2(1-x)\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^4\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)dx=\frac{1}{24}\int_0^1\{1-(1-x)\}(1-x)^4\,dx=$$

$$=\frac{1}{24}\left\{\int_0^1(1-x)^4\,dx-\int_0^1(1-x)^5\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{24}\left[-\frac{(1-x)^3}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=1}+\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right]=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{720}.$$

El número I representa la masa de la pirámido V, si su densidad en el punto corriente $M(x, y, z)$ es igual $\rho = xyz$.

EJERCICIOS

1. Calcular las integrales reiteradas siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_2^5\frac{x}{y^2}\,dy$; b) $\displaystyle\int_{-1}^0 dx\int_0^1 e^{x-y}\,dy$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r\,\mathrm{sen}^2\varphi\,dr$.

2. Dibujar el dominio de integración y calcular las integrales reiteradas siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{x+y}\,dy$, b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dy\int_y^{y+y^2} xy\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\varphi} r\cos\varphi\,dr$.

3. Poner los límites de integración en los dos órdenes en la integral doble $\displaystyle\iint_S f(x, y)\,dx\,dy$ para los dominios de integración siguientes:

a) S es el triángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$;
b) S es el trapecio de vértices $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 1)$;

c) S es el cuarto del círculo $x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;
d) S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y=x^2$, $y=4$;
e) S es el círculo $x^2+y^2\leqslant 2x$.

4. Invertir el orden de integración en las integrales reiteradas siguientes:

a) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy$; b) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\,dx$; c) $\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\,dx$.

5. Pasar a las coordenadas polares y poner los límites de integración en las integrales dobles siguientes:

a) $\iint\limits_S x^2y\,dx\,dy$, donde S es el sector circular limitado por las líneas $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=-x$ $(y\geqslant 0)$;

b) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, donde S es el triángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(2, -1)$, $B(2, 1)$;

c) $\iint\limits_S f(x+y)\,dx\,dy$, donde S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y=x$ e $y=x^2$.

6. Calcular las integrales dobles siguientes:

a) $\iint\limits_S (x+y)\,dx\,dy$, donde S es el triángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$;

b) $\iint\limits_S xy^2\,dx\,dy$, donde S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y^2=x$, $x=1$;

c) $\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{(y+1)^2}$, donde S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y=1-x^2$, $y=0$;

d) $\iint\limits_S \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$, donde S es el segmento hiperbólico limitado por las líneas $xy=4$, $x+y=5$.

7. Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales dobles:

a) $\iint\limits_S \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, donde S es el círculo $x^2+y^2\leqslant\pi^2$;

b) $\iint\limits_S \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, donde S es el triángulo limitado por las rectas $y=x$, $y=-x$, $y=1$.

8. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies

a) $z=\sqrt{1-y^2}$, $z=0$, $y=x$, $x=0$;
b) $z=2-x-y$, $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$;
c) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $y^2=x$, $x=1$;
d) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=2x$;
e) $z=\frac{c}{a}x$, $z=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(z\geqslant 0)$.

9. Hallar los momentos de inercia de una placa redonda homogénea $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ respecto a los ejes Ox y Oy.

10. Determinar las coordenadas del centro de masas de una placa homogénea limitada por las curvas $ay = x^2$, $y = a$.

11. Calcular

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\, dz.$$

12. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = y^2$, $z = 2y^2$, $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 3$.

Capítulo XXV

Fundamentos de la teoría de las probabilidades

A. DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

§ 1. Sucesos aleatorios

En las ciencias naturales el estudio de la realidad objetiva se realiza por intermedio de pruebas (experimentos) u observaciones, es decir, con ayuda de la experiencia en el sentido amplio de esta palabra. En el caso general se entiende por ensayo (observación) **la existencia de un conjunto determinado de condiciones.** Un resultado posible, es decir, el resultado de un ensayo o de una observación, se llama *suceso*, independiente de su importancia.

Para poder formular la teoría de las probabilidades, se idealizan los sucesos, es decir, no se toman en consideración situaciones que no son esenciales para el fenómeno dado.

EJEMPLO. Cuando se lanza una moneda ésta puede caer de cara o cruz. De este modo, para un solo ensayo son posibles dos sucesos: el A, la moneda cae de cara, y el B, la moneda cae de cruz.

Sin embargo, es posible otro suceso C, cuando la moneda cae de canto. Mas para el juego de cara y cruz esta última situación no es esencial (¡la moneda se lanza otra vez!) y en nuestro ensayo idealizado este suceso no se toma en consideración.

DEFINICION 1. *El resultado de un ensayo que no puede ser previsto de antemano se llama* ***suceso aleatorio.***

En otras palabras, en un ensayo dado un suceso es aleatorio, si no se puede predecir de antemano si tendrá o no lugar en esta prueba.

Por ejemplo, la caída de cara de una moneda es un suceso aleatorio, a condición de que el ensayo está organizado de modo que su resultado no se conozca de antemano.

En numerosos casos un suceso aleatorio es el resultado de una información incompleta sobre el fenómeno dado. Por ejemplo, si en la prueba de lanzar una moneda son conocidos: la fuerza del empuje, la forma de la moneda, la ley de resistencia del aire, así como los restantes factores que determinan la ley de movimiento de la moneda, podríamos calcular exactamente el resultado del ensayo.

DEFINICION 2. *Un suceso se llama* ***cierto (seguro)*** *en un ensayo dado (es decir, cuando se cumple un conjunto bien determinado de condiciones), si él tiene lugar inevitablemente durante este ensayo.*

Por ejemplo, la obtención en el examen por parte de un estudiante de una nota positiva o negativa es un suceso cierto, si el examen está organizado según las reglas habituales.

DEFINICIÓN 3 *Un suceso se llama* ***imposible*** *en un ensayo dado, si él con seguridad no se realiza durante este ensayo.*

Por ejemplo, si una urna contiene solamente bolas de color (no blancas), la extracción de esta urna de una bola blanca es un suceso imposible. Notemos que si la prueba se realiza en otras condiciones la aparición de una bola blanca no se excluye; de este modo este suceso es imposible solamente en las condiciones de nuestro ensayo.

La teoría de las probabilidades es la ciencia que estudia las leyes de los sucesos aleatorios.

Gracias al desarrollo técnico son muy interesantes las leyes estáticas de **sucesos aleatorios homogéneos masivos** (control de la calidad de la producción, servicio de la fabricación en serie, funcionamiento de una central telefónica, etc.). Aquí en diversas variantes se establece el teorema fundamental de la teoría de probabilidades que se conoce bajo el nombre la «ley de grandes números».

Tomemos como axioma el hecho de que para cada suceso A se puede determinar, por lo menos teóricamente, la probabilidad de este suceso, es decir, del número $P(A)$ que representa en un cierto sentido la «medida de autenticidad» de este suceso y que obedece a exigencias naturales. Se supone que la probabilidad de cualquier suceso satisface la desigualdad

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

siendo la probabilidad de un suceso imposible igual a cero, mientras que la probabilidad de un suceso cierto es igual a la unidad.

En la práctica se considera que un suceso es prácticamente imposible, si su probabilidad es pequeña; por el contrario, un suceso se considera como casi cierto, si su probabilidad es próxima a la unidad; sobre esta base se toman decisiones justificadas.

La teoría de las probabilidades fue desarrollada en los trabajos de numerosos grandes matemáticos (Pascal, Fermat, Laplace, Gauss, Poisson y otros). Más tarde, resultados fundamentales fueron obtenidos en esta ciencia por matemáticos rusos (Chebyshev, Markov, Liapunov, Bernstein, Kolmogorov, Jinchin y otros).

La teoría de las probabilidades se utiliza ampliamente en las ciencias puras (teóricas) y aplicadas (física, geodesia, balística, mando automático, etc.). En particular ella sirve de base teórica a la estadística matemática y a la estadística aplicada, sobre las cuales a su vez se basan la planificación y la organización de la producción.

§ 2. Algebra de sucesos

Cada ensayo está relacionado con una serie de sucesos que nos interesan y los cuales pueden en general manifestarse simultáneamente. Por ejemplo, cuando lanzan un dado (es decir, un cubo pequeño cuyas caras están numeradas de 1 a 6) el suceso A es cuando aparece el 1 y el suceso B cuando aparece un número impar. Es evidente que estos dos sucesos no se excluyen mutuamente.

Supongamos que todos los resultados posibles de un ensayo se realizan bajo la forma de una serie de **casos particulares** que se excluyen mutuamente (los llamados *sucesos elementales* o *resultados elementales*). En este caso: 1) cada resultado del ensayo se representa por un solo suceso elemental; 2) todo suceso A relacionado con este ensayo es un conjunto de un número finito o infinito de sucesos elementales; 3) el suceso A se realiza si, y sólo si, se realiza uno de los sucesos elementales pertenecientes a este conjunto.

EJEMPLO 1 Supongamos que el suceso A consiste en que el dado da un número impar en un solo lanzamiento.

Aquí para los sucesos elementales se pueden tomar los resultados siguientes del ensayo: (1), (2), (3), (4), (5), (6). El suceso A es el conjunto de sucesos $\{(1), (3), (5)\}$.

Por analogía con la teoría de conjuntos (véase el § 1) se construye una álgebra de sucesos.

DEFINICIÓN 1 *Se llama **suma** de dos sucesos A y B al suceso*

$$A + B \equiv A \cup B$$

que tiene lugar si, y solo si, se cumple por lo menos uno de los sucesos A o B.

En el general se llama *suma de varios sucesos* a un suceso que consiste en realización por lo menos de uno de estos sucesos.

EJEMPLO 2 Sea que el suceso A es un premio de una lotería I y que el suceso B es un premio de una lotería II. En este caso, el suceso $A + B$ es un premio por lo menos en una de las loterías (es posible que se ganen los dos premios a la vez).

DEFINICION 2 *Se llama **producto** de dos sucesos A y B a un suceso*

$$AB \equiv A \cap B$$

compuesto de la realización simultánea de los sucesos A y B.

En el caso general, se llama *producto de varios sucesos* a un suceso que corresponde a la realización simultánea de todos estos sucesos.

EJEMPLO 3 Sean A y B los sucesos que consisten en la aprobación respectiva de las rondas I y II del examen de ingreso a una escuela superior. En este caso, el suceso AB es la aprobación de ambas rondas.

Los dos sucesos A y B se denominan *incompatibles* en un ensayo dado si el producto de ellos es un suceso imposible, es decir, si

$$AB = O,$$

donde O es un suceso imposible.

En otras palabras, dos sucesos son incompatibles, si la realización de uno de ellos excluye la realización del otro, y viceversa.

§ 3. Definición clásica de la probabilidad

Sea A un suceso que representa un cierto resultado de un ensayo y sea

$$E_1, E_2, \ldots, E_n \tag{1}$$

un sistema finito de sucesos elementales posibles y de los incompatibles sólo posibles de par en par de este ensayo (*sistema completo de sucesos elementales*). De este modo, el suceso A tiene lugar si, y sólo si, se realizan ciertos sucesos pertenecientes al sistema (1) (resultados **favorables o que favorecen** la realización, o como también se lo llama **chance** para el suceso A).

Supongamos que los sucesos del sistema (1) son *equiposibles*, es decir, no hay razón para suponer que uno de los sucesos del sistema (1) tiene mayores posibilidades de producirse que otro. A veces esto se puede establecer utilizando la «propiedad de simetría».

DEFININCIÓN 1. *Se llama* ***probabilidad*** $P(A)$ *de un suceso* A, *a la relación del número de todos los resultados elementales de posibilidades iguales favorables al suceso* A, *al número total de todos los resultados elementales equiposibles del ensayo dado.*

De este modo, si m es el número de resultados elementales favorables al suceso A y n es el número total de resultados elementales de un ensayo dado, y todos estos resultados son equiposibles, se puede escribir por definición la fórmula siguiente

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{2}$$

Puesto que es evidente que $0 \leqslant m \leqslant n$, tenemos

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \tag{3}$$

es decir, *la probabilidad de cualquier suceso es un número no negativo, no superior a la unidad.*

OBSERVACIÓN. De la definición de probabilidad resulta que los sucesos elementales que tienen la misma posibilidad de producirse son *equiprobables*, es decir, ellos poseen una misma probabilidad.

De la definición de probabilidad se deducen sus propiedades fundamentales siguientes:

1. *La probabilidad de un suceso imposible es igual a cero.*

Efectivamente, si un suceso A es imposible, el número de resultados elementales favorables a este suceso $m = 0$ y tenemos

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$

2. *La probabilidad de un suceso cierto es igual a la unidad.*

Evectivamente, si un suceso A es cierto, es evidente que $m = n$ y, por consiguiente,

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$

Enunciemos algunos teoremas elementales sobre probabilidades.

DEFINICIÓN 2 *Dos sucesos A y B se llaman* ***equivalentes***:

$$A = B,$$

si cada uno de ellos se realiza cada vez cuando se produce el otro.

Desde el punto de vista de la teoría de las probabilidades, semejantes sucesos se consideran iguales.

Por ejemplo, si una urna contiene solamente bolas blancas y negras, entonces la aparición de una bola negra y de una bola no blanca, son sucesos equivalentes.

TEOREMA 1. *Los sucesos equivalentes tienen una misma probabilidad, es decir, si $A = B$, entonces*

$$P(A) = P(B). \tag{4}$$

Efectivamente, cada resultado elemental para el suceso A es el mismo que para el suceso B, y viceversa. En virtud de la fórmula (2) es justa la igualdad (4).

DEFINICIÓN 3 *Se dice que un suceso A* ***implica*** *otro suceso B ($A \Rightarrow B$), si B se realiza cada vez cuando se realiza A.*

Por ejemplo, para cualesquiera sucesos A y B tenemos $AB \Rightarrow A$ y $AB \Rightarrow B$.

TEOREMA 2. *Si $A \Rightarrow B$, entonces*

$$P(A) \leqslant P(B). \tag{5}$$

Efectivamente, supongamos que los sucesos A y B están incluidos en un sistema común de resultados elementales equiprobables y que m y m' son los números de los resultados elementales favorables respectivamente para el suceso A y para el suceso B y n es el número total de resultados elementales. Como cada resultado elemental para el suceso A es también un resultado elemental para el suceso B, $m \leqslant m'$ y, por consiguiente,

$$P(A) = \frac{m}{n} \leqslant \frac{m'}{n} = P(B)$$

y de este modo la desigualdad (5) está demostrada.

DEFINICIÓN 4. *Un suceso $\bar{A}$ se llama* ***contrario*** *a otro suceso A, si el primero se realiza cuando no se cumple el suceso A.*

Por ejemplo, cuando se lanza una moneda el suceso A es «cara» y el $\bar{A}$ es «no cara» o sea «cruz».

De la definición 4 se deduce que: 1) el suceso $A + \bar{A}$ es cierto; 2) el suceso $A\bar{A}$ es imposible.

TEOREMA 3 *La probabilidad de un suceso contrario $\bar{A}$ es igual a la diferencia entre la unidad y la probabilidad del suceso A dado*, es decir:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{6}$$

Efectivamente, supongamos que el sistema completo de resultados elementales equiprobables contiene n sucesos de los cuales m ($m \leqslant n$) son favorables al suceso A. En este caso $n - m$ resultados elementales son desfavorables al suceso A, es decir, favorecen al suceso $\bar{A}$. De este modo, tenemos

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

Daremos algunos ejemplos sobre el cálculo directo de la probabilidad de los sucesos

EJEMPLO 1. Una moneda se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad para que: 1) caiga «cara» por lo menos una sola vez (suceso A); 2) caiga «cara» dos veces (suceso B)?

Aquí los resultados elementales equiprobables son: CC, CCr, CrC, CrCr, su número es $n = 4$.

Los resultados favorables al suceso A son: CC, CCr, CrC; su número es $m = 3$. Por consiguiente

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

Al suceso B le favorece un solo resultado CrCr ($m' = 1$). Por eso

$$P(B) = \frac{m'}{n} = \frac{1}{4}.$$

EJEMPLO 2. Un dado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea igual a 6 (suceso A)?

Los resultados elementales equiprobables son aquí los pares (x, y), donde x e y toman los valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6; el número total de resultados elementales es $n = 36$.

Los pares favorables al suceso A son (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), su número es $m = 5$.

Por consiguiente,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}.$$

§ 4. Definición estadística de la probabilidad

La definición clásica de la probabilidad de un suceso supone que: 1) el número de resultados elementales sea finito; 2) estos resultados tengan la misma posibilidad de ser obtenidos.

Pero en la práctica se encuentran pruebas que tienen un número infinito de resultados posibles. Además no hay métodos generales que permitan representar el resultado de un ensayo, incluso si él posee un número finito de resultados, bajo la forma de una suma de resultados elementales equiprobables.

Por eso el uso de la definición clásica es limitado.

Daremos ahora otra definición de probabilidad que es a veces más cómoda para las aplicaciones.

Supongamos que se efectúan n ensayos de un mismo tipo, uno de cuyos resultados es un suceso dado A.

DEFINICIÓN 1. *Se llama* ***frecuencia relativa*** *de un suceso A a la relación del número de ensayos m, de casos en que el suceso A se cumple, respecto al número total n de ensayos efectuados.*

De este modo, designando por $W_n(A)$ la frecuencia relativa del suceso A en una serie de n ensayos, tendremos

$$W_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Es evidente que $0 \leqslant W_n(A) \leqslant 1$.

De la fórmula (1) obtenemos

$$m = W_n(A)\, n, \tag{2}$$

es decir, *el número de manifestaciones del suceso A es igual a su frecuencia relativa multiplicada por el número de ensayos.*

En numerosos casos cuando el ensayo se repite un gran número de veces se observa una **estabilidad de la frecuencia relativa del suceso**, es decir, cuando el número de ensayos $n \to \infty$, la frecuencia relativa $W_n(A)$ del suceso A oscila alrededor de cierto número finito p y las desviaciones que ella presenta respecto a este número son tanto más pequeñas cuanto mayor es el número de ensayos efectuados, si se descartan ciertos ensayos fallidos. Este número p se llama **probabilidad del suceso A en el sentido estadístico.**

DEFINICIÓN 2. ***Se llama probabilidad de un suceso en el sentido estadístico***, *a un límite casi cierto de la frecuencia relativa cuando el número de ensayos aumenta infinitamente.*

De este modo es casi cierto que la frecuencia relativa de un suceso coincide aproximadamente con su probabilidad estadística, si el número de ensayos es suficientemente grande.

De este punto de vista la magnitud

$$\mu = np \tag{3}$$

representa **el valor medio** del número de manifestaciones del suceso A en una serie de n ensayos.

Partiendo de amplios supuestos se demuestra que las dos probabilidades, clásica y estadística, coinciden.

EJEMPLO. Como resultado de una serie de ensayos se constata que disparando 200 tiros el tirador da en el blanco por término medio 190 veces. ¿Cuál es la probabilidad p de que este tirador dé en el blanco de un solo tiro? ¿Qué número de tiros darán en el blanco si el tirador efectúa 1000 disparos?

Utilizando la definición estadística de la probabilidad tenemos

$$p=\frac{190}{200}=0{,}95=95\%.$$

De donde el valor aproximado del número de tiros acertados en 1000 disparos, será

$$\mu = 1000\cdot 0{,}95 = 950.$$

§ 5. Teorema de adición de probabilidades

TEOREMA. *La probabilidad de la suma de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de estos sucesos,* es decir, si $AB = 0$,

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea n el número total de resultados elementales equiprobables de un ensayo dado, de los cuales m_1 son favorables a un suceso A y m_2, a un suceso B. Los sucesos A y B son incompatibles, la realización de A excluye la de B, y viceversa; por eso el número de resultados favorables al suceso $A + B$ es exactamente igual a $m_1 + m_2$. De aquí, en virtud de la definición clásica de la probabilidad obtenemos

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

COROLARIO. *La probabilidad de la suma de un número finito de sucesos incompatibles de par en par, es igual a la suma de las probabilidades de estos sucesos.*

Sean, por ejemplo, A, B y C tres sucesos incompatibles de par en par, es decir, los sucesos AB, AC, BC son imposibles.

Tenemos

$$P(A + B + C) = P[(A + B) + C] = P(A + B) + P(C) = $$
$$= P(A) + P(B) + P(C).$$

OBSERVACIÓN. Sean ahora A y B dos sucesos compatibles. El número de resultados elementales favorables al suceso $A + B$ será

$$m = m_1 + m_2 - m',$$

donde m' es el número de resultados elementales favorables al suceso AB. Efectivamente, adicionando los números m_1 y m_2 de resultados favorables a los sucesos A y B, contamos dos veces el número de resultados favorables al suceso AB; por consiguiente, contando el número de resultados para el suceso $A + B$ es conveniente rechazar el valor superfluo de m'.

Por eso, en el caso general, tenemos

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-m'}{n}=$$
$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{m'}{n}=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (2)$$

COROLARIO. *Puesto que $P(AB)\geqslant 0$, de la fórmula (2) tenemos*

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B), \quad (3)$$

es decir, la probabilidad de la suma de dos sucesos no supera nunca la suma de las probabilidades de estos sucesos.

Es evidente que esta aseveración es también justa en el caso de varios sucesos.

EJEMPLO. Una urna contiene 10 bolas de igual dimensión pero de colores distintos: 2 blancas, 3 rojas y 5 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que una bola sacada al azar sea de color (no blanca)?

Sean el suceso A: «sacar una bola roja» y el suceso B: «sacar una bola azul». En este caso, el suceso $A+B$ es: «sacar una bola de color». Es evidente que

$$P(A)=\frac{3}{10}, \quad P(B)=\frac{5}{10}.$$

Como los sucesos A y B son incompatibles (se saca una sola bola), en virtud del teorema de adición de probabilidades, tenemos

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=0{,}8.$$

§ 6. Grupo completo de sucesos

DEFINICIÓN. *Un sistema de sucesos*

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \quad (1)$$

se llama ***grupo completo de sucesos*** *para el ensayo dado, si todo resultado de este ensayo es la realización de un solo suceso de este grupo.*

En otras palabras para el sistema completo de eventualidades se cumplen las condiciones siguientes:

1) el suceso $A_1+A_2+\ldots+A_n$ es cierto;

2) los sucesos A_i y A_j $(i\neq j)$ son incompatibles de par en par, es decir, $A_iA_j=O$ $(i\neq j)$, donde O es un suceso imposible.

El ejemplo más simple de grupo completo de sucesos es un par de sucesos: A y $\bar{A}$.

TEOREMA. *La suma de las probabilidades de los sucesos de un grupo completo es igual a la unidad.*

DEMOSTRACIÓN. Para el grupo completo (1) el suceso $A_1+A_2+\ldots+A_n=D$ es cierto y los sucesos de este sistema son incompatibles de par en par. Aplicando el teorema de adición de probabilidades tenemos

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \quad (2)$$

Pero,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(D) = 1,$$

de donde, en virtud de la (2), nos queda

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

§ 7. Teorema de multiplicación de probabilidades

DEFINICIÓN 1. *La probabilidad del suceso A a condición de que ha tenido lugar el suceso B se llama* ***probabilidad condicional*** *del suceso A y se connota así:*

$$P(A/B) = P_B(A). \quad (1)$$

OBSERVACIÓN. La probabilidad de cada suceso A en un ensayo dado está ligada con un cierto conjunto de condiciones. Al definir la probabilidad condicional, suponemos que este conjunto de condiciones incluye **necesariamente** el suceso B. De este modo, tenemos de hecho otro conjunto de condiciones más complejo que corresponde al ensayo en una nueva situación. La probabilidad de que el suceso A se realice en estas nuevas condiciones se llama **probabilidad condicional** $P_B(A)$ a diferencia de la probabilidad $P(A)$ que puede ser llamada **probabilidad incondicional** del suceso A.

EJEMPLO. Una urna contiene 7 bolas blancas y 3 bolas negras.

¿Cuál es la probabilidad: 1) de sacar de la urna una bola blanca (suceso A); 2) de sacar de la urna una bola blanca después de haber sacado de ella una bola blanca (suceso B) o una bola negra (suceso C)?

Aquí

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7 \quad P_B(A) = \frac{6}{9} = 0{,}666\ldots;$$

$$P_C(A) = \frac{7}{9} = 0{,}777\ldots .$$

De este modo, la probabilidad condicional de un suceso puede ser tanto inferior como superior a la probabilidad de este suceso.

DEFINICIÓN 2. *Dos sucesos A y B se llaman* ***independientes***, *si la probabilidad de cada uno de ellos no depende de la realización o no realización del otro*, es decir

$$P(A) = P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) \quad (2)$$

y

$$P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B). \quad (2')$$

En caso contrario los sucesos se llaman *dependientes*.

TEOREMA 1. *La probabilidad del producto (compatibilidad) de dos sucesos A y B es igual a la probabilidad de uno de ellos multiplicada por la probabilidad condicional del otro suponiendo que el primer* *suceso se realiza, es decir,*

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{3}$$

DEMOSTRACION. Sea n el número total de resultados elementales equiprobables de un ensayo; de los cuales m son favorables al suceso A y k lo son al suceso AB. En este caso

$$P\ (A) = \frac{m}{n}, \quad P\ (AB) = \frac{k}{n}. \tag{4}$$

Pero si el suceso A se ha producido en esta situación son solamente posibles aquellos de m resultados elementales que han sido favorables al suceso A, y k de ellos son evidentemente favorables al suceso B. De este modo

$$P_A\ (B) = \frac{k}{m}.$$

De donde, en virtud de las igualdades (4), tenemos

$$P\,(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P\,(A)\,P_A\,(B). \tag{5}$$

El teorema ha sido demostrado.

Puesto que $BA = AB$, tenemos también

$$P\ (AB) = P\ (BA) = P\ (B) \cdot P_B\ (A). \tag{6}$$

OBSERVACIÓN. De modo formal, la fórmula (5) sigue siendo justa si el suceso A es imposible.

COROLARIO. *Para dos sucesos cualesquiera A y B es justa la igualdad*

$$P\ (A)\ P_A\ (B) = P\ (B)\ P_B\ (A). \tag{7}$$

TEOREMA 2 *La probabilidad de la realización simultánea de dos sucesos independientes A y B es igual al producto de las probabilidades de estos dos sucesos:*

$$P\ (AB) = P\ (A)\ P\ (B). \tag{8}$$

Efectivamente, considerando que $P_A\ (B) = P\ (B)$, de la fórmula (5) obtenemos la fórmula (8).

EJEMPLO. La probabilidad de que el primer tirador dé en el blanco (suceso A) es igual a 0,9 y que el segundo tirador lo haga (suceso B) es igual a 0,8. ¿Cuál es la probabilidad para que por lo menos uno de los tiradores dé en el blanco?

Sea C el suceso que nos interesa; la probabilidad contraria $\overline{C}$ consiste evidentemente en que ambos tiradores no han dado en el blanco. De este modo, $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$. Puesto que las eventualidades $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes (durante el tiro cada uno de los tiradores no molesta al otro), entonces

$$P\ (\overline{C}) = P\ (\overline{A}) \cdot P\ (\overline{B}) = [1 - P\ (A)] \cdot [1 - P\ (B)] =$$
$$= (1 - 0{,}9) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

De donde se deduce que la probabilidad de que por lo menos uno de los tiradores dé en el blanco es

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

El teorema 1 admite una generalización en el caso de varios sucesos. Por ejemplo, para el caso de tres sucesos A, B y C, tenemos

$$P(ABC) = P[A\cdot(BC)] = P(A)\cdot P_A(BC) = \\ = P(A)\,P_A(B)\,P_{AB}(C). \quad (9)$$

DEFINICIÓN 3. *Los sucesos se llaman* ***independientes en conjunto*** *si cada uno de ellos y cualquier producto de los restantes (incluyendo todos los otros sucesos o una parte de ellos) son sucesos independientes.*

Los sucesos independientes en conjunto son independientes de par en par; la afirmación recíproca es falsa.

TEOREMA 3. *La probabilidad del producto de un número finito de sucesos independientes en conjunto es igual al producto de las probabilidades de estos sucesos.*

Efectivamente, por ejemplo, para tres sucesos A B y C independientes en conjunto de la fórmula (9) y teniendo en cuenta que

$$P_A(B) = P(B), \quad P_{AB}(C) = P(C),$$

tenemos

$$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C),$$

etc.

§ 8. Fórmula de la probabilidad total

Sea A un suceso que puede ocurrir como resultado de aparición de uno y único suceso H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de un sistema completo de sucesos incompatibles

$$H_1, H_2, \ldots, H_n.$$

Los sucesos de este sistema se llaman generalmente **hipótesis**.

TEOREMA. *La probabilidad del suceso A es igual a la suma de los productos pares de las probabilidades de todas las hipótesis que forman un sistema completo, por las probabilidades condicionales correspondientes del acontecimiento dado A*, es decir:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P_{H_i}(A) \quad (1)$$

(fórmula de la probabilidad total), además aquí

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1. \quad (2)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA,$$

y que los sucesos H_1A, H_2A, ..., H_nA son incompatibles debido a que son incompatibles las eventualidades H_1, H_2, ..., H_n, la aplicación de los teoremas de adición y de multiplicación de probabilidades nos da

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_iA)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P_{H_i}A,$$

lo que se deseaba demostrar.

EJEMPLO. Una tienda recibe para la venta productos de tres fábricas cuyas partes relativas son: I:50%, II:30%, III:20%. El porcentaje de artículos defectuosos en la producción de estas fábricas es: I:2%, II:3% y III:5%. ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo comprado al azar sea de buena calidad (suceso A)?

Aquí son posibles las tres hipótesis siguientes: H_1, H_2, H_3, es decir, el artículo comprado es producto de las fábricas I, II y III respectivamente; es evidente que estas hipótesis forman un sistema completo y que sus probabilidades son

$$P(H_1)=0{,}5,\quad P(H_2)=0{,}3,\quad P(H_3)=0{,}2.$$

Las probabilidades condicionales correspondientes del suceso A son iguales a

$$P_{H_1}(A)=1-0{,}02=0{,}98,\quad P_{H_2}(A)=1-0{,}03=0{,}97,$$
$$P_{H_3}(A)=1-0{,}05=0{,}95.$$

Aplicando la fórmula de probabilidades totales tenemos

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}98+0{,}3\cdot 0{,}97+0{,}2\cdot 0{,}95=0{,}971.$$

§ 9. Fórmula de Bayes

Examinemos el siguiente problema: sea dado un sistema completo de hipótesis incompatibles

$$H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n,$$

cuyas probabilidades $P(H_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ son conocidas antes del experimento **(probabilidades a priori)**. Se efectúa el experimento (prueba) de cuyos resultados se registra la realización de un suceso A, se sabe que nuestras hipótesis atribuyen a esta eventualidad probabilidades bien determinadas $P_{H_i}(A)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Se pide determinar las probabilidades de estas hipótesis después del experimento **(probabilidad a posteriori)**.

Por ejemplo, es evidentemente conveniente rechazar las hipótesis que no admiten la realización del suceso A. El problema consiste generalmente en modificar la estimación de las probabilidades de nuestras hipótesis en función de una nueva información.

En otras palabras tenemos que determinar las probabilidades condicionales

$$P_A\ (H_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

En virtud del teorema de multiplicación de probabilidades tenemos

$$P\ (AH_i) = P\ (A) \cdot P_A\ (H_i) = P\ (H_i) \cdot P_{H_i}\ (A);$$

de donde

$$P_A\,(H_i) = \frac{P\,(H_i)\,P_{H_i}\,(A)}{P\,(A)} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Para hallar la probabilidad $P\ (A)$ se puede utilizar la fórmula de probabilidades totales

$$P\ (A) = \sum_{j=1}^{n} P\,(H_j)\,P_{H_j}(A). \tag{2}$$

De donde se deduce la fórmula de probabilidades de la hipótesis después del experimento (*fórmula de Bayes*)

$$P_A\,(H_i) = \frac{P\,(H_i)\,P_{H_i}\,(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\,(H_j)\,P_{H_j}\,(A)} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

EJEMPLO. Dos piezas antiaéreas disparan independientemente una de la otra a un avión. Cada pieza efectúa un solo disparo. La probabilidad de dar en el avión es de 0,2 para la primera pieza (suceso A) y es de 0,1 para la segunda pieza (suceso B). El avión ha sido alcanzado por un solo tiro (suceso C). ¿Cuál es la probabilidad de que este tiro haya sido efectuado por la primera pieza?

Antes del experimento son posibles cuatro hipótesis: $H_1 = AB$, $H_2 = A\bar{B}$, $H_3 = \bar{A}B$, $H_4 = \bar{A}\bar{B}$; estas hipótesis forman un sistema completo de sucesos. Sus probabilidades cuando las piezas tiran independientemente son respectivamente iguales a

$$P\ (H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02, \qquad P\ (H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18,$$
$$P\ (H_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08, \qquad P\ (H_4) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72,$$

Además, $P\ (H_1) + P\ (H_2) + P\ (H_3) + P\ (H_4) = 1$.

Las probabilidades condicionales del suceso observado C con estas hipótesis serán

$$P_{H_1}\ (C) = 0, \quad P_{H_2}\ (C) = 1, \quad P_{H_3}\ (C) = 1, \quad P_{H_4}\ (C) = 0.$$

Por consiguiente, las hipótesis H_1 y H_4 se rechazan; las probabilidades de las hipótesis H_2 y H_4 se calculan mediante la fórmula de Bayes

$$P_C\,(H_2) = \frac{0{,}18 \cdot 1}{0{,}18 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} \approx 0{,}7, \quad P_C\,(H_3) = \frac{0{,}08 \cdot 1}{0{,}18 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} \approx 0{,}03.$$

De este modo, se puede afirmar con una probabilidad igual aproximadamente a 0,7 que el tipo acertado ha sido efectuado por la primera pieza.

B. PRUEBAS INDEPENDIENTES REPETIDAS

§ 10. Elementos de análisis combinatorio

Examinemos un conjunto de n elementos diferentes $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$. Una **muestra** aleatoria ordenada (puede ser con repetición) de estos elementos

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m} \; (1 \leqslant \alpha_k \leqslant n;\; k = 1, \ldots, m)$$

se llama *agrupación*.

Por ejemplo, al arrojar una moneda 10 veces, para su caída de lado cara (C) y de lado cruz (Cr) se puede dar la siguiente agrupación

CCCCCrCrCCrCrCr.

DEFINICION 1. *Llámanse* ***variaciones (arreglos)*** *de n elementos respecto a (tomados de) m ($m \leqslant n$) a sus agrupaciones, cada una de las cuales contiene exactamente m elementos diferentes (elegidos entre los elementos dados) y que difieren por la naturaleza de los propios elementos, o por el orden de éstos.*

Calculemos el número A_n^m de variaciones (arreglos) de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ respecto a m.

Sean $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m}$ variaciones de todo tipo que contienen m elementos. Construiremos estas variaciones paso a paso. Determinemos primeramente el primer elemento a_{α_1}. Es evidente que en el conjunto de n elementos puede ser elegido por n procedimientos diferentes. Después de elegir el primer elemento a_{α_1} el segundo elemento a_{α_2} puede ser elegido mediante $n-1$ procedimentos, etc. Como cada elección semejante da una nueva variación, todas estas elecciones pueden ser libremente combinadas. Por eso tenemos

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \ldots [n-(m-1)]. \tag{1}$$

Introduciendo la notación de *factorial* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, se puede escribir la fórmula (1) de la forma siguiente

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2}$$

DEFINICION 2. *Llámanse* ***permutaciones*** *a las agrupaciones de n elementos cada una de las cuales contiene todos los n elementos y que difieren solamente en el orden de éstos.*

Es evidente que el número de permutaciones de n elementos es igual a

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \ldots [n-(n-1)] = n!. \tag{3}$$

Se considera condicionalmente (por definición) que $0! = 1$.

DEFINICIÓN 3. *Llámanse* ***combinaciones*** *de n elementos respecto a* (tomados de) *m a aquellas agrupaciones que contiene exactamente m elementos y que difieren por lo menos en un elemento.*

Designemos por C_n^m el número de combinaciones de n elementos respecto a m.

Examinemos todas las combinaciones posibles de nuestros elementos

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m}.$$

Efectuando en cada una de ellas $m!$ permutaciones posibles de sus elementos obtendremos evidentemente todas las variaciones de n elementos respecto a m. De este modo la fórmula

$$C_n^m \cdot m! = A_n^m;$$

de donde

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ [n-(m-1)]}{m!}. \qquad (4)$$

La fórmula (4) puede ser escrita así:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (5)$$

El símbolo C_n^m posee una propiedad evidente

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad (6)$$

que es también justa para $m = 0$, si consideramos que $C_n^0 = 1$.

Los números C_n^m son coeficientes en la fórmula *del binomio de Newton*

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + q^n$$

y por eso se llaman frecuentemente *coeficientes binomiales* (compárese con el § 5 del cap. XI).

EJEMPLO. Un lote de 10 piezas contiene una pieza no estándar. ¿Cuál es la probabilidad de que la elección al azar de 5 piezas tomadas de este lote sean estándares (suceso A)?

Aquí el número de todas las elecciones aleatorias $n = C_{10}^5$, mientras que el número de elecciones favorables al suceso A es $m = C_9^5$. De este modo, la probabilidad buscada es igual a

$$P(A) = \frac{C_9^5}{C_{10}^5} = \frac{9!}{5!\,4!} \cdot \frac{5!\,5!}{10!} = \frac{1}{2}.$$

§ 11. Ley binomial de distribución de las probabilidades

Un suceso A se llama **independiente** en un sistema dado de ensayos, si la probabilidad de este suceso en cada uno de los ensayos no depende de los resultados de otros ensayos.

Una sucesión de repeticiones independientes de ensayos, en cada uno de los cuales el suceso A tiene igual probabilidad $P(A) = p$ que no depende del número del ensayo, se llama *esquema de Bernoulli*.

De este modo en el esquema de Bernoulli cada ensayo tiene solamente dos resultados: 1) el suceso A («éxito») y 2) el suceso $\overline{A}$ («fracaso») que se producen con probabilidades constantes $P(A) = p$ y $P(\overline{A}) = q$; es evidente que $p + q = 1$.

Examinemos un problema: calcular en las condiciones del esquema de Bernoulli la probabilidad $P_n(m)$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ de que en n ensayos el suceso A, que tiene una misma probabilidad $P(A) = p$ para cada ensayo por separado, se produzca exactamente m veces.

Las series de ensayos favorables son aquí de la forma

$$A_{\alpha_1}A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_n},$$

donde $A_{\alpha_i} = A$ o $\overline{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, además, el suceso A se repite exactamente m veces y el suceso $\overline{A}$ exactamente $(n - m)$ veces. Como los ensayos son independientes, la probabilidad de la realización de una serie favorable es igual a

$$p^m q^{n-m},$$

donde $p = P(A)$, $q = P(\overline{A}) = 1 - p$. Todas las series favorables se obtienen como resultado de la elección de m números diferentes de ensayos del número total de n números y, por consiguiente, su número es igual a C_n^m. De aquí, aplicando el teorema de adición de probabilidades para el caso de sucesos incompatibles obtenemos *la fórmula de Bernoulli*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m} \tag{1}$$

para la probabilidad de la realización de la eventualidad A exactamente m veces en el curso de n ensayos.

Esta fórmula se llama también *binomial*, porque su segundo miembro representa el $(m + 1)$-ésimo término del binomio de Newton

$$(q + p)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n.$$

De aquí deducimos la **distribución binomial de las probabilidades** (véase el § 15) del número de repeticiones del suceso A durante n ensayos independientes:

$$1 = (q + p)^n = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n). \tag{2}$$

EJEMPLO. Hallar la probabilidad de que en 10 lanzamientos de una moneda caiga cara exactamente 5 veces.

Aquí la probabilidad de que la moneda caiga cara en un solo ensayo es

$$p=\frac{1}{2}, \quad \text{de donde} \quad q=1-p=\frac{1}{2}.$$

Aplicando la fórmula de Bernoulli tenemos

$$P_{10}(5)=C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}\approx 0{,}25.$$

§ 12. Teorema local de Laplace

Si el número de ensayos n es grande, los cálculos por medio de la fórmula de Bernoulli resultan difíciles de realizar. Laplace propuso una fórmula aproximada importante que permite calcular la probabilidad $P_n(m)$ para que un suceso A se realice exactamente m veces, si n es un número suficientemente grande.

TEOREMA DE LAPLACE *Sea $p = P(A)$ la probabilidad de un suceso A tal que $0 < p < 1$. En este caso, la probabilidad para que en las condiciones del esquema de Bernoulli el suceso A se produzca en el transcurso de n ensayos exactamente m veces, se expresa por la fórmula aproximada de Laplace*

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-t^2/2}, \tag{1}$$

donde

$$q=1-p \quad \text{y} \quad t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \tag{2}$$

Está demostrado que el error relativo del valor obtenido con ayuda de la fórmula (1) tiende a cero cuando $n\to\infty$. La demostración de este teorema se da en cursos completos de la teoría de probabilidades.

En el sentido estadístico $\mu = np$ representa el valor medio del número de repeticiones m del suceso A en el transcurso de n ensayos; de este modo $m - np$ es la desviación del número de repeticiones de la eventualidad A respecto a su valor medio. En lo que se refiere a la expresión $\sigma=\sqrt{npq}$, su sentido que se da en la teoría de probabilidades será explicado más tarde (véase el § 18). Examinando σ como una cierta escala de desviaciones en n ensayos, el número t puede ser interpretado como la desviación entre el número de repeticiones de la eventualidad A y su valor medio medido en esta escala.

Introduciendo la función

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \tag{3}$$

(sus valores pueden ser hallados en las tablas) se puede escribir la fórmula (1) en la forma

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{4}$$

Puesto que la función $\varphi_0(t)$ decrece monótonamente cuando $|t| \to \infty$, para una misma serie de ensayos (n está fijado) las desviaciones $m - np$ grandes en valor absoluto son menos probables que las pequeñas. Esta afirmación es claramente justa para un número suficiente grande de ensayos n, porque la fórmula aproximada de Laplace ha sido obtenida teniendo en cuenta esta hipótesis.

EJEMPLO. La probabilidad de dar en el blanco por un tirador, con un solo disparo, es igual a $p = 0,2$. ¿Cuál es la probabilidad para que el blanco sea batido exactamente 20 veces en 100 disparos?

Aquí $p = 0,2$, $q = 0,8$, $n = 100$ y $m = 20$, de donde

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4,$$

y, por consiguiente,

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0,2}{4} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\varphi_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,40$ la fórmula (1) nos da

$$P_{100}(20) \approx 0,40 \cdot \frac{1}{4} = 0,10.$$

No hay que asombrarse de que el valor de la probabilidad sea pequeño: 20 impactos exactamente en 100 disparos es un suceso relativamente raro. Un suceso casi cierto es aquí dar en el blanco **aproximadamente** 20 veces. Por ejemplo, la probabilidad P de la desigualdad $15 \leqslant m \leqslant 25$ que incluye 11 valores de $m = 15, 16, \ldots, 24, 25$ es próxima a la unidad. Se puede verificarlo calculando esta probabilidad por la fórmula

$$P = \sum_{k=15}^{25} P_{100}(k).$$

§ 13. Teorema integral de Laplace

Tratemos de calcular la probabilidad $P_n(m_1, m_2)$ de que en n ensayos de Bernoulli el número de repeticiones de un suceso A de probabilidad $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$ no sea inferior a m_1 ni superior a m_2 veces.

En virtud del teorema de adición de probabilidades en el caso de sucesos incompatibles, obtendremos

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m). \qquad (1)$$

De aquí, utilizando el teorema local de Laplace tendremos aproximadamente

$$P_n(m_1, m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0(t_m), \qquad (2)$$

donde

$$t_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \quad (m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \tag{3}$$

y

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{4}$$

Tenemos

$$\Delta t_m = t_{m+1} - t_m = \frac{(m+1)-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

y, por consiguiente,

$$P_n(m_1,\ m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \varphi_0(t_m)\,\Delta t_m. \tag{5}$$

La suma (5) es integral para la función $\varphi_0(t)$ sobre el intervalo $t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}$. Cuando $n \to \infty$, es decir, cuando $\Delta t_m \to 0$ su límite es, la integral definida correspondiente. Por eso, suponiendo que n es suficientemente grande obtenemos la fórmula aproximada

$$P_n(m_1,\ m_2) \approx \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{6}$$

donde

$$t_{m_1} = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}, \quad t_{m_2} = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Este es el contenido del *teorema integral de Laplace*. Introducimos *la integral estándar de probabilidades (función de Laplace)*

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{7}$$

que es evidentemente la primitiva de la función $\varphi_0(x)$.

En este caso, en virtud de la fórmula de Newton—Leibniz tendremos de la (6)

$$P_n\ (m_1,\ m_2) \approx \Phi_0\ (t_{m_2}) - \Phi_0\ (t_{m_1}). \tag{8}$$

La fórmula (8) da el valor aproximado de la probabilidad para que el número m de repeticiones del suceso A en el transcurso de n ensayos satisfaga la desigualdad $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$ y, por consiguiente, la variable aleatoria t satisface la desigualdad $t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}$. Esta fórmula se escribe frecuentemente así:

$$P\ (m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = P\ (t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}) \approx \Phi_0\ (t_{m_2}) - \Phi_0\ (t_{m_1}) \tag{8'}$$

(*fórmula integral de Laplace*).

La integral $\Phi_0(x)$ no se expresa por medio de funciones elementales; para su cálculo se utilizan tablas especiales que se hallan generalmente en cursos completos de la teoría de probabilidades.

Citamos una parte de esa tabla.

Tabla de valores de la función $\Phi_0(x)$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\Phi(x)$	0	0,192	0,341	0,433	0,477	0,494	0,499

La función $\Phi_0(x)$ (fig. 270) posee las propiedades siguientes 1) $\Phi_0(0) = 0$; 2) $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$ (véase el § 4 del cap. XXIV); 3) la función $\Phi_0(x)$ es impar, es decir, $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ (por eso

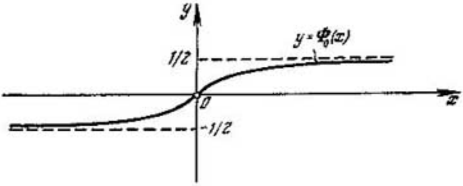

Fig. 270

no es necesario indicar en la tabla los valores de la función $\Phi_0(x)$ para valores negativos del argumento), en particular, $\Phi_0(-\infty) = -\frac{1}{2}$; 4) $\Phi_0(x)$ es una función monótonamente creciente (esto resulta del hecho de que $\Phi_0'(x) = \varphi_0(x) > 0$). Para $x > 3$ se puede admitir que $\Phi_0(x) = 0{,}500$ con exactitud de hasta milésimos.

EJEMPLO. **La probabilidad de batir el blanco disparando un solo tiro de cañón es igual a $p = 0{,}2$. ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea batido no menos de 20 veces con una descarga de 100 cañones?**

Aquí $n = 100$, $20 \leqslant m \leqslant 100$. Tenemos

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4.$$

De donde

$$t_{20} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}2}{4} = 0$$

y

$$t_{100} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}2}{4} = 20.$$

Aplicando la fórmula (8) obtenemos

$$P(20 \leqslant m \leqslant 100) = \Phi_0(20) - \Phi_0(0) = 0{,}500 - 0 = 0{,}500.$$

PROBLEMA. Hallar en las condiciones del esquema de Bernoulli la probabilidad de que la desviación entre la frecuencia $\frac{m}{n}$ de un suceso A y su probabilidad $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$ no sea en valor absoluto superior a un número dado $\varepsilon > 0$.

Designaremos esta probabilidad por la notación

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

De la desigualdad

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon \tag{9}$$

obtenemos una desigualdad equivalente

$$|m - np| \leqslant n\varepsilon, \quad \text{o bien} \quad -n\varepsilon \leqslant m - np \leqslant n\varepsilon.$$

De aquí, considerando que

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

tendremos

$$-t_1 = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \leqslant t \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = t_1.$$

Mediante la fórmula (8'), teniendo en cuenta el hecho de que la función $\Phi_0(x)$ es impar, hallamos

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = P(-t_1 \leqslant t \leqslant t_1) = \Phi_0(t_1) - \Phi_0(-t_1) =$$

$$= 2\Phi_0(t_1) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Como $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$, $2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

De este modo, *en las condiciones del esquema de Bernoulli por más pequeña que sea* $\varepsilon > 0$ *se puede esperar con una probabilidad tan próxima como se quiera a la unidad que para un número n de ensayos suficientemente grande la desviación* (9) *entre la frecuencia de repeticiones del suceso A y su probabilidad será inferior, en valor absoluto, al número* ε (***ley de «grandes números»*** en la forma de Bernoulli).

§ 14. Teorema de Poisson

Supongamos que se efectúan n ensayos sucesivos independientes $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ y que la probabilidad de la realización de un suceso dado A en esta serie $P(A) = p_n > 0$ depende de su número n y tiende a cero cuando $n \to \infty$ (sucesión de **«sucesos raros»**). Supongamos también que en cada serie de ensayos el valor medio del número de repeticiones del suceso A es constante:

$$np_n = \mu = \text{const}; \tag{1}$$

de donde

$$p_n = \frac{\mu}{n}. \tag{2}$$

En virtud de la fórmula binomial (§ 11) para la probabilidad de una manifestación del suceso A en la n-ésima serie, exactamente m veces, tenemos la expresión

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m}. \tag{3}$$

Sea m dado y $n \to \infty$. En este caso,

$$C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ [n-(m-1)]}{m!\,n^m}\,\mu^m =$$

$$= \frac{\mu^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{m-1}{n}\right) \to \frac{\mu^m}{m!}.$$

Además (véase el § 12 del cap. VII), teniendo en cuenta que

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\alpha \to 0} (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-1},$$

tenemos

$$\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = \left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}\right]^{\mu}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-m} \to e^{-\mu}\cdot 1 = e^{-\mu},$$

si $n \to \infty$.

De este modo, pasando al límite en la fórmula (3) cuando $n \to \infty$, obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}. \tag{4}$$

Si n es grande, la probabilidad $P_n(m)$ difiere tan poco como se quiera de su límite (4). De aquí, para la probabilidad buscada $P_n(m)$ tenemos la *fórmula* aproximada *de Poisson* cuando los valores de n son grandes

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}, \tag{5}$$

donde $\mu = np_n$ (*teorema de Poisson*).

En general, la fórmula de Poisson puede ser aplicada en los casos cuando el número de ensayos n es «grande», la probabilidad de la eventualidad $p_n = p$ es «pequeña» y $\mu = np$ es «ni pequeño, ni grande».

La fórmula de Poisson halla aplicaciones en **la teoría de las colas.**

EJEMPLO. En la producción en masa de un cierto producto la probabilidad de obtener un artículo no estándar es de 0,01. ¿Cuál es la probabilidad para que en un lote de 100 artículos se hallen 2 unidades no estándares?

Aquí la probabilidad $p = 0{,}01$ es pequeña y el número $n = 100$ es grande, entonces

$$\mu = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1.$$

Aplicando la ley de Poisson a la probabilidad buscada obtendremos el valor siguiente

$$P_{100}(2) \approx \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0{,}184.$$

C. VARIABLE ALEATORIA Y SUS CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS

§ 15. Variable aleatoria discreta y su ley de distribución

Una variable se llama *aleatoria*, si ella adquiere sus valores según los resultados de un ensayo (de un experimento), además, para cada resultado elemental su valor es único. Una variable aleatoria se llama *discreta* (en sentido estricto), si el conjunto de sus valores posibles es **finito.**

Geométricamente el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar una variable *aleatoria* discreta representa un sistema finito de puntos del eje numérico.

Sea X una variable aleatoria discreta cuyos únicos valores posibles son los números

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Designemos por

$$p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

las probabilidades de estos valores (es decir, p_i es la probabilidad para que X tome el valor x_i).

Los sucesos $X = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ forman evidentemente un sistema completo de eventualidades por eso

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \tag{1}$$

DEFINICION. *Llámase* ***ley de distribución*** *de una variable aleatoria discreta a toda relación que establece una correspondencia entre todos los valores posibles de esta variable y sus probabilidades.*

En los casos más simples la ley de distribución de una variable aleatoria discreta X puede ser cómodamente dada por una tabla:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Aquí la primera fila contiene todos los valores posibles que puede tomar la variable aleatoria y la segunda fila, sus probabilidades.

Notemos que, si fuese necesario, la tabla de valores de una variable aleatoria discreta X puede siempre ser completada, de un modo formal, por un conjunto finito de números cualesquiera considerando que sus valores X tengan probabilidades nulas.

EJEMPLO 1. En una lotería de 10 000 billetes hay 1 premio de 1000 rublos, 10 premios de 100 rublos y 100 premios de 1 rublo. Hallar la ley de repartición del premio aleatorio X para el poseedor de un solo billete de lotería.

Aquí los valores posibles de X son:

$$x_1 = 1000, \quad x_2 = 100, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0.$$

Sus probabilidades respectivas son:

$$p_1 = 0{,}0001, \quad p_2 = 0{,}001, \quad p_3 = 0{,}01, \quad p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) \approx 0{,}9889$$

La ley de distribución del premio X puede ser dada por la tabla:

X	1000	100	1	0
p	0,0001	0,001	0,01	0,9889

EJEMPLO 2. El número m de repeticiones de un suceso A en el transcurso de n ensayos independientes puede ser considerado como una variable aleatoria X que puede tomar los valores $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. La ley de distribución de esta variable está dada por la fórmula binomial

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

donde $p = P(A)$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p$ (distribución binomial)

En particular, si p es pequeño y n es grande y que $pn = \mu$ es una magnitud limitada colocada entre dos números positivos fijos, es justa la repartición de Poisson aproximada

$$p_m = P(X = m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

§ 16. Esperanza matemática

DEFINICIÓN. *Llámase **esperanza matemática** de una variable aleatoria discreta a la suma de los productos pares de todos sus valores por sus probabilidades.*

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un juego (completo) de todos los valores de una variable aleatoria discreta X y $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las probabilidades que les corresponden, entonces designando por la letra

M la esperanza matemática tendremos

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{1}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{2}$$

Es evidente que la esperanza matemática de una variable aleatoria X no será modificada, si la tabla de valores de esta variable se completa de un conjunto finito de cualquier número, considerando que las probabilidades de estos números son iguales a cero.

La esperanza matemática $M(X)$ de una variable aleatoria X es una magnitud constante y por eso ella representa la **característica numérica de esta variable** X.

EJEMPLO. Hallar la esperanza matemática del premio X en el ejemplo 1 del § 15.

Utilizando la tabla que allá figura tenemos

$$M(X) = 1000 \cdot 0{,}0001 + 100 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}9889 = 0{,}21 \text{ rublo} = 21 \text{ kopeks}.$$

Es fácil comprender que $M(X) = 21$ kopeks es el precio «equitativo» del billete.

OBSERVACIÓN 1. Algunos términos $x_i p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de la suma (1) son las **esperanzas matemáticas** de las variables aleatorias X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cuyos valores posibles son x_i y 0 con las probabilidades respectivas p_i y $1 - p_i$.

OBSERVACIÓN 2. Sean $\underline{x} = \min\limits_i x_i$ y $\overline{x} = \max\limits_i x_i$ el menor y mayor de los valores posibles de la variable aleatoria X. Tenemos

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \underline{x} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \overline{x} p_i = \overline{x}.$$

De este modo

$$\underline{x} \leqslant M(X) \leqslant \overline{x}. \tag{3}$$

Entonces, la esperanza matemática de una variable aleatoria es un cierto **valor medio** de esta variable.

OBSERVACIÓN 3. La esperanza matemática del número de repeticiones de un suceso A en un solo ensayo coincide con la probabilidad de este suceso $P(A) = p$.

Efectivamente, sea X el número de repeticiones del suceso A en un ensayo dado. La variable aleatoria X puede tomar dos valores: $x_1 = 1$ (el suceso A ha tenido lugar) con la probabilidad $p_1 = p$ y $x_2 = 0$ (el suceso A no se ha producido) con la probabilidad $p_2 = 1 - p = q$.

Por eso

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

§ 17. Propiedades principales de la esperanza matemática

Las propiedades más importantes de la esperanza matemática serán demostradas en este párrafo para las variables aleatorias discretas. Sin embargo, los teoremas correspondientes son válidos para las variables aleatorias continuas, por eso al enunciar estos teoremas no mencionaremos que las variables aleatorias examinadas son discretas.

Tenemos que poner en claro el sentido de las operaciones aritméticas $X + Y$, $X - Y$, XY, etc., donde X e Y son variables aleatorias discretas. No es difícil dar las definiciones correspondientes.

Por ejemplo, se llama **suma** $X + Y$ a una variable aleatoria Z cuyos valores son sumas admisibles $z_{ij} = x_i + y_j$, donde x_i e y_j son todos los valores posibles que pueden tomar respectivamente las variables aleatorias X e Y; además, las probabilidades correspondientes son iguales

$$\pi_{ij} = P(Z = z_{ij}) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j/X = x_i).$$

Si una combinación cualquiera $x_k + y_l$ es imposible, se considera condicionalmente que $\pi_{kl} = 0$; esto no ejercerá influencia en la esperanza matemática de la suma.

Se definen de modo análogo las otras expresiones.

Se distinguen también variables aleatorias **independientes y dependientes**. Dos variables aleatorias se consideran *independientes*, si los valores posibles y la ley de distribución de cada una de ellas permanecen invariables, al elegir cualesquiera valores admisibles de la otra variable. En el caso contrario, las variables son *dependientes*. Algunas variables aleatorias se llaman *mutuamente independientes*, si los valores posibles y las leyes de distribución de cada una de ellas no dependen de los valores posibles tomados por las otras variables.

TEOREMA 1. *La esperanza matemática de una magnitud constante es igual a esta constante*, es decir, si C es una magnitud constante,

$$M(C) = C.$$

DEMOSTRACIÓN. La constante C puede ser considerada como una variable aleatoria discreta que toma un solo valor posible C con probabilidad $p = 1$. Por eso

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

TEOREMA 2. *La esperanza matemática de la suma de dos (o varias) variables aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de cada una de ellas*, es decir, si X e Y son variables aleatorias, entonces

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y),$$

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos que la variable aleatoria X toma los valores x_i con las probabilidades p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y la variable Y, toma los valores y_j con las probabilidades p'_j ($j = 1, 2, \ldots, m$). Los valores posibles de la variable aleatoria $X + Y$ serán en este caso las sumas $x_i + y_j$ cuyas probabilidades son iguales a

$$\pi_{ij} = P(X = x_i)\, P(Y = y_j/X = x_i) = \\ = P(Y = y_j)\, P(X = x_i/Y = y_j). \quad (3)$$

Como hemos dicho más arriba, todas las combinaciones (i, j) ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) pueden ser consideradas como admisibles. Con todo, si la suma $x_i + y_j$ es imposible, se supone que $\pi_{ij} = 0$.

Tenemos

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j)\, \pi_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \pi_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j \pi_{ij}. \quad (4)$$

Utilizando las propiedades evidentes de la suma: 1) la suma no depende del orden de términos y 2) se puede sacar del signo de la suma un factor que no depende del índice de adición; se deduce de la (4) que

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij}. \quad (5)$$

La suma $\sum_{j=1}^{m} \pi_{ij}$ representa la probabilidad de un suceso que consiste en que la variable aleatoria X toma el valor x_i a condición de que la otra variable aleatoria Y tome uno de sus valores posibles (que es cierto); es evidente que este suceso complejo es equivalente a que X toma el valor x_i y por eso

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} = P(X = x_i) = p_i.$$

De modo análogo

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = P(Y = y_j) = p'_j.$$

En este caso, mediante la fórmula (5) obtenemos

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j p'_j = M(X) + M(Y),$$

que es lo que se debía demostrar.

2) En el caso de varias variables aleatorias, por ejemplo, de tres X, Y y Z tenemos

$$M(X+Y+Z) = M[(X+Y)+Z] = M(X+Y)+M(Z) = \\ = M(X)+M(Y)+M(Z),$$

etc.

COROLARIO *Si C es una magnitud constante,*

$$M(X+C) = M(X)+C.$$

TEOREMA 3. *La esperanza matemática del producto de dos variables aleatorias independientes es igual al producto de sus esperanzas matemáticas, es decir,*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y), \tag{6}$$

donde X e Y son variables aleatorias independientes.

DEMOSTRACIÓN. Sean (x_i, p_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e (y_j, p'_j) $(j = 1, 2, \ldots, m)$ las respectivas leyes de distribución de las variables aleatorias X e Y. Las variables X e Y son **independientes**, por eso todos los valores posibles que puede tomar la variable aleatoria XY son los productos de la forma x_iy_j $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m)$. Con todo eso, las probabilidades de estos valores, según el teorema de la multiplicación, para sucesos independientes son iguales a $p_ip'_j$.

Tenemos

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_jp_ip'_j = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \sum_{j=1}^{m} y_jp'_j = \\ = \sum_{i=1}^{n} x_ip_iM(Y) = M(X)\,M(Y), \tag{7}$$

que es lo que se debía demostrar.

COROLARIO 1. *La esperanza matemática del producto de varias variables aleatorias mutuamente independientes es igual al producto de las esperanzas matemáticas de estas magnitudes.*

En efecto para tres variables aleatorias mutuamente independientes X, Y, Z, por ejemplo, tenemos

$$M(XYZ) = M[(XY)Z] = M(XY)\,M(Z) = M(X)\,M(Y)\,M(Z),$$

etc.

COROLARIO 2. *Se puede sacar un factor constante del signo de la esperanza maemática.*

Si C es una constante y X una variable aleatoria cualquiera, aplicando el teorema 1 y teniendo en cuenta el hecho de que C y X son independientes, obtendremos

$$M(CX) = M(C)\,M(X) = CM(X).$$

COROLARIO 3 *La esperanza matemática de la diferencia de dos variables aleatorias cualesquiera X e Y es igual a la diferencia de las esperanzas matemáticas de estas variables, es decir,*

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

Efectivamente, aplicando el teorema sobre la suma de las esperanzas matemáticas y el corolario 2 obtendremos

$$M(X - Y) = M[X + (-Y)] = M(X) + M(-Y) =$$
$$= M(X) + (-1)M(Y) = M(X) - M(Y).$$

§ 18. Dispersión

Sea X una variable aleatoria y $M(X)$ la esperanza matemática de esta variable (**valor medio**). La variable aleatoria $X - M(X)$ se llama *desviación*.

TEOREMA 1 *La esperanza matemática de la desviación de toda variable aleatoria X es igual a cero*, es decir,

$$M[X - M(X)] = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, teniendo en cuenta que $M(X)$ es una magnitud constante tenemos

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

DEFINICIÓN *Se llama* ***dispersión (varianza)*** *de una variable aleatoria a la esperanza matemática del cuadrado de la desviación entre esta variable y su esperanza matemática.*

De aquí, designando la varianza por la letra D tendremos para una variable aleatoria X

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}. \tag{1}$$

Es evidente que la varianza de una variable aleatoria es constante, es decir, es una característica numérica de esta variable.

Si la ley de distribución de una variable aleatoria X es (x_i, p_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, notando, para abreviar, $M(X) = \mu$ tendremos por medio de la fórmula (1)

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i. \tag{2}$$

La raíz cuadrada de la dispersión $D(X)$ de una variable aleatoria se llama *desviación cuadrática media* σ (de otro modo, **desviación estándar**) de esta variable:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{3}$$

EJEMPLO. Sea una variable aleatoria cuya ley de distribución está dada por la tabla siguiente

X	4	10	20
p	1/4	1/2	1/4

Determinar la esperanza matemática $M(X)$, la varianza $D(X)$ y la desviación cuadrática media $\sigma(X)$ de esta variable

Tenemos

$$M(X) = 4\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{2} + 20\cdot\frac{1}{4} = 11;$$

de donde

$$D(X) = (4-11)^2\cdot\frac{1}{4} + (10-11)^2\cdot\frac{1}{2} + (20-11)^2\cdot\frac{1}{4} = 33$$

y

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{33} \approx 5{,}75.$$

La varianza $D(X)$ sirve de medida de la dispersión de una variable aleatoria discreta X. Efectivamente supongamos que $D(X)$ sea pequeña. En este caso, de la fórmula (2) resulta que todos los términos $(x_i-\mu)^2\cdot p_i (i=1, 2, \ldots, n)$ son igualmente pequeños. De aquí se deduce que al omitir valores que tienen probabilidad pequeña (tales valores son prácticamente imposibles), todos los otros x_i difieren poco de μ. De este modo, cuando la varianza $D(X)$ es pequeña resulta casi cierto que los valores que toma la variable aleatoria se concentran cerca de su esperanza matemática (la excepción puede ser de un número relativamente pequeño de algunos valores). En particular, si $D(X)=0$, es evidente que $X=\mu$ y la variable aleatoria representa un punto del eje numérico. Al contrario, si $D(X)$ es grande, la concentración de valores de la variable aleatoria X alrededor de un centro cualquiera se excluye.

TEOREMA 2. *La varianza de una variable aleatoria es igual a la diferencia entre la esperanza matemática del cuadrado de esta variable y el cuadrado de su esperanza matemática*, es decir

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando los teoremas fundamentales sobre las esperanzas matemáticas de variables aleatorias tenemos

$$\begin{aligned} D(X) &= M\{[X - M(X)]^2\} = M\{X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2\} = \\ &= M(X^2) - 2M(X)\cdot M(X) + [M(X)]^2 = \\ &= M(X^2) - [M(X)]^2. \end{aligned}$$

TEOREMA 3. *La varianza de una magnitud constante es igual a cero.*

Efectivamente, si C es una magnitud constante, $M(C)=C$ y por consiguiente

$$D(C) = M[(C-C)^2] = M(0) = 0.$$

Este resultado es evidente porque una magnitud constante se representa por un solo punto sobre el eje numérico Ox y no tiene dispersión.

TEOREMA 4. *La varianza de una suma de dos variables aleatorias independientes X e Y es igual a la suma de las varianzas de estas variables*, es decir,

$$D\ (X + Y) = D\ (X) + D\ (Y). \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que

$$M\ (X + Y) = M\ (X) + M\ (Y), \tag{6}$$

tenemos

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= M\{[(X+Y)-M\ (X+Y)]^2\} = \\ &= M\{[(X-M\ (X))+(Y-M\ (Y))]^2\} = \\ &= M\{[X-M\ (X)]^2\} + M\{[Y-M\ (Y)]^2\} + \end{aligned}$$
$$+ 2M\{[X-M\ (X)]\cdot[Y-M\ (Y)]\} = D\ (X) + D\ (Y) + 2K\ (X,\ Y),$$

donde

$$K\ (X,\ Y) = M\{[X-M\ (X)]\cdot[Y-M\ (Y)]\}$$

es un momento llamado *momento de correlación* de las variables X e Y. Si las variables aleatorias X e Y son independientes, las variables aleatorias $X - M\ (X)$ e $Y - M\ (Y)$ que difieren de X e Y en magnitudes constantes, son evidentemente también independientes. Por eso, en virtud del teorema 3 del § 17 y del teorema 1 tenemos

$$K\ (X,\ Y) = M\ [X - M\ (X)]\cdot M\ [Y - M\ (Y)] = 0$$

y entonces la fórmulas (6) es verídica.

COROLARIO 1. *La varianza de una suma de varias variables aleatorias mutuamente independientes es igual a la suma de las varianzas de estas variables.*

COROLARIO 2. *Si C es una magnitud constante,*

$$D]\ (X + C) = D\ (X).$$

De este modo, las variables aleatorias X y $X + C$ tienen una misma medida de la dispersión.

TEOREMA 5. *Se puede sacar un factor constante del signo de la varianza elevándolo al cuadrado*, es decir,

$$D\ (CX) = C^2 D\ (X).$$

DEMOSTRACIÓN Si C es un factor constante, aplicando el teorema 2 obtendremos

$$D\ (CX) = M\ (C^2X^2) - [M\ (CX)] = C^2 M\ (X^2) -$$
$$- C^2\ [M\ (X)]^2 = C^2 D\ (X).$$

De este modo, la varianza de la variable CX es C^2 veces mayor que la varianza de la variable X.

COROLARIO. *La varianza de la diferencia de dos variables aleatorias independientes es igual a la suma de las varianzas de estas variables,* es decir, si las variables aleatorias X e Y son independientes,

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Efectivamente, en virtud de los teoremas 4 y 5 tenemos

$$D(X - Y) = D[X + (-Y)] = D(X) + D(-Y) =$$
$$= D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

La esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria son sus características numéricas esenciales.

PROBLEMA. Determinar la esperanza matemática y la varianza del número X de repeticiones de un suceso A en n ensayos independientes sabiendo que en cada uno de ellos la probabilidad del suceso A es constante: $P(A) = p$.

La variable aleatoria X toma los valores $0, 1, 2, \ldots, n$ y se repite según una ley binomial

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

donde $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

La variable X puede ser considerada como una suma de variables aleatorias independientes:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

donde X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es el número de realizaciones del suceso A en el i-ésimo ensayo. La variable aleatoria X_i toma solamente dos valores: 1, si el suceso A ha aparecido en el i-ésimo ensayo y 0, si el suceso A no se ha producido en el i-ésimo ensayo. Las probabilidades de estos valores son $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = q$. De aquí

$$M(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(véase también el § 16). Aplicando el teorema sobre la esperanza matemática de una suma de unas variables tendremos

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) = np. \tag{8}$$

De este modo, la esperanza matemática del número de repeticiones del A coincide en las condiciones del esquema de Bernoulli, con el «numero medio» de realizaciones de este suceso en la serie de ensayos dada.

Para la dispersión de la variable aleatoria X_i obtendremos

$$D(X_i) = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 = q^2 p + p^2 q =$$
$$= pq(q + p) = pq.$$

De donde, utilizando la propiedad de la varianza de la suma de variables aleatorias independientes (teorema 4) tendremos

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = npq. \tag{9}$$

Por eso la desviación cuadrática media (estándar) es

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}. \tag{10}$$

Las fórmulas (8) y (9) dan la esperanza matemática y la varianza para la ley de distribución binomial.

OBSERVACIÓN. Se hace comprensible ahora el sentido de la variable aleatoria

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

que figura en las fórmulas aproximadas de Laplace (§§ 12 y 13), a saber, t representa la desviación entre el número de repeticiones del suceso A y su esperanza matemática medida en estándares (llamadas **desviación normal**).

Examinemos n variables aleatorias discretas, independientes de par en par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cuyas varianzas $D(X_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ están **uniformemente acotadas**

$$0 \leqslant D(X_i) \leqslant K \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Estas variables pueden presentar una dispersión considerable, pero su media aritmética

$$\hat{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

es suficientemente «centrada».

En estas condiciones tiene lugar el **notable teorema de Chébyshev**: *para cualquier* $\varepsilon > 0$ *la probabilidad de la desigualdad* $|\hat{X}_n - M(\hat{X}_n)| < \varepsilon$ donde

$$M(\hat{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i),$$

es tan próxima como se quiera a 1, *si el número n de variables aleatorias es suficientemente grande*, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{X}_n - M(\hat{X}_n)| < \varepsilon) = 1$$

(**ley de grandes números** en la forma de Chébyshev).

El teorema de Chébyshev se aplica en la teoría de errores, en estadística, etc.

§ 19. Variables aleatorias continuas. Funciones de distribución

Una variable aleatoria X se llama *continua*, si ella puede tomar todos los valores reales que contiene cierto intervalo finito o infinito $\langle a, b\rangle$ del eje numérico. Se supone que en cada ensayo la variable aleatoria X toma un valor y solamente uno $x \in \langle a, b\rangle$. Hace falta remarcar que las variables discretas y continuas no abarcan a todos los tipos de variables aleatorias.

Para caracterizar una variable aleatoria continua X se introduce su *función de distribución*

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x) \tag{1}$$

que se llama ley de distribución integral[1]).

Si los valores tomados por la variable aleatoria X se consideran como puntos del eje numérico Ox, entonces $\Phi(x)$ representa la probabilidad del suceso que consiste en que el valor observado de la variable aleatoria X pertenece al intervalo $(-\infty, x)$, es decir, está situado **a la izquierda** del punto x. Este intervalo depende del extremo derecho x y por eso la probabilidad es naturalmente una función de x definida sobre todo el eje $-\infty < x < +\infty$.

Notemos que la función de distribución tiene también sentido para las variables aleatorias discretas.

La función de distribución $\Phi(x)$ posee las propiedades siguientes.

I. $\Phi(x)$ es una función no decreciente del argumento x, es decir, si $x < x'$, $\Phi(x) \leqslant \Phi(x')$.

En efecto, si $x' > x$, el suceso $X \in (-\infty, x)$ implica evidentemente $X \in (-\infty, x')$. Pero en este caso la probabilidad $\Phi(x')$ del segundo suceso no es inferior a la probabilidad $\Phi(x)$ del primero (teorema 2 del § 3).

II. Puesto que $\Phi(x)$ es una probabilidad, es válida la desigualdad

$$0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1.$$

III. $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$.

En efecto, el suceso $X \in (-\infty, -\infty)$ es evidentemente imposible y el suceso $X \in (-\infty, +\infty)$ es cierto.

Conociendo la función de distribución $\Phi(x)$ se puede determinar para cada intervalo $[a, b)$ la probabilidad $P(a \leqslant X < b)$ para que la variable aleatoria X se encuentre en este intervalo (se ha convenido aquí incluir en este intervalo el extremo izquierdo a y no incluir el extremo derecho b).

En efecto, sean A el suceso $X \in (-\infty, a)$, B el suceso $X \in (-\infty, b)$ y C el suceso $X \in [a, b)$.

---

[1]) El término probabilidad lo entendemos aquí en sentido axiomático.

En este caso es evidentemente

$$B = A + C.$$

Como los sucesos A y C son incompatibles, aplicando el teorema de probabilidades obtenemos $P(B) = P(A) + P(C)$, de donde

$$P(C) = P(B) - P(A),$$

es decir,

$$P(a \leqslant X < b) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{2}$$

En virtud de la propiedad I: $\Phi(b) - \Phi(a) \geqslant 0$.

De este modo, *la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor perteneciente al intervalo $[a, b)$ es igual al incremento de la función de distribución de esta variable sobre este intervalo.*

En el texto que sigue una variable aleatoria X será llamada **continua** solamente en el caso cuando su función de distribución $\Phi(x)$ es continua sobre el eje $(-\infty, +\infty)$.

TEOREMA. *La probabilidad (a priori) de que una variable aleatoria X tome un valor a estrictamente determinado de antemano es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, en virtud de la fórmula (2) tenemos

$$P(a \leqslant X < x) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{3}$$

Supongamos que $x \to a$; en este caso el intervalo $[a, x)$ contendrá dentro del límite un solo punto a. Además, en virtud de la continuidad de la función $\Phi(x)$ en el punto a tenemos

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a).$$

Pasando al límite en la igualdad (3) cuando $x \to a$ obtendremos

$$P(a) = \lim_{x \to a} \Phi(x) - \Phi(a) = \Phi(a) - \Phi(a) = 0.$$

De este modo, cuando la función de distribución es continua la probabilidad de «caer en el punto» es nula.

COROLARIO. *Para una variable aleatoria continua X se verifican las igualdades*

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{2'}$$

y

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2''}$$

donde $\Phi(x) = P(a \leqslant X < x)$ *es su función de distribución.* En efecto, tenemos

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) + P(X = b) =$$
$$= [\Phi(b) - \Phi(a)] + 0 = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Se demuestra análogamente la segunda igualdad.

OBSERVACIÓN. En el caso general puede ser que los sucesos imposibles y las eventualidades de probabilidad nula no sean equivalentes.

Supongamos ahora que la función de distribución $\Phi(x)$ de una variable aleatoria continua X admite una derivada continua

$$\Phi'(x) = \varphi(x). \tag{4}$$

La función $\varphi(x)$ se llama *densidad de la probabilidad* (para una distribución dada) o *ley de distribución diferencial de la variable aleatoria X*.

El término «**densidad de probabilidad**» tiene el sentido siguiente: sea $[x, x + dx]$ un intervalo infinitamente pequeño. En este caso, en virtud de la fórmula (2′) tenemos

$$P(x \leqslant X \leqslant x + dx) = \Phi(x + dx) - \Phi(x).$$

Reemplazando el incremento infinitesimal de la función $\Phi(x + dx) - \Phi(x)$ por su diferencial $\Phi'(x)\,dx = \varphi(x)\,dx$ obtendremos una igualdad aproximada

$$P(x \leqslant X \leqslant x + dx) = \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

De este modo, la densidad de la probabilidad es la relación de la probabilidad de que un punto se encuentre en un intervalo infinitesimal respecto a la longitud de ese intervalo.

Como la densidad de probabilidad $\varphi(x)$ es la derivada de la función no decreciente $\Phi(x)$ ella no es negativa: $\varphi(x) \geqslant 0$. A dife-

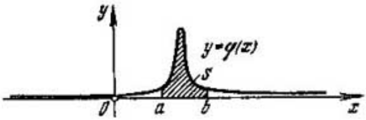

Fig. 271

rencia de la probabilidad, su densidad puede tomar valores tan grandes como se quiera.

Como $\Phi(x)$ es una primitiva de la función $\varphi(x)$, la fórmula de Newton—Leibniz nos da

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

De aquí, en virtud de la (3′) obtenemos

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Geométricamente (fig. 271), esta probabilidad representa el área S del trapecio curvilíneo limitado por la gráfica de la densidad de probabilidad $y = \varphi(x)$, el eje Ox y por dos ordenadas $x = a$ y $x = b$.

Suponiendo que $a = -\infty$ y $b = +\infty$, obtenemos un suceso cierto $X \in (-\infty, +\infty)$ cuya probabilidad es igual a la unidad. Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1. \tag{7}$$

Considerando que en la fórmula (6) $a = -\infty$, $b = x$ y designando, para que sea más claro, la variable de integración x por otra letra, t por ejemplo (esto es legítimo para una integral definida) obtenemos la función de distribución

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt. \tag{8}$$

§ 20. Características numéricas de una variable aleatoria continua

Examinemos un intervalo infinitamente pequeño $[x, x + dx]$ como un «punto grueso» x del eje Ox. En este caso, la probabilidad de que una variable aleatoria X tome un valor que coincida con este «punto grueso» x es igual a $\varphi(x)\,dx$ y la esperanza matemática de este suceso es

$$dM = x\varphi(x)\,dx.$$

Representado la recta $-\infty < x < +\infty$ como un conjunto infinito de tales «puntos gruesos» obtenemos, por analogía con la definición de la esperanza matemática de una variable aleatoria discreta, una definición de una variable aleatoria continua (sólo que aquí la adición se reemplaza por la integración).

DEFINICIÓN. *Llámase **esperanza matemática** de una variable aleatoria continua X, a un número*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx \tag{1}$$

(por supuesto, esta definición tiene sentido solamente para tales variables aleatorias X para las cuales la integral (1) *es convergente).*

Para la varianza de una variable aleatoria X conservamos la definición precedente

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}.$$

De la fórmula (1) se deduce

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

(en la hipótesis, claro está, la integral (2) es convergente). Se puede utilizar también la fórmula

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\,dx-\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx\Big]^2. \tag{3}$$

Se puede demostrar que las propiedades principales de la esperanza matemática y de la varianza de variables aleatorias discretas también se conservan para las variables aleatorias continuas.

Supongamos ahora que la variable aleatoria continua X toma todos los valores posibles que completan el intervalo cerrado $[a, b]$. En este caso $\varphi(x)=0$ para $-\infty<x<a$ y para $b<x<+\infty$ y, por consiguiente,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}x\varphi(x)\,dx+\int_{a}^{b}x\varphi(x)\,dx+$$
$$+\int_{b}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx=0+\int_{a}^{b}x\varphi(x)\,dx+0=\int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx.$$

Del modo análogo

$$D(X)=\int_{a}^{b}[x-M(X)]^2\,\varphi(x)\,dx,\ \text{donde}\ \int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx=1.$$

§ 21. Distribución uniforme

Una variable aleatoria continua X, todos los valores posibles de la cual llenan un intervalo cerrado $\langle a, b\rangle$, se llama *uniformemente distribuida* si su densidad de probabilidad $\varphi(x)$ es constante sobre este intervalo.

En otras palabras, todos los valores posibles de una variable uniformemente distribuida son **equiprobables**.

Sea, por ejemplo, $X\in[a, b]$. Puesto que en este caso $\varphi(x)=$ $=\text{const}$ para $x\in[a, b]$ y $\varphi(x)=0$ para $x\notin[a, b]$, entonces

$$\int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx=\varphi(x)\int_{a}^{b}dx=(b-a)\,\varphi(x)=1;$$

de donde

$$\varphi(x)=\frac{1}{b-a} \text{ para } a\leqslant x\leqslant b.$$

Sea $[\alpha, \beta]\in[a, b]$ (fig. 272). En este caso

$$p=P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

es decir,

$$p=\frac{l}{L}, \tag{1}$$

donde L es la longitud (medida lineal) de todo el intervalo $[a, b]$ y l es la longitud del intervalo parcial $[\alpha, \beta]$.

Los valores de una variable aleatoria X, es decir, los puntos x del intervalo cerrado $[a, b]$ pueden ser considerados como todos

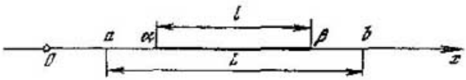

Fig. 272

los resultados elementales posibles de un cierto ensayo. Sea que un suceso A consiste en que el resultado del ensayo pertenezca al intervalo $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$. En este caso los puntos del intervalo $[\alpha\ \ \beta]$ son resultados elementales *favorables* del suceso A.

Según la fórmula (1) tenemos una **definición geométrica de la probabilidad**: *la probabilidad de un suceso A es la relación entre la medida l del conjunto de resultados elementales favorables del suceso A, respecto a la medida L del conjunto de todos los resultados elementales posibles con la hipótesis de que todos estos resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir*

$$P(A)=\frac{l}{L}\leqslant 1.$$

Esta definición pasa naturalmente la definición clásica de la probabilidad al caso de un número infinito de resultados elementales.

Una definición análoga puede ser también introducida cuando los resultados elementales de un ensayo representan puntos en el plano o en el espacio.

EJEMPLO. 1. Durante una hora $0\leqslant t\leqslant 1$ (t es medida de tiempo en horas) un solo autobús llega a la parada. ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero que ha llegado a esta parada en el instante de tiempo $t=0$ deba esperar el autobús no más de 10 minutos?

Aquí el conjunto de todos los resultados elementales forma un intervalo cerrado $[0, 1]$ cuya longitud temporal $L = 1$ y el conjunto de resultados favorables forma un intervalo cerrado $[0, 1/6]$ cuya longitud temporal $l = \frac{1}{6}$.

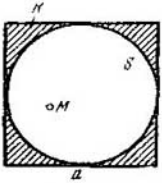

Fig. 273

Por eso la probabilidad buscada es

$$p = \frac{l}{L} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 2. Sea un cuadrado K de lado a que tiene inscripto un círculo S (fig. 273). Un punto material M se lanza por casualidad en este cuadrado. ¿Cuál es la probabilidad de que este punto dé en este círculo S?

Aquí el área del cuadrado es $K = a^2$ y el área del círculo $S = \pi\,(a/2)^2 = \frac{\pi}{4}\,a^2$.

Es natural tomar por la probabilidad buscada la relación

$$p = \frac{S}{K} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$$

Es evidente que esta probabilidad y, por consiguiente, el número π pueden ser determinados experimentalmente.

§ 22. La distribución normal

La distribución de probabilidades de una variable aleatoria X se llama *normal*, si su densidad de la probabilidad se subordina a la **ley de Gauss**

$$\varphi(x) = ae^{-b(x-x_0)^2}, \qquad (1)$$

donde a, b y x_0 son constantes tales que $a > 0$ y $b > 0$. En este caso la gráfica de la densidad de la probabilidad es la curva de Gauss descentrada (fig. 274) simétrica respecto a la recta $x = x_0$, con ordenada máxima $y_{\text{máx}} = a$.

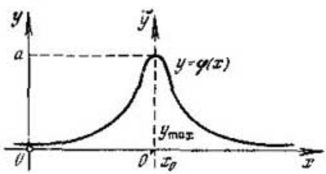

Fig. 274

Para comodidad de los cálculos, centremos esta curva introduciendo nuevas coordenadas $\xi = x - x_0$ y $\eta = y$. En este caso, la ley de Gauss toma la forma

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = ae^{-b\xi^2} \qquad (2)$$

y representará la ley de distribución diferencial de la variable aleatoria $\widetilde{X} = X - x_0$.

Las constantes a y b de la fórmula (2) no son arbitrarias porque la densidad de probabilidad $\widetilde{\varphi}(\xi)$ debe satisfacer la condición

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2}\, d\xi = 1. \qquad (3)$$

Efectuando ahora un cambio de variable

$$b\xi^2 = t^2, \quad \xi = \frac{t}{\sqrt{b}}, \quad d\xi = \frac{dt}{\sqrt{b}},$$

tendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \qquad (4)$$

(véase el § 4 del cap. XXIV). De aquí en virtud de la fórmula (3) hallamos

$$a\sqrt{\frac{\pi}{b}} = 1, \qquad (5)$$

es decir,

$$a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}. \qquad (6)$$

De este modo

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, e^{-b\xi^2}. \qquad (7)$$

Para la esperanza matemática de la variable aleatoria tendremos

$$M(\widetilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-b\xi^2}\, d\xi = 0$$

(debido a que la función a integrar es impar). De aquí,

$$M(X) = M(\widetilde{X} + x_0) = M(\widetilde{X}) + M(x_0) = 0 + x_0 = x_0. \qquad (8)$$

De este modo, en el caso de la distribución normal de una variable aleatoria X, su esperanza matemática x_0 coincide con el punto de intersección del eje de simetría de la gráfica de la curva de Gauss correspondiente y del eje Ox **(centro de dispersión)**.

Para la dispersión de la variable aleatoria X obtenemos

$$D(\widetilde{X}) = M(\widetilde{X}^2) - [M(\widetilde{X})]^2 = M(\widetilde{X}^2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-b\xi^2}\, d\xi. \qquad (9)$$

Suponiendo que $u=\xi$ y $dv=\xi e^{-b\xi^2}\,d\xi=d\left(-\frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\right)$ e integrando por partes obtenemos teniendo en cuenta la fórmula (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-b\xi^2}\,d\xi=-\xi\cdot\frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\,d\xi=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

De este modo de la fórmula (9) deducimos

$$D(\widetilde{X})=\sqrt{\frac{b}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2b\sqrt{b}}=\frac{1}{2b};$$

y por consiguiente

$$D(X)=D(\widetilde{X}+x_0)=D(\widetilde{X})+D(x_0)=\frac{1}{2b}+0=\frac{1}{2b}. \qquad (10)$$

De aquí, para la desviación cuadrática media de la variable X obtendremos

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\sqrt{2b}}.$$

Al introducir la designación $\sigma=\sigma(X)$, tendremos

$$b=\frac{1}{2\sigma^2},\quad a=\sqrt{\frac{b}{\pi}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Introduciendo estos valores en la fórmula (1) obtendremos **la forma estándar de la ley de distribución normal de la variable aleatoria X en la forma diferencial**:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (11)$$

donde $x_0=M(X)$ y $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

De este modo, la ley de distribución normal depende solamente de dos parámetros: **de la esperanza matemática y de la desviación cuadrática media.**

La ley de distribución normal de una variable aleatoria en la forma integral es siguiente

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,dz. \qquad (12)$$

Las fórmulas (11) y (12) pueden ser simplificadas, si se introduce **la desviación normalizada**

$$t=\frac{x-x_0}{\sigma}; \qquad (13)$$

en este caso

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}=\frac{1}{\sigma}\varphi_0(t)$$

(véase el § 12). Suponiendo que en la integral (12) $\tau=\frac{z-x_0}{\sigma}$, $d\tau=\frac{dz}{\sigma}$, obtendremos

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\sigma}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\frac{1}{2}+\Phi_0(t),$$

donde t se determina mediante la fórmula (13) y $\Phi_0(t)$ es la integral de la probabilidad estándar (véase el § 13).

De aquí obtenemos que para una variable aleatoria X que se somete a la ley de distribución normal, la probabilidad de que ella se encuentre en el intervalo $[a, b]$ es

$$P(a\leqslant x\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)=\left[\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right)\right]=\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right). \quad (14)$$

En particular, la probabilidad de que la desviación de la variable X de su esperanza matemática x_0 sea, en valor absoluto, inferior a α es igual a

$$P(|X-x_0|<\alpha)=P(x_0-\alpha<X<x_0+\alpha)=2\Phi_0\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

Tomando $\alpha=3\sigma$ obtendremos

$$P(|x-x_0|<3\sigma)=2\Phi_0(3)=0{,}9973,$$

es decir, semejante desviación es **casi cierta** *(regla de las tres sigmas)*.

La ley de distribución normal encuentra numerosas aplicaciones en teoría de errores, teoría del tiro, en física, etc.

EJERCICIOS

1. Sean A un suceso aleatorio y C un suceso cierto. ¿Qué se debe entender por los sucesos: $A+A$, AA, $A+C$, AC?

2. Un dado se lanza una sola vez. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos siguientes: A, el dado da el 1; B, el dado da un número impar; C, el dado da no menos de 3?

3. Una urna contiene 2 bolas blancas y 8 bolas negras. ¿Cuántas bolas blancas hace falta agregar a la urna para que la probabilidad de sacar de ella una bola blanca sea no menor de 0,99?

4. Se sacan al azar 4 bolas de una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 bolas negras. ¿Cuáles son las probabilidades de que: a) el numero de bolas blancas sacadas sea igual al de bolas negras; b) el número de bolas blancas sea más grande que el de bolas negras?

5. Un estudiante ha estudiado 24 billetes de examen sobre un total de 30. ¿Cuál es la probabilidad (en %) que él responda con éxito en el examen: a) sacando un solo billete; b) sacando dos billetes, sucesivamente (el billete sacado no se devuelve)?

6. Tres tiradores disparan simultáneamente contra un blanco. La probabilidad de dar en el blanco es de 0,9 para el primer tirador, de 0,8 para el segundo y 0,6 para el tercero. ¿Cuál es la probabilidad de que: a) el blanco sea batido al menos por un tirador; b) el blanco sea batido al menos por dos tiradores; c) ninguno de los tres tiradores dé en el blanco?

7. Demostrar que si los sucesos A y B son independientes, las eventualidades $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son también independientes.

8. La probabilidad de dar en el blanco con un solo tiro es $p = \frac{1}{3}$. Hallar la distribución de las probabilidades del número de impactos m para el número total de tiros $n = 5$.

9. La probabilidad de dar en el blanco con un solo tiro es $p = 0{,}2$. ¿Con qué número de tiros el blanco será batido por lo menos una vez con la probabilidad de 0,999?

10. Efectuando numerosas medidas del valor de una cierta magnitud se han obtenido los resultados siguientes (que contenían errores aleatorios): $x_1 = 1{,}2$ (dos veces), $x_2 = 1{,}3$ (cinco veces); $x_3 = 1{,}4$ (tres veces). Suponiendo que estas medidas han sido efectuadas con la misma precisión, calcular la esperanza matemática (valor medio) y la varianza del resultado de la medida. ¿Cuál es el error cuadrático medio del resultado de la medida?

11. Las variables aleatorias discretas X e Y son independientes. Demostrar que las variables $\widetilde{X} = X + C$ e Y (C es una constante) son también independientes.

12. Todos los valores de la variable aleatoria X pertenecen al intervalo $(0, 2)$, la densidad de la probabilidad es $\varphi(x) = \frac{1}{4}$ para $0 < x \leqslant 1$ y $\varphi(x) = \frac{3}{4}$ para $1 < x < 2$. Hallar la función de distribución $\Phi(x)$, la esperanza matemática $M(X)$ y la varianza $D(X)$.

13. Una variable aleatoria X está uniformemente distribuida en un intervalo centrado $[-l, l]$. Hallar la densidad de probabilidad $\varphi(x)$, la esperanza matemática $M(X)$, la varianza $D(X)$ y el estandar $\sigma(X)$.

14. Mostrar que la curva de Gauss

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

tiene puntos de inflexión en $x = \pm\sigma$.

15. Durante un tiro experimental se descubrió que la desviación Δ del punto de impacto respecto al blanco ha resultado de acuerdo con la ley normal con una esperanza matemática $M = 0$ y varianza $D = 4$ m. ¿Cuál es la probabilidad de que $|\Delta| < 1$ m?

16. Durante el empaquetamiento de ciertos productos se considera que un paquete es estandar, si la desivación entre su masa y la masa dada de 1 kg no supera los 20 g (en ambos sentidos). Se ha probado que con un trabajo cuidadoso, el error de la masa obedece a la ley normal con esperanza matemática $M = 0$ y desviación cuadrática media $\sigma = 10$ g. Un lote de 10 000 paquetes de este producto contiene 9000 paquetes estándares. ¿Corresponde esta proporción a la ley normal dada?

Capítulo XXVI

Noción sobre la programación lineal

§ 1. Espacio vectorial de n dimensiones

Como hemos visto en el capítulo XVIII, en el espacio tridimensional cada vector $\boldsymbol{x}$ puede ser dado por tres coordenadas: $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Generalizando esta propiedad llegamos a la noción de vector de n dimensiones.

DEFINICIÓN. *Un sistema ordenado de n números $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se llama* ***punto de n dimensiones** o **vector de n dimensiones.***

Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman *coordenadas* del punto (del vector) $\boldsymbol{x}$; supondremos que ellos son reales. Un vector de coordenadas nulas $0 = \{0, 0, \ldots \ldots, 0\}$ se llama *vector nulo*. En la representación geométrica el vector $\boldsymbol{x}$ puede considerarse como un radio vector del punto correspondiente.

Por analogía con los vectores tridimensionales se definen las operaciones fundamentales para los vectores de n dimensiones $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

I. *Igualdad de vectores.* Dos vectores son **iguales** si, y sólo si, sus coordenadas correspondientes son las mismas, es decir, si

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

II. *Suma de vectores.* Por definición, se suponen que

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}.$$

En particular, para un vector $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y su opuesto $-\boldsymbol{x} = \{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}$ tenemos

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = 0,$$

donde 0 es el vector nulo.

III. *Diferencia de vectores:*

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \{x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n\}.$$

Es justa la relación

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y}).$$

IV. *Multiplicación por un escalar.* Si k es un escalar,

$$k\boldsymbol{x} = \{kx_1 + kx_2, \ldots, kx_n\}.$$

V *Producto escalar:*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

El valor absoluto (*norma*) de un vector $\boldsymbol{x}$ es el número

$$x = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})} = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant 0.$$

La distancia entre los puntos x e y se determina por la fórmula

$$\rho(x, y) = |x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

En particular $|x|$ es la distancia del punto x al origen de coordenadas 0. Suponiendo que

$$(x, y) = xy \cos \varphi$$

obtenemos el ángulo formado por dos vectores

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{xy}.$$

En particular, si $x \cdot y = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (vectores ortogonales).

Las operaciones I — V presentan las propiedades habituales (véase el cap. XVIII).

En particular, si

$$x = \sum_{k=1}^{m} c_k x^k$$

es una **combinación lineal** de los vectores $x^1, \ldots, x^m$ (los índices de vectores se ponen por arriba) y $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son escalares, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{m} c_k x^k, y \right) = \sum_{k=1}^{m} c_k (x^k, y).$$

El conjunto de todos los vectores (puntos) de n dimensiones para los cuales están definidas las operaciones I — V se llama *espacio euclidiano de n dimensiones* E^n.

DEFINICION. *Los vectores $x^1, x^2, \ldots, x^m$ del espacio E^n se llaman* ***linealmente dependientes****, si existen los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos iguales a cero ($|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_m| \neq 0$) y tales que*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k x^k = 0.$$

En el caso particular en que $m = 2$, estos vectores se llaman **colineales** y cuando $m = 3$ se denominan **coplanares** (compare con los §§ 5 y 6 del cap. XVIII). En el caso contrario estos vectores se llaman **linealmente independientes.**

Se puede demostrar que en el espacio E^n no pueden haber más de n de vectores linealmente independientes. De este modo, la dimensión dim E^n del espació vectorial E^n puede ser definida como el número máximo de vectores linealmente independientes que contiene este espacio.

Sean $x \in E^n$ y $x^1, x^2, \ldots, x^n$ vectores linealmente independientes de E^n. Como los vectores $x, x^1, x^2, \ldots, x^n$ son linealmente dependientes, entonces

$$cx = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k = 0,$$

donde, evidentemente, $c \neq 0$.

Entonces resulta que

$$x=\sum_{k=1}^{n} \xi_k x^k \ \left(\xi_k=-\frac{c_k}{c}\right).$$

De este modo cada vector $x \in E^n$ puede ser descompuesto (de un solo modo) en los vectores $x^1, x^2, \ldots, x^n$. En otras palabras, estos vectores forman la *base* del espacio E^n. Los números ξ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) se llaman *coordenadas* del vector x en la base dada $x^1, x^2, \ldots, x^n$. En particular, las coordenadas de un vector dado $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ son sus coordenadas en la base de vectores unitarios

$$e^1=\{1, 0, 0, \ldots, 0\}, \quad e^2=\{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots,$$
$$\ldots, e^n=\{0, 0, 0, \ldots, 1\}.$$

§ 2. Conjuntos en un espacio de n dimensiones

Un conjunto de puntos $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de un espacio de n dimensiones E^n se llama *conjunto* de este espacio.

El conjunto de puntos x tales que

$$0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon,$$

lo llamaremos entorno U_{x_0} del punto x_0 (o más exactamente, *ε-entorno*). El punto x_0 no pertenece a su entorno, es decir, el entorno está punteado.

Un conjunto G se llama conjunto *abierto*, si cada punto $x \in G$ de este conjunto le pertenece junto con una cierta parte de su entorno.

Un conjunto F se llama conjunto *cerrado*, si éste es un complemento de un conjunto abierto G, es decir, $F = E^n \setminus G$.

Sea $E \subset E^n$. Un punto ξ no necesariamente perteneciente a E se llama punto *de frontera* para el conjunto E, si ξ no es interior ni para el conjunto E, ni para su complemento $E^C = E^n \setminus E$. El conjunto de todos los puntos de frontera del conjunto E se llama *frontera* de E y se connota $\Gamma(E) = \Gamma$. Es evidente que $\Gamma(E^C) = \Gamma(E)$.

DEFINICIÓN 1. *El conjunto de puntos $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in E^n$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación lineal*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ son constantes), donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son todos iguales a cero, se llama **hiperplano** *del espacio E^n.*

En el caso de un espacio tridimensional este conjunto representa un plano habitual.

Introduciendo el *vector normal (director)* del hiperplano (1)

$$a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

se puede escribir la ecuación de éste en la forma

$$a \cdot x = b. \tag{2}$$

El hiperplano (2) divide el espacio E^n en dos semiespacios cerrados:

$$a \cdot x \leqslant b \ (E^-), \quad a \cdot x \geqslant b \ (E^+)^{1)}.$$

1) De una manera tradicional admitimos aquí que los puntos del hiperplano $a \cdot x = b$ pertenecen a los dos semiespacios E^- y E^+. Este hiperplano constituye la frontera común de los mismos.

Si el término independiente $b \neq 0$, los semiespacios E^- y E^+ pueden ser distinguidos del modo siguiente: 1) si $b > 0$, E^- contiene el origen de las coordenadas 0, mientras que E^+ no lo contiene; 2) si $b < 0$, viceversa.

EJEMPLO. La recta $x_1 + x_2 = 1$ divide el plano Ox_1x_2 en dos semiplanos $x_1 + x_2 \leqslant 1$ y $x_1 + x_2 \geqslant 1$ (fig. 275).

DEFINICIÓN 2. *El conjunto de puntos*

$$z = x + \beta (y - x), \tag{3}$$

donde $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ (fig. 276) *se llama **segmento** $[x, y]$ con extremos x e y.*

La fórmula (3) puede ser escrita en forma simétrica

$$z = \alpha x + \beta y, \tag{3'}$$

donde $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Para $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, $\beta = 0$ se obtienen los extremos del segmento; para $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ se obtienen los puntos interiores de éste. Notemos que el punto x puede ser considerado como un segmento $[x, x]$ cuyos extremos coinciden.

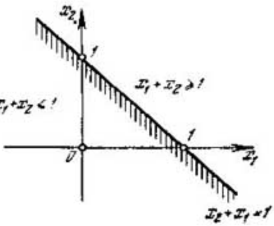

Fig. 275

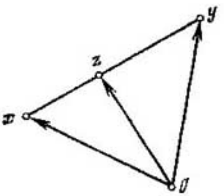

Fig. 276

Esta definición generaliza la noción de segmento para espacios bidimensional y tridimensional.

DEFINICIÓN 3. *Un conjunto $A \subset E^n$ se llama **convexo**, si para cualquier par de puntos $x \in A$ e $y \in A$, el segmento $[x, y]$ que los une pertenece también al conjunto A: $[x, y] \subset A$.*

Como ejemplos de conjuntos convexos se pueden citar el punto, el segmento, el círculo, la esfera, todo el espacio E^n, etc. Se consideran condicionalmente que el conjunto vacío $\varnothing$ es convexo.

LEMA. *Todo semiespacio de E^n es un conjunto convexo.*

Efectivamente, supongamos que la frontera del semiespacio E es el hiperplano

$$a \cdot x = b, \tag{4}$$

y el mismo semiespacio se define por la desigualdad

$$a \cdot x \leqslant b. \tag{5}$$

Examinemos dos puntos arbitrarios y e z pertenecientes al conjunto E, es decir,

$$a \cdot y \leqslant b, \quad a \cdot z \leqslant b \tag{6}$$

y sea $t = \alpha y + \beta z$ ($\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$) un punto cualquiera del segmento $[y, z]$.

Utilizando las propiedades del producto escalar en virtud de las desigualdades (6) tenemos

$$a \cdot t = a\,(\alpha y + \beta z) = \alpha\,(a \cdot y) + \beta\,(a \cdot z) \leqslant \alpha \cdot b + \beta \cdot b = (\alpha + \beta)\, b = b,$$

es decir,

$$a \cdot t \leqslant b. \tag{7}$$

De este modo, $t \in E$ y, por consiguiente, el semiespacio E es convexo.

TEOREMA. *La intersección de cualquier número de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

Demostraremos este teorema para el caso de dos conjuntos convexos: para un número cualquiera finito o infinito de conjuntos convexos los razonamientos son análogos.

Sean A y B dos conjuntos convexos y $C = A \cap B$ la intersección de los mismos.

Si C es vacío, por definición es convexo. Supongamos que C no es vacío. Sean x e y dos puntos cualesquiera pertenecientes a C (es posible que ellos coincidan). De la definición de intersección resulta que $x, y \in A$, así como $x, y \in B$. Examinemos el segmento $[x, y]$. Puesto que los conjuntos A y B son convexos, $[x, y] \subset A$ y $[x, y] \subset B$ y, por consiguiente, $[x, y] \subset C$. De este modo, el conjunto C también es convexo.

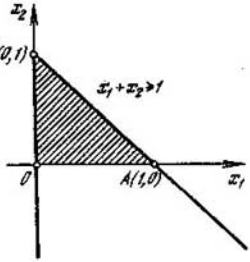

Fig. 277

COROLARIO. *La intersección de cualquier número de semiespacios es un conjunto convexo (puede ser vacío).*

OBSERVACIÓN. Examinemos un sistema de desigualdades lineales

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Cualquier colección de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisface todas las desigualdades (8) se llama *solución* de este sistema de desigualdades. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen una de las desigualdades del sistema (8) llenan un semiespacio del espacio E^n. Las soluciones pertenecen a la intersección de todos estos semiespacios. Del teorema se deduce que el conjunto de soluciones del sistema (8) representa un **poliedro convexo**. A título de ejemplos de poliedros convexos en el espacio tridimensional se pueden citar: la pirámide, el paralelepípedo, el prisma, la capa limitada por dos planos paralelos, etc.

EJEMPLO. a) Las soluciones del sistema de desigualdades

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1$$

llenan en el espacio E^2 un triángulo de vértices $O\,(0, 0)$, $A\,(1, 0)$, $B\,(0, 1)$ (fig. 277);

b) el conjunto de soluciones del sistema

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \geqslant 1$$

en el espacio E^2 es un ángulo cuyo vértice es el punto $B\,(0, 1)$ y los lados son la semirrecta BA y el semieje Bx_2 (fig. 277).

DEFINICIÓN. *Un punto de un conjunto convexo que no es interior a algún segmento no nulo perteneciente enteramente a este conjunto se llama* ***punto extremo*** *del conjunto.*

Por ejemplo, los puntos extremos de un segmento son sus extremos; de un triángulo, sus vértices, etc.

Intuitivamente está claro que un poliedro convexo, es decir, la intersección de un número finito de semiespacios, posee un número finito de puntos límites que son sus vértices.

§ 3. El problema de la programación lineal

En los últimos tiempos los métodos matemáticos son ampliamente utilizados para la solución de problemas tales, como la planificación de la economía nacional, la organización de la gestión industrial, la planificación de operaciones militares, etc. Desde el punto de vista general los problemas de gestión y de planificación se reducen habitualmente a la elección de un cierto sistema de parámetros numéricos o de una función (**característica del plan**) que permiten atender más eficazmente el objetivo propuesto (**plan óptimo**) teniendo en cuenta los recursos disponibles. Para poder evaluar la eficacia de un plan se introduce la así llamada **funcional o función de utilidad** (es decir, **el índice de calidad del plan**) expresada por las características del plan y que toma un valor mínimo o máximo (valor extremo) para el plano óptimo.

Para un gran número de problemas que presentan un interés práctico la función de utilidad es expresada **linealmente** por las características del plan, los valores admisibles de los parámetros cumplen también igualdades o desigualdades lineales. En estas condiciones, el hallazgo del extremo absoluto de la función de utilidad se llama *programación lineal* (un término más apropiado sería **«planificación lineal»**).

Matemáticamente el problema de la programación lineal se enuncia del modo siguiente: es necesario hallar el extremo absoluto (el valor mínimo o máximo según el sentido del problema) de una función lineal

$$S = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0) \tag{1}$$

(**funcional**) a condición de que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están sometidas a restricciones en forma de igualdades o desigualdades lineales:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \leqslant 0, \ \ldots, \ x_k \geqslant 0^{1)} \quad (k \geqslant n) \tag{2}$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

DEFINICIÓN 1. *Llámase* **dominio de valores admisibles** *del problema de programación lineal (o más brevemente,* **dominio admisible***) al conjunto Ω de todos los valores posibles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen todas las desigualdades* (2) *y* (3).

El dominio admisible Ω es el dominio de definición de la función S.

En virtud del teorema del párrafo precedente se deduce que *el dominio admisible del problema de programación lineal es un poliedro convexo* (que puede representar un conjunto vacío, si el sistema de desigualdades (1), (3) es incompatible).

DEFINICIÓN 2. *El conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ contenidos en el dominio Ω para los cuales la función de utilidad* (1) *toma su valor mínimo o máximo según el sentido del problema se llama* **solución** *del problema de programación lineal (o* **plan óptimo***). El problema de programación lineal se llama* **resoluble***, si existe por lo menos una solución del mismo.*

Teóricamente tres casos son posibles: A) Las condiciones (2), (3) son contradictorias y, por consiguiente, el dominio admisible Ω es vacío. El proble-

---

1) La desigualdad de sentido opuesto $x_p \leqslant 0$ se reduce a desigualdades del tipo (2), si se introduce una nueva coordenada $x'_p = -x_p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$.

ma (1), (2), (3) no admite solución alguna. B) El dominio Ω es ilimitado; el problema (1), (2), (3) puede tener solución o puede no tenerla. C) El sistema de condiciones (2), (3) es compatible y el dominio admisible Ω está acotado. En virtud del teorema de Weierstrass (§ 11 del cap. XX) el problema de programación lineal (1), (2), (3) es resoluble. En adelante nos limitamos a estudiar solamente el caso C).

Según la teoría general (véanse los §§ 10, 11 del cap. XX), la función de utilidad (1) alcanza su extremo absoluto en un punto crítico o en la frontera Γ del dominio admisible Ω. Como sus derivadas parciales

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

no se anulan simultáneamente en ninguna parte del dominio Ω, la función de utilidad S alcanza su extremo absoluto en la frontera Γ del dominio admisible Ω. Este resultado puede ser precisado.

TEOREMA. *Una función de utilidad lineal puede adquirir su extremo absoluto estricto en los puntos extremos del dominio admisible.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente sea

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \equiv \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$$

una función de utilidad, $\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y Ω sea su dominio admisible. Supongamos, por ejemplo, que $S(\xi) = M$, donde $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in \Omega$, es un **máximo estricto** de la función de utilidad $S(x)$ y ξ es un punto no final del dominio convexo Ω. En este caso existe un segmento no nulo $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] \subset \Omega$ para el cual el punto ξ es interior, es decir,

$$\xi = \alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{z}, \tag{4}$$

donde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, y es evidente que $\xi \neq \boldsymbol{y}$ y $\xi \neq \boldsymbol{z}$. Puesto que $S(\xi) = M$ es un máximo estricto de la función $S(x)$, eligiendo un segmento $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ suficientemente pequeño lo que se puede evidentemente, lograr, tendremos

$$S(y) < M, \quad S(z) < M. \tag{5}$$

De la igualdad (4) teniendo en cuenta que $S(x)$ es una función lineal homogénea obtenemos

$$S(\xi) = \boldsymbol{c} \cdot (\alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{z}) = \alpha (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{y}) + \beta (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{z}) =$$
$$= \alpha S(y) + \beta S(z) < \alpha M + \beta (M) = M.$$

Esto nos conduce a una contradicción. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. En el caso general se puede demostrar que el extremo absoluto de la función lineal de utilidad $S(x)$, si él existe, se realiza siempre en los puntos extremos del dominio admisible convexo Ω, es decir, en los vértices del poliedro Ω (es posible, claro está, que el extremo absoluto de la función de utilidad se alcance también en otros puntos; por ejemplo, la función $S(x)$ puede tener su mayor valor en todos los puntos de una cara del poliedro Ω, etc.).

De este modo, la resolución del problema de la programación lineal se reduce a la búsqueda de un número finito de valores de la función de utilidad y la comparación entre ellos.

EJEMPLO. Hallar los valores menor y mayor de la función

$$S = x_1 + 2x_2$$

en el dominio Ω: $0 \leqslant x_1 \leqslant 20$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 20$, $x_1 - x_2 \leqslant -30$.

El dominio Ω es un cuadrilátero de vértices A $(20, 0)$, B $(20, 50)$, C $(0, 30)$, D $(0, 10)$ (fig. 278). Tenemos

$$S(A) = 20, \quad S(B) = 120,$$
$$S(C) = 60, \quad S(D) = 20.$$

Por consiguiente, el menor valor de la función S en el dominio Ω es igual a $m = 20$ (en los vértices A y D) y el mayor valor es $M = 120$ (en el vértice B).

Este resultado se vuelve geométricamente claro, si se trazan las líneas de nivel de la función S, es decir, las rectas $x_1 + 2x_2 = \text{const}$.

Sin embargo, esta solución tan sencilla del problema es posible solamente en los casos más simples. El «método de selección» utilizado aquí incluso en el caso cuando el número n de variables y el número m de desigualdades son relativamente pequeños conduce a cálculos considerables y exige recurrir a computadoras rápidas. Por eso fueron creados métodos que permiten simplificar el examen de vértices del dominio admisible (método simplex, método del potencial, etc.); estos métodos se describen en las obras especiales.

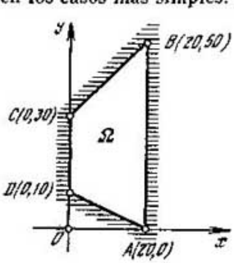

Fig. 278

Indicaremos para concluir este párrafo dos problemas concretos que se resuelven por el método de la programación lineal.

1. **Organización del abastecimiento.** Sea un centro consumidor que efectúa su abastecimiento de un cierto producto homogéneo (por ejemplo, de patatas) a partir de n puntos.

Designemos por x_i la cantidad de producto (en toneladas, por ejemplo) que compra el centro en el i-ésimo punto y por c_i el precio de la unidad de producto (incluyendo el pago del transporte) en este punto, $i = 1, 2, \ldots, n$. Las constantes c_i son diferentes porque el producto es más barato en un punto y más caro en otro. Además, los puntos se sitúan a diferentes distancias del centro y, por consiguiente, los gastos de transporte son también distintos. En este caso, para un plan dado de compras los gastos del centro se expresan por

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i. \tag{6}$$

Si a designa la necesidad del centro en el producto dado, debe ser realizada la condición

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a. \tag{7}$$

Además la cantidad del producto que se elabora en el i-ésimo punto está limitada por un cierto valor b_i. Es posible también que la capacidad de transporte que puede ser utilizada para llevar el producto al centro está limitada por el valor b_i'. En este caso es natural imponerle a x_i las restricciones:

$$0 \leqslant x_i \leqslant \beta_i, \tag{8}$$

donde $\beta_i = \min(b_i, b_i')$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Con un plan racional de compras del producto, los gastos del centro deben ser mínimos. De este modo, llegamos al problema de la programación lineal: hallar el valor mínimo de la función de gastos (6) con las condiciones de (7) y (8). En este caso, el problema se resuelve fácilmente.

II. **El problema del transporte.** Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ puntos de fabricación de un cierto producto homogéneo, y que los centros consumidores del mismo estén situados en puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Supongamos que los gastos de transporte de una unidad de producto del punto A_i al punto B_j son iguales a c_{ij} unidades monetarias y la cantidad de productos (en toneladas, por ejemplo) transportados de A_i a B_j es x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). En un tal caso los gastos totales de transporte serán

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{9}$$

El volumen de producción en el punto A_i está limitado por un cierto valor a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) que depende de la capacidad de producción de la empresa. Suponiendo que toda la producción se envía a los puntos de consumo, tenemos las condiciones

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

Además, la necesidad del producto para el punto B_j es dictada por los intereses de la producción y constituye un valor determinado b_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Por eso,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

Es necesario organizar un plan de transporte tal, que los gastos de transporte totales S sean mínimos, asegurándose de que el producto fabricado en los puntos A_i se consume enteramente (condición (10)) y de que las necesidades de los puntos consumidores (condición (11)) será completamente satisfecha. Esto es un problema típico de la programación lineal.

Se puede demostrar que para que el problema del transporte tenga solución es necesario y suficiente el cumplimiento de las condiciones

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{12}$$

es decir, que el volumen total de producción sea igual al volumen total del consumo.

Anexos

A. CONSTANTES IMPORTANTES

$\pi = 3{,}14159,$	$\pi^{-1} = 0{,}31831$
$\pi^2 = 9{,}86960,$	$\pi^{-2} = 0{,}10132,$
$e = 2{,}71828,$	$e^{-1} = 0{,}36788,$
$e^2 = 7{,}38906,$	$e^{-2} = 0{,}13534,$
$M = \log e = 0{,}43429,$	$M^{-1} = \ln 10 = 2{,}30259.$

B. LISTA DE FÓRMULAS

I. Geometría analítica en el plano

1. *Traslación paralela* del sistema de coordenadas

$$x' = x - a, \quad y' = y - b,$$

donde $O'(a, b)$ es el nuevo origen de las coordenadas, (x, y), son las coordenadas viejas de un punto, $[x', y']$ son sus nuevas coordenadas.

2. *Rotación de un sistema de coordenadas* (el origen de coordenadas queda fijo)

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \quad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha,$$

donde (x, y) son las coordenadas viejas de un punto, $[x', y']$ son sus nuevas coordenadas, α es el ángulo de giro.

3. *Distancia entre dos puntos* (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

4. Coordenadas del punto que divide un segmento de extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) *en una relación dada* l:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}.$$

Para $l = 1$ tenemos las coordenadas *del centro del segmento.*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{1}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

5. *Área de un triángulo* de vértices $(x_1, y_1,)$ (x_2, y_2), (x_3, y_3):

$$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)].$$

6. Ecuación de una recta *con coeficiente angular*

$$y = kx + b,$$

donde $k = \operatorname{tg} \varphi$ (coeficiente angular) es la pendiente de la recta respecto al eje Ox, y b es la magnitud del segmento cortado por la recta sobre el eje Oy.

7. $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{k'-k}{1+k'k}$ es *la tangente* del ángulo de dos rectas con coeficientes angulares k y k'. *Condición de paralelismo de dos rectas*: $k' = k$; *condición de perpendicularidad de dos rectas*: $k' = -\dfrac{1}{k}$.

8. Ecuación de una recta *que pasa por un punto dado* (x_1, y_1):

$$y - y_1 = k\,(x - x_1),$$

donde k es el coeficiente angular de la recta.

9. Ecuación de una recta *que pasa por dos puntos* (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

10. Ecuación de una recta *que corta los segmentos* a y b *sobre los ejes de las coordenadas*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

11. *Ecuación general* de la recta

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

12. *Distancia de un punto* (x_1, y_1) *a la recta* $Ax + By + C = 0$:

$$\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

13. *Ecuación de la circunferencia* con centro (x_0, y_0) y radio R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

14. *Ecuación canónica de la elipse* de semiejes a y b:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Los focos de la elipse son $F\,(c, 0)$ y $F'\,(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

15. *Radios focales* del punto (x, y) de la elipse (1):

$$r = a - \varepsilon x; \quad r' = a + \varepsilon x,$$

donde $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ es *la excentricidad de la elipse.*

16. *Ecuaciones canónicas de la hipérbola* de semiejes a y b:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Los focos de la hipérbola son $F\,(c, 0)$ y $F'\,(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

17. *Radios focales del punto* (x, y) de la hipérbola (2):

$$r = \pm(\varepsilon x - a), \quad r' = \pm(\varepsilon x + a),$$

donde $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ es *la excentricidad de la hipérbola.*

18. *Asíntotas de la hipérbola* (2):

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

19. *Gráfica de una proporcionalidad inversa*

$$xy = c \quad (c \neq 0)$$

es una hipérbola equilátera con asíntotas $x = 0$ e $y = 0$.

20. *Ecuación canónica de una parábola* de parámetro p:

$$y^2 = 2px.$$

El foco de la parábola es $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$; *la ecuación de la directriz* es $x = -\frac{p}{2}$; *el radio focal de un punto* (x, y) de la parábola es $r = x + \frac{p}{2}$.

21. *Gráfica de un trinomio de segundo grado*

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

es una parábola vertical de vértice $O'\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$.

22. *Coordenadas polares* de un punto de coordenadas rectangulares x e y:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Coordenadas rectangulares de un punto de coordenadas polares ρ y φ:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

23. *Ecuaciones paramétricas de una circunferencia* de radio R y de centro en el origen de las coordenadas:

$$x = R \cos t, \quad y = R \operatorname{sen} t$$

(t es el parámetro).

24. *Ecuaciones paramétricas de una elipse de semiejes a y b*:

$$x = a \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$$

25. *Ecuaciones paramétricas de una cicloide*

$$x = a (t - \operatorname{sen} t), \quad y = a (1 - \cos t).$$

II. Cálculo diferencial de una función de una variable

1. *Teoremas fundamentales sobre los límites:*

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x) - h(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) - \lim\limits_{x \to a} h(x)$.

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

en particular,

$$\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x).$$

c) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) : \lim\limits_{x \to a} g(x)$ $(\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0)$.

2. *Límites destacados*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e=2{,}71828\ldots$

3. *Relación entre los logaritmos decimales y los logaritmos naturales*:

$$\log x = M \ln x,$$

donde $M = \log e = 0{,}43429\ldots$

4. *Incremento de la función* $y = f(x)$ correspondiente al incremento Δx del argumento x:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

5. *Condición de continuidad* de una función $y = f(x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Propiedad principal de una función continua:

$$\lim_{x\to x_1} f(x)=f(\lim_{x\to x_1} x).$$

6. *Derivada*

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Geométricamente $y' = f'(x)$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa x.

Para las reglas de derivación y la tabla de fórmulas de derivadas fundamentales véase el § 13 del cap. X.

7. *Teorema de Lagrange* sobre el incremento finito de una función derivable:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

donde $\xi \in (x_1, x_2)$.

8. Una función $y = f(x)$ *crece*, si $f'(x) > 0$ y *decrece*, si $f'(x) < 0$.

9. Regla de L'Hospital para las indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

si el límite a la derecha existe.

10. *Fórmula de Taylor local*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

donde $f^{(n)}(x)$ existe en un cierto entorno completo del punto x_0.

11. a) *Condición necesaria de existencia del extremo de una función* $f(x)$ en un punto x_0: $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe.

b) *Condiciones suficientes de existencia del extremo de una función* $f(x)$ *en un punto* x_0:

1) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - h_1) f'(x_0 + h_2) < 0$ para todos los $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ suficientemente pequeños, o

2) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.

12. a) La gráfica de una función $y = f(x)$ es *cóncava hacia arriba*, si $f''(x) > 0$ y *cóncava hacia abajo*, si $f''(x) < 0$.

b) *La condición necesaria de existencia de un punto de inflexión* de la gráfica de la función $y = f(x)$ en $x = x_0$: $f''(x_0) = 0$ ó $f''(x_0)$ no existe.

Condición suficiente para que exista un punto de inflexión en $x = x_0$:

$$f''(x_0) = 0, \quad f''(x_0 - h_1) f''(x_0 + h_2) < 0$$

para todos los $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ suficientemente pequeños.

13. Si una función $f(x)$ es continua en un segmento $[\alpha, \beta]$ y $f(\alpha) f(\beta) < 0$, entonces la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ puede ser aproximadamente calculada por las fórmulas:

a) $$\xi_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} (\beta - \alpha)$$

(*método de las cuerdas*);

b) $$\hat{\xi}_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \text{ donde } f'(\alpha) \neq 0, \; f(\alpha) f''(\alpha) > 0$$

(*método de las tangentes*).

14. *Diferencial de una variable independiente* x: $dx = \Delta x$. *Diferencial de una función* $y = f(x)$: $dy = y' \, dx$. Relación entre el incremento Δy de una función y la diferencial dy de la función:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x,$$

donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Para las propiedades fundamentales y las fórmulas de las diferenciales, véase el § 7 del cap. XII.

15. *Incremento pequeño* de una función derivable:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x.$$

16. *Diferencial segunda* de una función $y = f(x)$, donde x es una variable independiente $(d^2x = 0)$:

$$d^2y = y'' \, dx^2.$$

III. Cálculo integral

1. Si $dy = f(x) \, dx$, entonces

$$y = \int f(x) \, dx$$

(*integral indefinida*).

2. *Propiedades principales de la integral indefinida*:

a) $d \int f(x) \, dx = f(x) \, dx$, $\quad \left[\int f(x) \, dx \right]' = f(x)$;

b) $\int dF(x) = F(x) + C$, $\qquad$ c) $\int A f(x) \, dx = A \int f(x) \, dx \quad (A \neq 0)$;

d) $\int [f(x) + g(x) - h(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx - \int h(x) \, dx$.

Para la tabla de integrales indefinidas véase el § 3 del cap. XIII.

3. *Métodos principales de integración:*

a) *Integración por descomposición*:

$$\int f(x) \, dx = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx,$$

donde $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

b) *Integración por sustitución*: si $x=\varphi(t)$, entonces

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

c) *Integración por partes*

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

4. *Fórmula de Newton-Leibniz*: si $f(x)$ es continua y si $F'(x)=f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

5. *La integral definida como el límite de la suma integral*:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i,$$

donde $\overline{x}_i\in[x_i,\ x_{i+1}]$ y $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

6. *Propiedades principales de la integral definida* (las funciones examinadas son continuas):

a) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$; b) $\int_a^a f(x)\,dx=0$; c) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$;

d) $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$; e) $\int_a^b Af(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx$;

f) $\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b h(x)\,dx$;

g) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$, $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt=-f(x)$.

7. *Teorema del valor medio*: si $f(x)$ es continua en $[a,\ b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(c),$$

donde $a<c<b$.

8. *Fórmula de integración por partes en una integral definida*:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

9. *Fórmula del cambio de variable en una integral definida:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

donde $a=\varphi(\alpha)$ y $b=\varphi(\beta)$.

10. *Fórmula de los trapecios:*

$$\int_a^b y\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right),$$

donde $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_0=a$ y $x_n=b$, $y=f(x)$, $y_i=f(x_0+ih)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$.

11. *Fórmula de Simpson*

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right],$$

donde $h=\dfrac{1}{2}(b-a)$.

12. *Integral impropia:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

13. *Area de un trapecio curvilíneo* limitado por una línea continua $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$, el eje Ox y dos verticales $x=a$ y $x=b$ $(a<b)$:

$$S=\int_a^b y\,dx.$$

14. *Area de un sector* limidato por una línea continua $\rho=f(\varphi)$ (ρ y φ son coordenadas polares) y dos rayos $\varphi=\alpha$ y $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi.$$

15. *Longitud del arco* de una curva suave $y=f(x)$ *en coordenadas rectangulares* x e y; entre el punto $x=a$ y el punto $x=b$ $(a<b)$:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

16. *Longitud del arco de una curva suave* $\rho=f(\varphi)$ *en coordenadas polares* ρ y φ, desde el punto $\varphi=\alpha$ hasta el punto $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$:

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$

17. *Longitud del arco de una curva suave $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dada en forma paramétrica ($t_0 < T$):*

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

18. *Volumen de un cuerpo* con la sección transversal conocida $S(x)$:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

19. *Volumen de un cuerpo de revolución:*
a) alrededor del eje Ox:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx \quad (a < b);$$

b) alrededor eje Oy:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\, dy \quad (c < d).$$

20. *Trabajo de una fuerza variable* $F = F(x)$ en un intervalo $[a, b]$:

$$A = \int_a^b F(x)\, dx.$$

IV. Números complejos, determinantes y sistemas de ecuaciones

1. *Número complejo* $z = x + iy$, donde $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ son números reales e $i^2 = -1$. *Módulo de un número complejo*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

Igualdad de números complejos

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ e } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

2. *Número conjugado para el número complejo* $z = x + iy$:

$$\bar{z} = x - iy.$$

3. *Operaciones aritméticas sobre los números complejos* $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$:

a) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)$;

b) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

$(z_2 \neq 0)$.

En particular

$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}),\ |z|^2=z\bar{z}.$$

4. *Forma trigonométrica del número complejo*

$$z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

donde $r=|z|$ y $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

5. *Teoremas sobre el módulo y el argumento:*

a) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

b) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$, $\operatorname{Arg} z_1z_2=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$;

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2\ (z_2\neq 0)$;

d) $|z^n|=|z|^n$, $\operatorname{Arg} z^n=n\operatorname{Arg} z$ (n es entero).

6. *Raíz de un número complejo:*

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

7. *Forma exponencial del número complejo:*

$$z=re^{i\varphi},$$

donde $r=|z|$ y $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

8. *Determinante de segundo orden:*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

9. *La solución del sistema*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{array}\right\}$$

se da por las fórmulas

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D}\ \text{(regla de Cramer)},$$

donde

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0,\ D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$$

10. *Las soluciones de un sistema homogéneo*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\end{array}\right\}$$

se dan por las fórmulas

$$x=D_1t,\quad y=-D_2t,\quad z=D_3t\quad (-\infty<t<+\infty),$$

donde

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},$$

son los menores de la matriz

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|.$$

11. *Determinante de tercer orden*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1,$$

donde

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_1=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

son los cofactores (complementos algebraicos) de los elementos correspondientes del determinante.

12. *La solución del sistema*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{aligned}\right\}$$

se da por *las fórmulas de Cramer*

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D},$$

donde

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0, \quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

13. Las soluciones del sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{aligned}\right\}$$

si

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0, \quad \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

se define a partir del subsistema (véase 10)

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{aligned}\right\}$$

V. Elementos del álgebra vectorial

1. La suma de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es el vector $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ que es la resultante de la línea vectorial constituida por $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

2. La diferencia entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es el vector $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, donde $-\boldsymbol{b}$ es el vector opuesto al vector $\boldsymbol{b}$.

3. *El producto de un vector* $\boldsymbol{a}$ *por un escalar* k es un vector $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ tal, que $b = |k|\,a$, donde $a = |\boldsymbol{a}|$ y $b = |\boldsymbol{b}|$, además, el sentido del vector $\boldsymbol{b}$ coincide con el del vector $\boldsymbol{a}$, si $k > 0$ y tiene el sentido opuesto, si $k < 0$.

4. Dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son *colineales*, si $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ (k es un escalar).

Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ son *coplanares*, si $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ (k, l son escalares).

5. *El producto escalar de dos vectores* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es un escalar

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi,$$

donde $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son *ortogonales*, si $\boldsymbol{ab} = 0$.

Si $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ y $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, entonces

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

6. *El producto vectorial de dos vectores* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es el vector

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$

donde $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ y $c = ab \operatorname{sen}\varphi$ ($\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$) y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es un triedro derecho.

Si $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ y $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, entonces

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

donde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ son vectores unitarios orientados según los ejes de las coordenadas correspondientes.

7. *El producto mixto de vectores*

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

es un volumen (con el signo) del paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Si $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\boldsymbol{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, entonces

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

VI. Geometría analítica en el espacio

1. *Las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto* M (x, y, z) del espacio $Oxyz$ son

$$x = r_x, \quad y = r_y, \quad z = r_z,$$

donde $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ es el radio vector del punto M.

2. *La longitud y el sentido de un vector* $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ se determinan por las fórmulas

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{a}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{a}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{a}$ $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$ donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son *los cosenos directores* del vector $\boldsymbol{a}$.

3. *Distancia entre dos puntos* M_1 (x_1, y_1, z_1) y M_2 (x_2, y_2, z_2):

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4. *La ecuación de un plano* con vector normal $N = \{A, B, C\} \neq 0$ que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$N\cdot(r - r_0) = 0, \tag{1}$$

donde r es el radio vector del punto corriente $M(x, y, z)$ y r_0 es el radio vector del punto M_0.

La ecuación (1) en coordenadas, es de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

o bien

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ *(ecuación general del plano)*.

5. *La distancia de un punto* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *a un plano* (2) es igual a

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. *Ecuación vectorial de la recta en el espacio*:

$$r = r_0 + st, \tag{3}$$

donde $r = \{x, y, z\}$ es el radio vector corriente de la recta, $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ es el radio vector de un punto fijo de la recta, $s = \{m, n, p\} \neq 0$ es el vector director de la recta y t es un parámetro $(-\infty < t < +\infty)$.

La ecuación de la recta (3) en coordenadas es de la forma

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

7. *La línea recta formada por la intersección de dos planos*, está dada por la ecuación

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

El vector director de la recta (4) es $s = N \times N'$, donde $N = \{A, B, C\}$, $N' = \{A', B', C'\}$.

8. *Ecuación de una esfera* de radio R, con centro (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

9. *Ecuación de un elipsoide triaxial* con semiejes a, b y c:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

10. *Ecuación de un paraboloide de rotación* alrededor del eje Oz:

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

VII. Cálculo diferencial de funciones de varias variables

1. *Condición de continuidad de una función* $z = f(x, y)$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)] = 0,$$

o bien

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ y_1 \to y}} f(x_1, y_1) = f(x, y).$$

Se define análogamente la continuidad de una función $u = f(x, y, z)$.

2. *Derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$* respecto a las variables x e y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

3. *Diferencial total de una función $z = f(x, y)$* respecto a las variables independientes x e y:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

donde $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$.

Si $u = f(x, y, z)$, entonces

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

4. *Incremento pequeño de una función diferenciable*

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

5. *Derviada de una función $u = f(x, y)$ según la dirección $l = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$* es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta.$$

De un modo análogo, si $u = f(x, y, z)$ y $l = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma.$$

6. *Los puntos de extremo* (más exactamente los puntos de extremo posible) de una función derivable $u = f(x, y, z)$ se definen mediante las ecuaciones:

$$f'_x(x, y, z) = 0, \; f'_y(x, y, z) = 0, \; f'_z(x, y, z) = 0.$$

7. *El gradiente de un campo escalar $u = f(x, y, z)$* es un vector

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

De aquí,

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

8. Si $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ es una diferencial total en un dominio G, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ((x, y) \in G)$$

(*criterio de existencia de la diferenical total*).

VIII. Series

1. *Definición principal*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n.$$

2. *Criterio necesario de convergencia de una serie*: si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

3. *Serie geométrica*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \text{ si } |q| < 1.$$

4. *Serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

(es divergente).

5. *Regla de d'Alembert*. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$ una serie que admite el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

En este caso: a) si $l < 1$, esta serie es convergente; b) si $l > 1$, la serie es divergente y $u_n \not\to 0$.

6. *Convergencia absoluta*. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es también convergente (*absolutamente*).

7. *Criterio de Leibniz*. Si $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$ y $v_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, la serie alternada

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$$

es convergente.

8. *El radio de convergencia* de una serie de potencias

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

se determina por la fórmula

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

si esta última tiene sentido.

9. *Serie de Maclaurin*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots$$

10. *Desarrollo de funciones fundamentales en serie de potencias:*

a) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\ (|x|<1)$;

b) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\ (-1<x\leqslant 1)$;

c) $\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\ldots\ (|x|\leqslant 1)$;

d) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ (|x|<+\infty)$;

e) $\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ $(|x|<+\infty)$;

f) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ (|x|<+\infty)$;

g) $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ \ldots\ [m-(n-1)]}{1\cdot 2\ \ldots\ n}\times$ $\times x^n+\ldots\ (|x|<1)$.

11. *Serie de Taylor*:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

12. *Series en un dominio complejo*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+i\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

13. *Convergencia absoluta de series con términos complejos.* Si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n+iv_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ es también convergente (absolutamente).

14. *Fórmulas de Euler*

$$e^{ix}=\cos x+i\operatorname{sen} x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\operatorname{sen} x.$$

15. *La serie trigonométrica de Fourier* de una serie suave a trozos $f(x)$ de período $2l$ es de la forma

$$f(x)=\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1)$$

donde

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

coeficientes de Fourier de la función $f(x)$.

Para una función $f(x)$ de período 2π obtenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx),$$

donde

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left\{\begin{matrix}\cos nx\\ \operatorname{sen} nx\end{matrix}\right.dx\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma de la serie (1) es igual a

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

16. Si una función $f(x)$ de período $2l$ *es par*, entonces

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Si una función $f(x)$ de período $2l$ *es impar*,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

IX. Ecuaciones diferenciales

1. *Una ecuación diferencial con variables separables*

$$X(x)\,Y(y)\,dx+X_1(x)\,Y_1(y)\,dy=0$$

tiene la *integral general*

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy=C.\qquad(1)$$

Las soluciones singulares que no forman parte de la integral (1) se determinan a partir de las ecuaciones

$$X_1(x)=0\quad\text{y}\quad Y(y)=0.$$

2. *Una ecuación diferencial homogénea* de primer orden

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0,$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas continuas del mismo grado, se resuelve con ayuda de la sustitución

$$y = ux$$

(u es una función nueva).

3. *La ecuación diferencial lineal* de primer orden

$$a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x) = 0$$

puede resolverse con ayuda de la sustitución

$$y = uv.$$

4. *Casos integrables* de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

a) si

$$y'' = f(x),$$

la solución general es

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + C_1x + C_2;$$

b) si

$$y'' = f(y)$$

la solución general es

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} = \pm (x + C_2);$$

c) si

$$y'' = f(y'),$$

entonces *la integral general* de la ecuación puede ser hallada a partir de la relación

$$\int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1,$$

donde $y' = p$.

5. *Casos de reducción del orden* de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

a) si

$$y'' = f(x, y'),$$

entonces, tomando $y' = p$ obtenemos

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p);$$

b) si

$$y'' = f(y, y'),$$

entonces, tomando $y' = p$, obtenemos

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

6. *La solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea* de segundo orden

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

es de la forma

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

donde y_1 e y_2 son soluciones particulares linealmente independientes.

7. *La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea* de segundo orden

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

es de la forma

$$y = \overline{y} + z,$$

donde $\overline{y}$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y z es una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

8. **Tabla 1.**

Forma general de soluciones de la ecuación homogénea $y'' + py' + qy = 0$ (p y q son constantes) según las raíces de la ecuación característica $k^2 + pk + q = 0$

Nº de orden	Naturaleza de las raíces k_1 y k_2 de la ecuación característica	Forma de la solución general
I	Las raíces k_1 y k_2 son reales y distintas	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
II	Las raíces son iguales: $k_1 = k_2$	$y = (C_1 + C_2x)\,e^{k_1x}$
III	Las raíces son complejas: $k_1 = \alpha + i\beta$ y $k_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$

9. **Tabla 2**

Naturaleza de la solución particular z de una ecuación no homogénea $y'' + py' + qy = f(x)$ (p y q son constantes), en función del segundo miembro $f(x)$

Nº de orden	Segundo miembro	Casos	Solución particular
I	$f(x) = ae^{mx}$ (a, m son constantes)	1) $m^2 + pm + q \neq 0$ 2) $m^2 + pm + q = 0$	$z = Ae^{mx}$ $z = Axe^{mx}$ o $z = Ax^2e^{mx}$
II	$f(x) = M \cos \omega x + N \operatorname{sen} \omega x$ (M, N, ω son constantes; $\omega \neq 0$)	1) $p^2 + (q - \omega^2)^2 \neq 0$, 2) $p = 0$, $q = \omega^2$	$z = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x$, $z = x(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x)$
III	$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c son constantes)	1) $q \neq 0$, 2) $q = 0$, $p \neq 0$	$z = Ax^2 + Bx + C$, $z = x(Ax^2 + Bx + C)$

A, B, C son coeficientes constantes indeterminados.

X. Integrales curvilíneas

1. *La integral curvilínea de primera especie* de una función continua $f(x, y)$ tomada sobre una curva suave a trozos K: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ es

$$\int_K f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, |dt|. \qquad (1)$$

Si la curva K está dada por la ecuación $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ tenemos

$$\int_K f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2x}\, dx.$$

Se define análogamente una integral curvilínea de primera especie en el caso de una curva K espacial.

Si $f(x, y)$ es la densidad lineal de la curva K, la integral (1) representa la masa de la línea K.

2. *La integral curvilínea de segunda especie* de un par de funciones continuas $X(x, y)$, $Y(x, y)$ tomada a lo largo de un camino suave a trozos K: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ se define mediante la fórmula

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta [X(x(t), y(t))\, x'(t) + Y(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt \qquad (2)$$

Si el camino K está dado por la ecuación $y = y(x)$ $(x \in [a, b])$, entonces

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = \int_a^b [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))\, y'(x)]\, dx.$$

Se define análogamente la integral curvilínea de segunda especie para una curva K espacial.

Físicamente la integral (2) representa el trabajo de una fuerza variable $F = \{X(x, y)\ Y(x, y)\}$ a lo largo del camino K.

3. Si se cumple la condición $X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = dU(x, y)$,

la integral (2) no depende del camino de integración K y

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = U(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1), \qquad (3)$$

donde (x_1, y_1) es el punto inicial y (x_2, y_2) es el punto final de K.

Físicamente, la integral (3) representa el trabajo de una fuerza cuyo potencial es $U(x, y)$.

XI. Integrales dobles y triples

1. Se llama *integral doble* de una función $f(x, y)$ extendida a un dominio S al número

$$\iint_S f(x, y)\, dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i, \qquad (1)$$

donde $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y d es el diámetro mayor de las regiones elementales ΔS_i.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la integral (1) representa geométricamente el volumen de un cilindroide recto construido sobre la base S y limitado en su parte superior por una superficie $z = f(x, y)$.

2. Si el dominio de integración S es estándar respecto al eje Oy y está definido por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, donde $y_1(x)$, $y_2(x)$ son funciones continuas, *la integral doble en coordenadas cartesianas rectangulares* de una función continua $f(x, y)$, se expresa por la fórmula

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

3. *La integral doble en coordenadas polares* φ y r, donde

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

es de la forma

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \iint_S f(r\cos\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Si el dominio de integración S está definido por las desigualdades $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)$, entonces

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rf(r\cos\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,dr.$$

4. Si $\rho = f(x, y)$ es la densidad superficial de una placa S, su masa es

$$m = \iint_S \rho(x, y)\,dS = \iint_S \rho\,dx\,dy \tag{2}$$

(*significación física de la integral doble*).

5. *Los momentos estáticos de la placa S* respecto a los ejes de coordenadas Ox y Oy, se expresan por las integrales

$$S_x = \iint_S \rho y\,dS, \quad S_y = \iint_S \rho x\,dS,$$

donde $\rho = f(x, y)$ es la densidad superficial de la placa.

6. *Las coordenadas del centro de masas de una placa S* se expresan por las fórmulas

$$x_0 = \frac{S_y}{m}, \quad y_0 = \frac{S_x}{m}, \tag{3}$$

donde m es la masa de la placa (véase (2)).

Para una placa homogénea en las fórmulas (2) y (3) se puede tomar $\rho = 1$.

7. *Los momentos de inercia de la placa S* respecto a los ejes de coordenadas Ox y Oy son expresados por las integrales

$$I_x = \iint_S \rho y^2\,dS, \quad I_y = \iint_S \rho x^2\,dS,$$

donde $\rho = \rho(x, y)$ es la densidad superficial de la placa.

8. Se llama *integral triple* de una función $f(x, y, z)$ extendida a un dominio V, al número

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i, \qquad (4)$$

donde $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y d es el diámetro mayor de las regiones ΔV_i.

Si $f(x, y, z)$ es la densidad en el punto (x, y, z), la integral triple (4) representa la masa que rellena el volumen V.

9. *El volumen* V de un cuerpo es igual a

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx\, dy\, dz.$$

10. Si el dominio de integración V se define por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$, donde $y_i(x)$, $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ son funciones continuas, entonces *la integral triple de una función continua* $f(x, y, z)$ *en coordenadas rectangulares* puede ser calculada por la fórmula

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

XII. Teoría de las probabilidades

1. Se entiende por *suma* de dos sucesos A y B: $A + B = A \cup B$,

el suceso que tiene lugar solamente cuando se realiza por lo menos uno de los sucesos A o B.

2. Se entiende por *producto* de dos sucesos A y B: $AB = A \cap B$,

el suceso que tiene lugar solamente cuando se realizan a la vez los sucesos A y B.

3. *La probabilidad* (en el sentido clásico) *de un suceso* A

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (0 \leqslant P(A) \leqslant 1)$$

es la relación del número m de todos los casos elementales favorables al suceso A respecto al número n de todos los resultados elementales posibles con iguales posibilidades de producirse.

4. *Probabilidad de un suceso contrario*: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5. *Teorema de la adición* para dos sucesos incompatibles A y B:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

En el caso general $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

6. *Teorema de la multiplicación de* las probabilidades:

$$P(AB) = P(A)\, P_A(B),$$

donde $P_A(B)$ es la probabilidad condicional correspondiente del suceso B.

Si los sucesos A y B son independientes, entonces

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

7. *Fórmula de la probabilidad total* $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P_{H_i}(A)$,

donde $H_1, H_2, \ldots, H_n$ forman un grupo completo de hipótesis:

$$A=\sum_{i=1}^{n} H_i A,\quad H_i H_j=0 \text{ para } i \neq j,\quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1.$$

8. *Fórmula de Bayes:*

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\,P_{H_j}(A)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, donde $H_1, H_2, \ldots, H_n$ forman un grupo completo de hipótesis.

9. *Fórmulas fundamentales del análisis combinatorio*:

a) *número de arreglos* de n elementos tomados de a m:

$$A_n^m=n(n-1)\ \ldots\ [n-(m-1)]=\frac{n!}{(n-m)!}\ ;$$

b) *número de permutaciones* de n elementos: $A_n^n=n!$;

c) *número de combinaciones* de n elementos tomados de a m:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\ \ldots\ [n-(m-1)]}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\ .$$

10. *Fórmula del binomio de Newton*:

$$(q+p)^n=q^n+C_n^1q^{n-1}p+C_n^2q^{n-2}p^2+\ldots+p^n.$$

11. *Ley de distribución binominal*: en las condiciones del esquema de Bernoulli la probabilidad de realización de un suceso A exactamente m veces en n ensayos $(0 \leqslant m \leqslant n)$ es

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m q^{n-m},$$

donde $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q=1-p$ es la probabilidad A en un solo ensayo.

12. *Fórmula local de Laplace*: $P_n(m)\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\,e^{-t^2/2}$

(véase el § 11), donde $0<p<1$, $q=1-p$, $t=(npq)^{-1/2}(m-np)$.

13. *Fórmula integral de Laplace:*

$$P(m_1\leqslant m\leqslant m_2)\approx\Phi_0(t_{m_2})-\Phi_0(T_{m_1}),$$

donde $t_m=(npq)^{-1/2}(m-np)$, $\Phi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$

14. *Fórmula de Poisson* $P_n(m)\approx\dfrac{\mu^m}{m!}\,e^{-\mu}$,

donde $\mu=np$, y la probabilidad p es pequeña.

15. *Esperanza matemática* de una variable aleatoria discreta

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ \text{donde } p_i=P(X=x_i)\ (i=1, 2, \ldots, n),\quad \sum_{i=1}^{n} p_i=1,$$

es

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Propiedades esenciales:
1) $M(C)=C$;
2) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;
3) $M(X-Y)=M(X)-M(Y)$;
4) $M(CX)=CM(X)$;
5) $M(XY)=M(X)M(Y)$
(X e Y son independientes).

16. *Dispersión* de una variable aleatoria discreta X;

$$D=M\{[X-M(X)]^2\}=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Propiedades esenciales:
1) $D(C)=0$;
2) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ (X e Y son independientes);
3) $D(CX)=C^2D(X)$.

17. Para la ley binomial de distribución del número de manifestaciones X de un suceso A en n ensayos tenemos
1) $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ ($m=0, 1, 2, \ldots, n$), donde $p=P(A)$, $q=P(\overline{A})$;
2) $M(X)=np$;
3) $D(X)=npq$.

18. Para una variable aleatoria continua X tenemos
a) *función de distribución*

$$\Phi(x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$$

($-\infty<x<+\infty$), donde $\varphi(x)$ es la densidad de probabilidad;
b) *esperanza matemática*

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx;$$

c) *dispersión*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2\varphi(x)\,dx.$$

19. *Para la ley normal de distribución* de una variable aleatoria X la densidad de la probabilidad es de la forma

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2},$$

donde $x_0=M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$.
En este caso

$$P(a\leqslant x\leqslant b)=\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right),$$

donde $\Phi_0(x)$ (véase el § 13) es la integral de probabilidad estándar.

Respuestas

Capítulo I

2. $(0,\ 0)$, $(10,\ 0)$, $(5,\ 5\sqrt{3})$. 3. a) $M\ (1,\ -2)$; b) $M\ (-1,\ 2)$; c) $M\ (2,\ 1)$ d) $M(-2,\ -1)$. 4. $A_1\ (8,\ 4)$; $B_1\ (11,\ 3)$. 5. $x_1 = 6$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = 0$; 6. $C\left(2\frac{4}{5},\ 6\frac{1}{5}\right)$. 7. $B\ (4, 5)$. 8. $\frac{10}{3}\sqrt{2}$. 9. $(4,\ 3)$. 10. $N\left(1\frac{1}{3},\ 1\right)$. 11. $x_i = x_0 + ih$, $y_i = y_0 + ik$ $\quad = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$, donde $h = \frac{x-x_0}{n}$ y $k = \frac{y-y_0}{n}$. 12. 12. 14. $y_1 = 10$; $y_2 = -5$. 15. $15\frac{1}{2}$ ha.

Capítulo II

1. $y = 2x$ e $y = -2x$. 2. $5x + y + 2 = 0$. 3. La circunferencia: $x^2 + y^2 = 4$. 4. a) El conjunto de los ejes de las coordenadas; b) el origen de las coordenadas $(0,\ 0)$; c) dos rectas paralelas al eje Oy situadas a ambos lados de éste a una distancia igual a la unidad; d) dos rectas paralelas al eje Ox y situadas a distancias iguales a 1 y 2 de este eje; e) conjunto de la bisectriz de los I y III cuadrantes y del eje Oy. 6. Los puntos A y B están situados en la curva; los puntos C, D y E no yacen sobre la curva. 7. $(0,\ 2)$; $(-1,\ 0)$; $(2,\ 0)$. 8. $(2,\ 2)$ y $(-2,\ -2)$.

Capítulo III

2. $y = 0$; $y = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}\,(x + 5)$; $y = -\sqrt{3}\,(x - 5)$. 3. $x - 3y + 9 = 0$, $3x + y - 13 = 0$. 4. $12x + 8y - 15 = 0$. 5. $x + 2y = 0$. 6. $7x - 2y - 1 = 0$; $\sqrt{53}$. 7. $7x + 8y - 11 = 0$; $\frac{71}{\sqrt{113}}$. 8. $6x + 5y - 56 = 0$. 9. $x + y - 7 = 0$. 10. $y = 0{,}1x - 5$; 25 m; 150 m. 11. a) $x = 305$, $y = 215$; b) no hay punto de intersección; las rectas son paralelas; c) $x = t$, $y = 2t$, donde t es arbitrario, las rectas coinciden. 12. $y = x$. 13. $(-4,\ 0)$. 14. $x = \frac{ak_2}{k_2 - k_1}$, $y = \frac{ak_1k_2}{k_2 - k_1}$, donde $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$ y $k_2 = \operatorname{tg}\beta$. 15. $\left(1\frac{1}{3},\ 1\right)$. 16. 13. 17. 2; 1; 0. 18. 6,4. 19. 7. 20. $8x - 6y - 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$. 21. $y = \frac{3}{4}x$ e $y = \frac{7}{24}x$.

Capítulo IV

1. a) $C\ (-4,\ 0)$; $R = 5$; b) $x^2 + y^2 = 2x$; c) $x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0$; d) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$. 2. $5x - 7y + 13 = 0$; $\frac{1}{2}\sqrt{74}$. 3. $x - y - 1 = 0$. 4. $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$, $c = 2$, $F\ (2,\ 0)$, $F'\ (-2,\ 0)$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$. 5. a)

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **6.** 4. **7.** a) $a=2$, $b=3/2$, $c=5/2$, $F\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$, $F'\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$, $\varepsilon=1{,}25$; b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **8.** $150/\sqrt{481}$. **9.** 5/3; 5/4. **10.** $F_1F_2=5\sqrt{2}$. **11.** $\pm x\pm y=10$. **12.** 5/3. **13.** $y^2=20x$. **14.** (0, 1); $y=-1$. **15.** 7,5 cm del vértice. **16.** 24. **17.** $y=1+\frac{x^2}{4}$. **18.** $y_1=2x_1^2$, $x_1=x-2$, $y_1=y+3$; $O_1(2,-3)$. **19.** $y_1=-x_1^2$, $x_1=x-2$, $y_1=y-1$; $O_1(2, 1)$. **20.** $y_1^2=x_1$, $x_1=x-\frac{7}{4}$, $y_1=y-\frac{1}{2}$; $O_1\left(\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$. **21.** $h_1=9$ m.

Capítulo V

2. $A(5, 0)$; $B(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; $C(0, 2)$; $D(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. **4.** a) $\rho=\sec\varphi$; b) $\rho=-2\operatorname{cosec}\varphi$; c) $\varphi=\pi/4$ y $\varphi=5\pi/4$; d) $\varphi=\operatorname{arctg}2$ y $\varphi=\pi+\operatorname{arctg}2$; e) $\rho=\sec\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$; f) $\rho=5$. **5.** $\rho=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$. **6.** $x^2+y^2=ax$; circunferencia de centro en el punto $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y de radio $R=\frac{|a|}{2}$. **7.** $y^2=2x+1$ (parábola). **8.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (elipse). **9.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (hipérbola). **10.** $y^2=16x$ (parábola). **11.** 505; (—305; —405).

Capítulo VI

1. $y=bx\left(1-\frac{x}{2h}\right)(0\leqslant x\leqslant h)$. **2.** a) $x\geqslant 2$; b) $|x|\geqslant 1$; c) $0<x<1$; d) $x>-1$. **3.** $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=2$, $f(-x)=x^2+3x+2$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-3x+2x^2}{x^2}$, $f(x+1)=x^2-x$. **4.** $-1{,}25$. **5.** $y=2x-10$. **6.** $f(x)=x^2+2x-3$. **7.** $\varphi[\psi(x)]=2^{2x}$; $\psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$. **8.** $f[f(x)]=1-\frac{1}{x}$; $f\{f[f(x)]\}=x$. **9.** a) $x=\frac{y-3}{2}$; b) $x=\sqrt[3]{1-y^3}$, $x=2\operatorname{Arcsen}y$. **11.** $x_1=-1{,}88$; $x_2=0{,}35$; $x_3=1{,}53$. **12.** 4,49. **13.** 1,8796; 0,6928.

Capítulo VII

1. a) $-3<x<-1$; b) $-\infty<x\leqslant 0$, $6\leqslant x<+\infty$; c) $1/2<x<1$, $1<x<1\frac{1}{2}$; d) $-2\leqslant x\leqslant -1$, $1\leqslant x\leqslant 2$. **2.** $\approx 0{,}4\%$. **3.** Dos. **4.** a) 0; b) 1; c) $-1/2$. **5.** a) 1/6; b) 1/12. **6.** 0. **7.** 5. **8.** 1/2. **9.** $\cos a$. **10.** 2. **11.** $\lim\limits_{a\to 0} x_1=-c/b$; $\lim\limits_{a\to 0} x_2=\infty$. **13.** 1. **14.** 0. **15.** e^{-1}. **16.** e^3. **17.** e^{-2}. **18.** e^{-1}.

Capítulo VIII

1. $\Delta x=90$; $\Delta y=1$. **5.** $-1, -2, -3$. **6.** $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **7.** $0; \pm 1, \pm 2, \ldots$ **8.** 3. **9.** 1/4. **10.** 2. **11.** a) $x=0$; punto de discontinuidad de primera especie; b) $x=1$; punto de discontinuidad de primera especie; c) $x=0$; punto de discontinuidad de segunda especie.

Capítulo X

1. a) $y'=6x-1$; b) $f'(x)=-2/x^3$, $f'(1)=-2$, $f'(-10)=0{,}002$. 2. $y'=$ $=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, $y'=x-\frac{4}{x^3}$. 4. $y'=\frac{a}{a+b}$. 5. $y'=6x^2-2x$. 6. $y'=(3x+1)/2\sqrt{x}$. 7. $y'=x^2\cos x+2x\operatorname{sen}x$. 8. $y'=-2x/(1+x^2)^2$. 9. $y'=$ $=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$. 10. $y'=\frac{2}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}$. 11. $y'=\operatorname{sen}2x$. 12. $y'=2x\cos x^2$. 13. $y'=-\frac{3}{4}\operatorname{sen}x\cos x/2$. 14. $y'=-\frac{3}{2}x^2\operatorname{sen}\frac{x^3}{2}$. 15. $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 16. $y'=\frac{1}{x\ln x}$. 17. $y'=\frac{2\ln x}{x}$. 18. $y'=\frac{2}{x}$. 19. $y'=\frac{1}{\operatorname{sen}x}$. 20. $y'=nx^{n-1}+n^x\ln n$. 21. $y'=-2xe^{-x^2}$. 22. $y'=\frac{x^2}{2}e^{x/2}$. 23. $y'=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 24. $y'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, para $|x|>1$. 25. $y'=-\frac{1}{x^2+1}$. 26. $y'=-\frac{16\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}$. 27. $y'=\frac{x^2}{1+x^2}$. 28. $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 29. $y'=\sqrt{1-x^2}$. 30. $y'=\frac{1}{1-x^4}$. 31. $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$. 32. $y'=\frac{x^2-y}{x-y^2}$. 33. a) $y'=\frac{y}{y-1}$; b) $y'=-3$. 34. a) $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; b) $y'_x=\frac{1+\alpha t}{\omega}e^{\alpha t}$; c) $y'_x=-1$. 35. a) $y''=$ $=(4x^2-2)e^{-x^2}$; b) $y''=-4\operatorname{sen}2x$. 36. $y''=-1/x^2$. 37. $y''=(x^2-4x+2)e^{-x}$. 38. $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-9$. 39. a) $y=12x-16$; b) $y=\pi-x$; c) $x-4y+8=0$. 40. $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. 41. $y=\frac{\sqrt{3}}{5}(20-x)$. 42. a) $y=-x$. b) $4x+y-36=0$; c) $4x+3y=0$. 43. 40π m²/s. 44. $\approx 0{,}8$ m/s. 45. $v=\alpha+\beta t$, $j=\beta$. 46. $v=1-\cos t$; $j=\operatorname{sen}t$.

Capítulo XI

3. $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$. 4. $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ 5. $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. 6. $\frac{1}{6}$. 7. $\ln\frac{3}{2}$. 8. $\frac{1}{3}$. 9. $\frac{2}{\pi}$. 10. 0. 11. 0. 12. $\frac{2}{\pi}$. 13. 2. 14. $\frac{1}{2}$. 15. 1. 16. $\frac{1}{e}$. 17. 1. 18. $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a^2}{4}$ (máx). 19. $x=1$, $y=\frac{1}{3}$ (máx); $x=3$, $y=-1$ (mín). 20. $x=1$, $y=1$ (máx); $x=-1$, $y=-1$ (mín). 21. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$ (máx). 22. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2e}$ (máx). 23. Lados del rectángulo: $a\sqrt{2}$ y $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. 24. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. 25. Altura del cono $=4a/3$. 26. $a/6$, $2a/3$, $2a/3$. 27. $x=1/3$, $y=$ $=2/27$. 28. Dominio de definición: $-\infty<x<+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$. La función es impar. No hay puntos de discontinuidad. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(-\sqrt{3}, 0)$ $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Puntos de extremo: $y_{\text{mín}}=-2$ para $x=-1$ e $y_{\text{máx}}=2$ para $x=1$. Punto de

inflexión: (0, 0). 29. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. La función es no negativa. No hay puntos de discontinuidad. Ceros de la función: $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Puntos de extremo: $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$ y $x = 2$; $y_{\text{máx}} = 1$ para $x = 1$. Puntos de inflexión: $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right)$ y $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right)$. 30. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$. La función es par. No hay puntos de discontinuidad. Cero de la función: $x = 0$. Punto de extremo: $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. Punto de inflexión $(\pm 1/\sqrt{3}, 1/4)$.

31. Dominio de definición: $-\infty < x < 0$ y $0 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. La función es impar. Punto de discontinuidad: $x = 0$. No hay ceros; la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. Puntos de extremo: $y_{\text{máx}} = -2$ para $x = -1$ e $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = 1$. No hay puntos de inflexión; la concavidad es hacia abajo para $x < 0$ y hacia arriba para $x > 0$.

32. Dominio de definición: $-\infty < x < -1$ y $-1 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to-1-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$. Punto de discontinuidad: $x = -1$. Cero de la función: $x = 0$. No hay puntos de extremo; la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$. No hay puntos de inflexión; la concavidad es hacia arriba para $x < -1$ y hacia abajo para $x > -1$.

33. Dominio de definición: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$ y $2 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x\to-2-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to2-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to2+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$. La función es par. Puntos de discontinuidad: $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$. Punto de extremo: $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = 0$. No hay puntos de inflexión; concavidad hacia abajo para $x < -2$ y $x > 2$, y hacia arriba para $-2 < x < 2$.

34. Dominio de definición: $-\infty < x \leqslant 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $y(1) = 0$. No hay puntos de discontinuidad. Ceros de la función: $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$; la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. No hay puntos de discontinuidad. Puntos de extremo: $y_{\text{máx}} = 2\sqrt{3}/9 \approx 0{,}38$ para $x = \frac{2}{3}$ e $y_{\text{mín}} = 0$ (extremo de borde) para $x = 1$. No hay puntos de inflexión; concavidad hacia abajo.

35. Dominio de definición: $0 < x \leqslant 1$; $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$, $y(1) = 0$. Punto de discontinuidad: $x = 0$. Cero de la función: $x = 1$; la función es no negativa. La función es decreciente; el límite mínimo: $y = 0$ para $x = 1$. Punto de inflexión $(3/4, 1/\sqrt{3})$.

36. La función es periódica de período 2π; $y(0) = y(2\pi) = 1$. No hay puntos de discontinuidad. Ceros de función: $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ y $x_2 = \frac{7\pi}{4}$. Puntos de extremo: $y_{\text{máx}} = \sqrt{2}$ para $x = \frac{\pi}{4}$ e $y_{\text{mín}} - \sqrt{2}$ para $x = \frac{5\pi}{4}$. Puntos de inflexión: $(3\pi/4, 0)$ y $(7\pi/4, 0)$.

37. Dominio de definición: $0 < x < +\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} y = 0$ y $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$. Punto de discontinuidad no esencial: $x = 0$. Cero de la función: $x = 1$; la función es negativa para $0 < x < 1$ y positiva para $1 < x < +\infty$. Punto de extremo: $y_{\text{mín}} = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$ para $x = \frac{1}{e}$. No hay puntos de inflexión; concavidad hacia arriba.

INDICACIÓN. Con ayuda de la regla de L'Hospital se demuestra que cuando $N \to +\infty$ el número N crece más lentamente que su logaritmo natural, es decir, $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\ln N}{N} = 0$.

Por eso $\lim\limits_{x\to+0} y = \lim\limits_{x\to+0} x \ln x = \lim\limits_{x\to+0} \frac{-\ln 1/x}{1/x} = 0$.

38. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$. No hay puntos de discontinuidad. Cero de la función: $x = 0$ la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. Punto de extremo: $y_{\text{máx}} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$ para $x = 1$. Punto de inflexión $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$, donde $\frac{2}{e^2} \approx 0{,}27$.

INDICACIÓN. Para hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, se puede utilizar la indicación:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = 0.$$

39. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. La función es impar. No hay puntos de discontinuidad. Cero de la función: $x = 0$; la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. No hay puntos de extremo; la función es creciente. Punto de inflexión: $(0, 0)$, concavidad hacia arriba para $x < 0$ y hacia abajo para $x > 0$.

Capítulo XII

1. $dy = 6x\,dx$. 2. $dy = x\cos x\,dx$. 3. $dy = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx$. 4. $dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 5. $dy = \frac{dx}{x}$. 6. $dy = 2x\,dx = 2(2-t+t^2)(-1+2t)\,dt$. 7. a) $\Delta y = 4$, $dy = 2$; b) $\Delta y = 0{,}211$, $dy = 0{,}2$. 8. $30{,}301$ m^3. 9. a) $0{,}983$; b) $0{,}495$; c) $0{,}795$. 10. $\Delta y = 0{,}07$. 11. $dy = -2xe^{-x^2}\,dx$; $d^2y = (4x^2-2)\,e^{-x^2}\,dx^2$.

Capítulo XIII

1. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + C$. 2. $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$. 3. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{5\sqrt[6]{x^5}} - \frac{3}{2x\sqrt[3]{x}} + C$. 4. $\frac{a^{2x}}{\ln a^2} + \frac{b^{2x}}{\ln b^2} + \frac{2(ab)^x}{\ln ab} + C$. 5. $-\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} + C$.

6. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 7. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 8. $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$. 9. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$. 10. $\operatorname{arcsen} x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$. 11. $-x+\operatorname{tg} x+C$. 12. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 13. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+C$. 14. $-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)-\ln|1-x|+C$. 15. $x-\operatorname{arctg} x+C$. 16. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x+C$. 17. $x+\ln(1+x^2)+C$. 18. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C$. 19. $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. 20. $\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x+C$. 21. $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C$. 22. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x+C$. 23. $\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$. 24. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$. 25. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 26. $x-\ln(1+2e^x)+C$. 27. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 28. $\frac{x^2}{4}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. 29. $-x\cos x+\operatorname{sen} x+C$. 30. $(x-1)e^x+C$. 31. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$. 32. $(x^2-2x+2)e^x+C$. 33. $\frac{1}{\sqrt{21}}\times\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+C$. 34. $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{2}}{x\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right|+C$. 35. $\frac{1}{2}\times\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. 36. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 37. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right|+C$. 38. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-1}{x+9}\right|+C$. 39. $\ln\frac{|x+5|^5}{(x+3)^2}+C$. 40. $x-2\ln|x^2+4x+5|+3\operatorname{arctg}(x+2)+C$. 41. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+C$. 42. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4\sqrt{x+1}+C$. 43. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 44. $\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C$. 45. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$. 46. $\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$. 47. $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C$. 48. $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$. 49. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C$. 50. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. 51. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C$. 52. $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x+\alpha)+C$. 53. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 54. $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$. 55. $(x^2+3)e^x+C$. 56. $-\frac{x-1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+C$. 57. $\frac{1}{13}e^{-2x}(3\operatorname{sen} 3x-2\cos 3x)+C$. 58. $\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x+C$. 59. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. 60. $x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}+C$.

Capítulo XIV

1. 2. **2.** 0,2. **3.** 1. **4.** 4,5. **5.** a) e^{y^2}; b) $-e^{x^2}$.
6. 13/6. **7.** a) $-\pi$; b) $-e^{-1}$. **8.** a) π; b) $\frac{\pi}{2}$; **10.** a) 1; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Capítulo XV

1. $\frac{1}{3}$. **2.** $a^2 \ln 2$. **3.** $\frac{4}{3}$. **4.** πa^2. **5.** 1. **6.** $2\frac{2}{3}$. **7.** $5\frac{1}{3}$. **8.** $2-\frac{1}{\ln 2} \approx \approx 0,56$. **9.** $21\frac{1}{3}$. **9.1.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **10.** $17\frac{1}{3}$. **11.** $\frac{1}{4}(e^2+1) \approx 2,10$. **11.1.** $8a$. **12.** a^2. **13.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **14.** $\frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}$. **15.** $8a$. **16.** $\frac{h}{6}[AB+ab+(A+a)(B+b)]$. **17.** $4\pi R^3/3$. **18.** $16\pi/15$. **19.** $\pi^2/2$. **20.** 2π. **21.** $64\pi/15$. **22.** $\pi a^2 h/2$. **23.** 2π. **24.** 25 m; 2,5 m/s. **25.** 25 J. **26.** $2q_0 l/\pi$. **27.** $\approx 17\,400$ J. **28.** $2a^3/3$.

Capítulo XVI

1. $z = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. **2.** a) Banda vertical; b) semiplano; c) ángulo; d) interior de un círculo unitario. **3.** La imagen del dominio es un triángulo curvilíneo limitado por las curvas: $v^2 = 4(1-u)$, $v^2 = 4(1+u)$, $v = 0$ ($w = u + iv$).

Capítulo XVII

1. a) 1; b) 1. **2.** $x = 280$; $y = -310$. **3.** 1) $x = t$, $y = 1 - t$ $(-\infty < t < +\infty)$ para $\alpha = 2$; 2) no tiene resoluciones para $\alpha \neq 2$. **4.** $x = (5-3\alpha)/(25+\alpha)$, $y = 16/(25+\alpha)$, si $\alpha \neq -25$; para $\alpha = -25$ las rectas son paralelas. **5.** $x = 39t$, $y = 23t$, $z = 6t$ $(-\infty < t < +\infty)$; $x = 39$, $y = 23$, $z = 6$ para $t = 1$. **6.** a) 0; b) 12; c) $2x^3$. **7.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **8.** $D = 84$, $D_x = 14$, $D_y = -84$, $D_z = 70$; $x = \frac{1}{6}$, $y = -1$, $z = \frac{5}{6}$. **9.** $x = 17t$, $y = 2t$, $z = -7t$ $(-\infty < t < +\infty)$. **10.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ para $\alpha \neq 0$; $x = t$, $y = -t$, $z = -t$ $(-\infty < t < +\infty)$ para $\alpha = 0$. **11.** $x_1 = 55/127 \approx 0,4331$, $x_2 = -248/127 \approx -1,9528$, $x_3 = -183/127 \approx -1,4403$, $x_4 = -70/127 \approx \approx -0,5512$.

Capítulo XVIII

1. $a = 2$; $\alpha = \pi/3$, $\beta = 2\pi/3$, $\gamma = \pi/4$. **2.** $F = 10$; $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$, $\gamma = \pi/2$. **3.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **4.** 20. **5.** $S = 8\sqrt{3}$; $\cos\varphi = 1/7$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{7}\sqrt{3}$. **6.** No coplanares.

Capítulo XIX

1. a) Conjunto de planos de coordenadas Oyz y Oxz; b) conjunto del plano de coordenadas Oxy y del plano bisector del diedro que forman los planos de coordenadas Oxz y Oyz; c) dos planos paralelos $y = -2$ e $y = 1$; d) cilindro parabólico; e) recta paralela al eje Ox; f) plano de coordenadas Oyz; g) eje Oz; h) punto O (0, 0, 0). **2.** $p = 4$; $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$. **3.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$.

4. $z=3$. 5. $\approx 1{,}31$.

6. 60°, 120°, 135°. 7. $\left(0,\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$; $\left(-\frac{1}{3},\ 0,-\frac{2}{3}\right)$; $\left(0,\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$. 8. $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z=0$. 9. $x=R\cos\alpha\cos\varphi$, $y=R\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi$, $z=R\operatorname{sen}\alpha$. 10. $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$. 11. $3\sqrt{3/2}$, $\sqrt{3}$. 12. $\frac{x-a\cos t_0}{-a\operatorname{sen} t_0}=\frac{y-a\operatorname{sen} t_0}{a\cos t_0}=\frac{z-bt_0}{b}$; $\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $x^2+y^2=a^2$, $x=a\cos\frac{z}{b}$; $y=a\operatorname{sen}\frac{z}{b}$.

Capítulo XX

1. a) Banda $|y|\leqslant 1$; b) exterior del círculo $x^2+y^2\geqslant 1$; c) semiplano $x+y>0$. 2. a) Rectas paralelas; b) rectas que pasan por el origen de las coordenadas, excluyendo este origen; c) hipérbolas cuyos ejes coinciden con los ejes de coordenadas Ox y Oy; d) parábolas de eje común Oy. 3. a) Planos paralelos; b) cilindros circulares de eje común Ox. 4. a) $du=2[(x-y)\,dx-(x+y)\,dy]$; b) $du=\frac{y(y\,dx-x\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. c) $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{2|y|\sqrt{xy}}$. 5. $\frac{\partial u}{\partial l}=2\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$; 2; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; -1; $\frac{-3}{\sqrt{2}}$; -2; $\frac{-1}{\sqrt{2}}$; 1; $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 2; $|\operatorname{grad}_u(M_0)|=\sqrt{5}$. 6. $|\operatorname{grad} u(A)|\approx 50{,}5$ °C/km. 7. a) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\frac{1+\operatorname{sen}^2x}{4\sqrt{\operatorname{sen}^3x}}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}$; b) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=\frac{6xy}{z^4}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{z^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{2y}{z^3}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{2x}{z^3}$; c) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{-1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; d) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$. 9. 2,48 kg/m³ $\pm$ 0,26 kg/m³.

11. $x=y=z=\sqrt[3]{a}$. 12. Lados del paralelepípedo: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

13. Lados del paralelepípedo: $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$, $\frac{h}{3}$. 14. $y=198{,}77-5{,}06x$.

15. $x^2\approx 6x-\frac{26}{3}$. 16. $\min u=0=u(-0{,}6;\ -0{,}8)$; $\max u=10=u(0{,}6;\ 0{,}8)$.

Capítulo XXI

1. Divergente. 2. Divergente. 3. Convergente. 4. Convergente. 5. Divergente. 6. Convergente. 7. Convergente. 8. Convergente. 9. Divergente. 10. Convergente. 11. Convergente. 12. Convergente. 13. Convergente. 14. Convergente. 15. Divergente. 16. Convergente. 17. $-1<x\leqslant 1$. 18. $-\infty<x+\infty$.

19. $x=0$. 20. $-1\leqslant x<3$. 21. $a^x=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\ldots\quad(-\infty<x<$

$<+\infty)$. **22.** $\operatorname{sen}^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **23.** $\sqrt{x}=$ $=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2\cdot 4}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(x-1)^3+\ldots$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$. **24.** $e^{-x^2}=$ $=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **25.** INDICACIÓN: $\cos^2 x=\frac{1}{2}\times$ $\times(1+\cos 2x)$; $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **26.** $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots$ $(-1<x<1)$. **27.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+$ $+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots$ $(-1<x<1)$. **28.** a) 1,649; b) 0,309; c) 1,037. **29.** 0,5450. **30.** $f(x)\approx x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{72}$. **31.** a) $\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+$ $+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\ldots$ $(-\pi<x<\pi)$; b) $x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\right.$ $\left.-\ldots\right)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

Capítulo XXII

3. $y=\frac{3}{4}x^2$. **4.** a) $x^2+y^2=C$; b) $xy=C$; c) $y=C+\ln x$; d) $y=-2+Ce^x$; e) $y=-\ln(C-e^x)$. **5.** a) $y^2=2x^2\ln Cx$; b) $y=xe^{1+Cx}$. **6.** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. **7.** a) $y=\frac{x^3}{2}+Cx$; b) $x=Ce^y-(y^2+2y+2)$. **8.** $y=\operatorname{sen} x$. **9.** $x^2+y^2=C$. **10.** $y=e^{(x-2)/4}$. **11.** $Q_t=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$. **12.** 100 g. **13.** $y(2)=1{,}122$; valor exacto de $y(2)=1+e^{-2}=1{,}135$. **14.** $y=C_1+C_2x-\operatorname{sen} x$. **15.** $y=C_1\operatorname{sen}(x+C_2)$. **16.** $y=C_1+\frac{(x+C_2)^2}{4C_1}$. **17.** $y=1+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}$. **18.** a) $y=1+x+\frac{1}{2}x^2+$ $+\frac{1}{4}x^3+\ldots$; b) $y=x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7+\ldots$ **19.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. **20.** $y=$ $=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x)$. **21.** $y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **22.** $y=e^{x/2}(C_1+C_2x)$. **23.** $y=2\cos x-\operatorname{sen} x$. **24.** $y=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{-x}$. **25.** $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen} x+C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x$. **26.** $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{18}x+\frac{19}{108}+C_1e^{2x}+$ $+C_2e^{3x}$. **27.** $y=1+x-e^x\cos x$. **28.** $x=C_1e^{-pt/2}\cos\left(t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}+C_2\right)$, donde $q=k_1/m$, $p=k_2/m$ y k_1, k_2 son coeficientes de proporcionalidad.

Capítulo XXIII

1. a) $3\sqrt{5}/2$; b) $(2\sqrt{2}-1)/3$; c) $\pi R^5/4$; d) $a[(\pi+4)\sqrt{2}-8]$. **2.** $3\frac{1}{3}$.

3. πR. 4. $x_0=0$; $y_0=\frac{2}{\pi}R$. 5. $\frac{2^7}{3^6}\cdot\frac{848}{105}\approx 1{,}42$. 6. $I_x=\frac{256}{15}a^3$. 7. a) 16/15; b) 2π; c) 2π. 8. $-9/2$. 9. a) -2; b) 0; c) 3/2; d) e^2-1. 10. $-2\pi ab$. 11. $A=\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. 12. $-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 13. $\ln\frac{b}{a}$. 14. $31\frac{1}{2}$.

Capítulo XXIV

1. a) 3/20; b) $(1-e^{-1})^2$; c) $\pi/2$. 2. a) $4(2\sqrt{2}-1)/15$; b) 2/5; c) 2π. 3. a) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x} f(x, y)\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y/2}^1 f(x, y)\,dx$; b) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x, y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\times\int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{2-y} f(x, y)\,dx$; c) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\times\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$; d) $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_{x^2}^4 f(x, y)\,dy=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$; e) $\int\limits_0^2 dx\times\int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy=\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$. 4. a) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$; b) $\int\limits_1^e dx\int\limits_0^{\ln x} f(x, y)\,dy$; c) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi-\operatorname{arcsen} y} f(x, y)\,dx$. 5. a) $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi\int\limits_0^1 r^4\operatorname{sen}\varphi\times\cos^2\varphi\,dr$; b) $\int\limits_{-\operatorname{arctg}0,5}^{\operatorname{arctg}0,5} d\varphi\int\limits_0^{2\sec\varphi} r^2\,dr$; c) $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi\int\limits_0^{\operatorname{sen}\varphi/\cos^2\varphi} rf[r(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi)]\,dr$.
6. a) 1/3; b) 4/21; c) $2-\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$; d) 16/5. 7. a) $2\pi^2$; b) $\pi/4$. 8. a) 1/3; b) $(3\pi-4)/6$; c) 88/105; d) 32/9; e) $2abc/3$. 9. $I_x=I_y=\frac{\pi}{4}R^4$. 10. $x_0=0$, $y_0=\frac{3}{5}a$. 11. 1/48. 12. 28/3.

Capítulo XXV

1. $A+A=A$, $AA=A$, $A+C=A$, $AC=A$. 2. $P(A)=1/6$; $P(B)=1/2$; $P(C)=2/3$. 3. $\geqslant 790$. 4. a) 3/7; b) 1/2. 5. a) 80%; b) $\approx 97\%$. 6. a) 0,992; b) 0,876; c) 0,008. 8. $P_0=32/243$; $P_1=80/243$; $P_2=80/243$; $P_3=40/243$; $P_4=10/243$; $P_5=1/243$. 9. $\geqslant 31$. 10. $M=1{,}31$; $D=0{,}0049$; $\sigma=0{,}07$.
12. $\Phi(x)=0$ para $-\infty<x<0$; $\Phi(x)=\frac{1}{4}x$ para $0\leqslant x\leqslant 1$; $\Phi(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ para $1\leqslant x\leqslant 2$; $\Phi(x)=1$ para $2<x<+\infty$; $M(X)=1\frac{1}{4}$; $D(X)=\frac{13}{48}$. 13. $\varphi(x)=\frac{1}{2l}$; $M(X)=0$; $D(X)=\frac{1}{3}l^2$; $\sigma(X)=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58l$.
15. $\approx 0{,}384$. 16. El número de los paquetes estándares debe ser de aproximadamente 9540.